Production Note

Geschichte

der

darstellenden und projectiven Geometrie

mit besonderer Berücksichtigung

ihrer Begründung in Frankreich und Deutschland

und ihrer

wissenschaftlichen Pflege in Österreich.

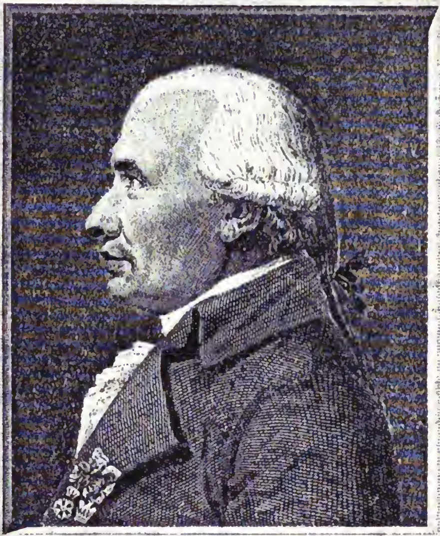
Von

Professor Ferdinand Jos. Obenrauch.

Brünn, 1897.

Druck und Verlag der k. u. k. Hof-Buchhandlung

Carl Winiker.



GASPARD MONGE.

J. Steiner.

Geschichte

der

darstellenden und projectiven Geometrie

mit besonderer Berücksichtigung

ihrer Begründung in Frankreich und Deutschland

und ihrer

wissenschaftlichen Pflege in Österreich.

Von

Professor Ferdinand Jos. Obenrauch.

Brünn, 1897.

Druck und Verlag der k. u. k. Hof-Buchhandlung

Carl Winiker.

Vorwort.

Die darstellende Geometrie — schon seit mehreren Decennien geistiges Gemeingut aller Culturvölker — besitzt trotz ihrer schon vor hundert Jahren erfolgten Begründung als Wissenschaft erst seit wenigen Jahren ein Werk, in welchem die Geschichte dieser Wissenschaft den ihr gebührenden Platz erhalten hat.

Es ist dies das bestens bekannte, durch seinen systematischen Aufbau ausgezeichnete Lehrbuch der darstellenden Geometrie vom Geh. Herrn Hofrath Dr. Chr. Wiener, o. ö. Professor der Mathematik an der Großherzogl. polytechnischen Hochschule in Karlsruhe, dessen erster Band im Jahre 1884 bei B. G. Teubner in Leipzig erschienen ist. In dem ersten Bande (Abschnitt I, S. 5—61) dieses von allen Fachmännern auf das beste aufgenommenen Werkes hat der geschätzte Verfasser die Geschichte der darstellenden Geometrie aufgenommen und bringt — wenn auch in gedrängter Kürze, so doch mit Berücksichtigung aller Fortschritte in dieser Wissenschaft — die wichtigsten, alle speciellen Gebiete vertretenden Werke über darstellende und projective Geometrie zur Kenntnis des Studierenden.

Auch in den Werken „Die darstellende Geometrie, Leipzig 1871" (II. Aufl. 1875, III. Aufl. 1883—88) von Herrn Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am Polytechnicum in Zürich, „Cours de Géométrie descriptive, Paris 1880" (IIe édit. 1886) von Herrn A. Mannheim, Professor an der École polytechnique, und „Darstellende und projective Geometrie, Wien 1882—85" von Herrn k. k. Regierungsrath Dr. A. G. V. Peschka, o. ö. Professor der darstellenden Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Wien, fand die Quellen-Literatur die ihr gebührende Berücksichtigung.

Die Begründung der descriptiven Geometrie als Wissenschaft und ihre Pflege in Frankreich hat in M. Chasles Werken „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, Bruxelles 1838" (IIe édit. Paris 1875) und „Rapport sur les progrès de la Géométrie, Paris 1870" eine recht eingehende Besprechung gefunden.

Durch das Gesetz des Nationalconventes der ersten französischen Republik vom 30. October 1794 (9. brumaire an III) wurde die Errichtung der École normale in Paris beschlossen, und der größte französische Geometer des achtzehnten Jahrhundertes, Gaspard Monge erhielt die Erlaubnis, die von ihm begründete descriptive Geometrie, welche er bis zu diesem Zeitpunkte als Staatsgeheimnis wahren musste, öffentlich zu lehren.

Am 19. Jänner 1795 trat Monge im Jardin des plantes zu Paris vor ein aus 1500 hochbegabten Zöglingen aus allen Departements Frankreichs gebildetes Collegium, um zuerst dieses in die descriptive Geometrie als Wissenschaft einzuführen.

Der hundertjährige Bestand der darstellenden Geometrie als Wissenschaft, ihre außerordentliche Verbreitung und hervorragende Stellung im Lehrplane der Real- und Gewerbeschulen und der technischen Hochschulen aller Culturstaaten, sowie die hundertjährige Wiederkehr des Geburtstages von Jakob Steiner, des größten Geometers Deutschlands und Begründers der projectiven Geometrie, waren die Ursachen, welche den Verfasser zur Veröffentlichung dieses Werkes veranlassten.

Der Verfasser fühlt sich schon an dieser Stelle verpflichtet, den Herrn Geheimen Hofräthen Dr. Christian Wiener, o. ö. Professor an der Großherzogl. polytechnischen Hochschule in Karlsruhe, Dr. Moritz Cantor, o. ö. Professor an der Universität zu Heidelberg und Dr. Oscar Schlömilch, em. Professor der höheren Mathematik an der königl. technischen Hochschule in Dresden, sowie Herrn A. Mannheim, Oberst im französischen Artillerie-Corps und Professor der descriptiven Geometrie an der École polytechnique zu Paris, und Herrn Dr. Gino Loria, Professor der höheren Geometrie an der Universität zu Genua, ferner den Herren k. k. Regierungsräthen Dr. G. A. V. Peschka und Joh. G. Schoen, o. ö. Professoren an der k. k. technischen Hochschule in Wien, sowie den Herren Hochschulprofessoren Karl Pelz in Graz und Franz Ruth in Prag für die Zusendung wertvoller, wissenschaftlicher Abhandlungen und für das Interesse, welches Sie diesem mathematisch-historischen Werke entgegen brachten, seinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Indem der Verfasser sich der angenehmen Hoffnung hingibt, allen Freunden der darstellenden und projectiven Geometrie mit diesem mathematisch-historischen Werke einen zeitgemäßen und erwünschten Beitrag zur Geschichte dieser Wissenschaften geliefert zu haben, dankt er dem bestens bekannten Herrn Verleger für die sorgfältige Ausstattung dieses Werkes.

Brünn, den 18. März 1896.

Der Verfasser.

Inhalt.

Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft.

Die wissenschaftliche Pflege der darstellenden und projectiven Geometrie in Österreich.

MONGE

DER BEGRÜNDER DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE ALS WISSENSCHAFT.

I.

Einleitung.

„La géométrie descriptive doit devenir un jour une des parties principales de l'éducation nationale, parceque les méthodes qu'elle donne sont aussi nécessaires aux artistes, que le sont la lecture, l'écriture et l'arithmétique.“ Monge (1795).

Hundert Jahre sind vorüber — seitdem Gaspard Monge durch seine öffentlichen Vorträge über descriptive Geometrie an der École normale in Paris die darstellende Geometrie als Wissenschaft begründet hatte.

Diese Vorträge, von Stenographen niedergeschrieben, bilden den Inhalt seines berühmten Werkes „Géométrie descriptive“, welches im Jahre 1795 veröffentlicht wurde.

Im Drucke wurden Monges Vorlesungen zuerst in den „Leçons de géométrie descriptive, données à l'École normale, publiées d'abord en feuilles, d'après les sténographes; Paris an III“ und, von ihm revidiert, in dem „Journal des Écoles normales, an III“ (1795) veröffentlicht.

Strenge genommen reicht die wissenschaftliche Begründung der darstellenden Geometrie, die nach hundert Jahren ein unerschütterliches Fundament realistischer Bildung geworden ist, noch um weitere drei Decennien, also bis zum Jahre 1765 zurück, da Monge schon als Professor der Genieschule zu Mézières diese Wissenschaft in ihren

Grundlehren begründet hatte. Doch wurde Monges descriptive Geometrie als Staatsgeheimnis betrachtet, und das damals so mächtige französische Geniecorps hatte Monge durch dreißig Jahre nicht gestattet, über seine Erfindung etwas zu veröffentlichen.

Erst das Gesetz des Nationalconventes vom 9. brumaire an III (30. October 1794), durch welches die Errichtung der École normale in Paris beschlossen wurde, gestattete Monge, über seine descriptive Geometrie öffentliche Vorträge zu halten.

Gaspard Monge wurde am 10. Mai 1746 in Beaune, einem burgundischen Städtchen im Departement Côte d'or, geboren. [1])

Sein Vater, Jaques Monge, war ein bescheidener Handelsmann, der sich selbst harte Entbehrungen auferlegte, um seine drei Söhne auf die gelehrte Schule dieser Stadt zu schicken, welche damals von den Oratoristen — einer vom Cardinal Berulle im 17. Jahrhundert in Frankreich zur Heranbilduug guter Kanzelredner gestifteten Brüderschaft — geleitet wurde.

Die drei jungen Leute Gaspard, Louis und Jean Monge machten der sorgenden Liebe ihres Vaters keine Schande. Louis Monge wurde Examinator der Marinezöglinge, Jean Monge Professor der Hydrographie an der Marineschule zu Antwerpen, und Gaspard Monge, der älteste von ihnen, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft, brachte es bis zum Marineminister. Als Schüler der Oratoristen-Schule in Beaune trug Monge in allen Fächern die ersten Preise davon und benutzte die freie Zeit, welche ihm die literarischen Studien an der Anstalt übrig ließen, um sich in den angewandten Wissenschaften und Künsten auszubilden.

[1]) S.: M. Brisson, Notice historique sur Gaspard Monge. Paris 1818. — Charles Dupin, Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge. Paris 1819. — François Arago: Gaspard Monge, biographie lue en séance publique de l'Académie des sciences, le 11 mai 1846. (Oeuvres complètes de François Arago. Paris 1854. Tome deuxième, page 427—592). — Franz Aragos sämmtliche Werke. Deutsche Originalausgabe von Dr. W. G. Hankel. Leipzig 1854, pag. 346—484. — M. Chasles, Aperçu historique sur l'orgine et le développement des méthodes en géométrie, Bruxelles 1837. (Seconde édition, Paris 1875). „Histoire de la géométrie“ pag. 189. — Geschichte der Geometrie von M. Chasles, aus dem Fransösischen übertragen durch Dr. L. A. Sohncke, Halle 1839, pag. 185. — M. Chasles, Rapport sur les progrès de la géométrie. Paris 1870, pag. 2, 3, 7 etc. — pag. 375. — Dr. Christian Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig 1884, I. Bd., pag. 26—29. - August Heller, Geschichte der Physik. Stuttgart 1884, II. Bd., pag. 598—599. — „Über die Pariser polytechnische Schule“, Vortrag, gehalten von C. G. J. Jacobi, am 22. Mai 1835 in der phys.-ökon. Gesellschaft zu Königsberg (S. a.: C. G. J. Jacobis Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Weierstrass. VII. Bd. Berlin 1891, pag. 355), etc.

Schon mit vierzehn Jahren construierte der angehende Zögling der Rhetorik eine Feuerspritze, welche das Erstaunen der Fachmänner erregte. Bald darauf entwarf Monge mit Hilfe von selbst verfertigten Winkelmess-Instrumenten einen ausführlichen Plan seiner Vaterstadt, der in der Bibliothek zu Beaune aufbewahrt wird, und im kleinen Maßstabe gestochen, eine Zierde des historischen Werkchens von Abbé Gandelot bildet. Die Oratoristen von Lyon, welche sich von den hervorragenden Leistungen des Monge mit eigenen Augen überzeugt hatten, beriefen denselben nach ihrer Niederlassung und übertrugen ihm sofort den Lehrstuhl für Physik. Der Professor der Physik an der berühmten Lehranstalt der Oratoristen zu Lyon war erst sechzehn Jahre alt, und diese bemühten sich, ihren Liebling für den Orden selbst zu gewinnen. Monge war auch bereit in den Orden einzutreten, als ein Brief seines Vaters, der den Sohn auf seine unvollständige Bildung für den geistlichen Beruf aufmerksam gemacht hatte, ihn veranlasste, diesen Entschluss fallen zu lassen.

Monge kehrte in seine Vaterstadt zurück und trat über Anrathen eines Oberstlieutenants im französischen Geniecorps, der den großen Stadtplan von Beaune nicht genug bewundern konnte, in die Militärschule zu Mézières ein. Mézières, die Hauptstadt des französischen Departements der Ardennen, liegt wenige Kilometer nordwestlich von Sedan, am rechten Ufer der Maas. Das Städtchen, etwa 5000 Einwohner zählend, galt im Mittelalter für einen der festesten Plätze Frankreichs und ist durch seine tapfere Vertheidigung (1525) unter Bayard auch historisch bekannt.

Hier war im Jahre 1748 unter dem Minister d'Argenson die berühmte Genieschule von Mézières gegründet worden, die sich eines hohen Ansehens im Lande erfreute, das sie zum Theile auch dem tiefen Geheimnisse verdankte, in welches sie sich hüllte. Die Zahl der Zöglinge betrug zwanzig und wurde alljährlich zur Hälfte erneuert. Die zehn absolvierten Zöglinge erhielten den Rang von Genielieutenants und hatten die Fortificationsarbeiten in den zahlreichen Kriegsplätzen Frankreichs zu leiten. Mit dieser Genieschule in Verbindung stand eine Hilfsschule (une succursale) zur Heranbildung von praktischen Werkmeistern. Die Schüler dieser Hilfsanstalt hatten die elementaren Principien des algebraischen Calcüls in der Geometrie zu lernen, sowie sich eine gewisse Fertigkeit im Zeichnen und die Kenntnis der Bauconstructionen in Holz und Stein anzueignen. Sie mussten ferner mit den Händen aus nassem Gyps (plâtre gaché) Modelle von allen Constructionstheilen und Gewölbesteinen anfertigen, welche in der militärischen und bürgerlichen Baukunst üblich waren. Die Aufnahme der

Schüler in diese Hilfsschule war wohl keinen Bedingungen hinsichtlich der Geburt oder des Vermögens unterworfen, aber was auch ihre Fähigkeiten sein mochten, so konnten sie nie — selbst auf den bescheidenen Rang eines Unterlieutenants im Geniecorps Anspruch machen. Hingegen wurden die Zöglinge des höheren Curses nur dann zum Examen zugelassen, wenn sie den Beweis erbracht hatten, dass ihre Vorfahren adelig gelebt hatten (que leurs pères avaient vécu noblement), d. h. dass sie sich nie mit irgend einem Zweige des Handels, der Industrie und der Fabrication abgegeben hatten. Nur die Fabrication von Glas und Flaschen, welches die Verfassung des Reiches in jener Zeit den Edelleuten (gentilshommes verriers) gestattete, bildete die einzige Ausnahme.

Infolge des Standesunterschiedes dieser beiden Schulen gaben die privilegierten Zöglinge des höheren Curses — in hochmüthiger Weise auf das Modellieren anspielend — der praktischen Schule den Namen Gipsschule (la Gâche).

Da Jacques Monge weder von seinen Renten lebte, noch eine Glasfabrik besaß, im Gegentheil — um die materielle Lage seiner Familie zu verbessern — es nicht verschmähte, den burgundischen Hausfrauen Messer und Scheren zu schleifen, so wurde sein hochbegabter Sohn Gaspard unnachsichtlich in die Gypsschule versetzt — mit der Hoffnung, seinem Vaterlande einst als bescheidener Bauaufseher einer Bastion oder eines Vorwerkes Dienste leisten zu können.

Zu jener Zeit bildete das Defilieren eines Festungswerkes, d. i. eine solche Anlage desselben, dass es in keinem seiner Theile einer directen Bestreichung seitens der Artillerie des Belagerers ausgesetzt ist, eine der wichtigsten Hauptaufgaben der Militär-Ingenieure. Die Methoden, welche damals zur Lösung dieses berühmten Problemes zur Anwendung kamen, bestanden entweder in unsicherem graphischen Probieren, oder wurden mittelst langwieriger Rechnungen durchgeführt, zu deren Ausführung nur zu oft die unglücklichen Zöglinge der Gypsschule verwendet wurden. Dieser Inanspruchnahme entgieng auch Monge nicht. Doch löste der junge Geometer seine Aufgabe nach seiner eigenen Methode in so kurzer Zeit, dass der Obercommandant von Mézières die Auflösung als eine flüchtige, ja leichtfertige bezeichnete und sich auch weigerte, in dieselbe Einsicht zu nehmen. Vergeblich wies Monge darauf hin, dass er seine Aufgabe nicht nach der gewöhnlichen, langwierigen Methode, sondern nach seinem eigenen und rasch zum Ziele führenden Verfahren, gelöst habe. Die Beständigkeit und Sicherheit, mit welcher Monge sein neues, reingeometrisches Verfahren in Schutz nahm, veranlasste den Obercommandanten dem wiederholten Andringen des jungen, ihm imponierenden Zöglings nachzugeben und in die Auflösung der Aufgabe Einblick zu nehmen.

Dieses Beispiel allein zeigte dem strengen Obercommandanten von Mézières, welche großen Vortheile die Geometrie bei der Auflösung der wichtigsten Probleme, die sich auf öffentliche Bauten beziehen, gewähren könne. Monges graphische Methode fand Anerkennung, und zum Lohne für seine geniale Erfindung erhielt er im Jahre 1765 die Stelle eines mathematischen Repetitors (Répétiteur de mathématiques). Von diesem Zeitpunkte an, wo Monge als Repetitor an der Genieschule zu Mézières zu wirken begann und mit Hilfe eines hervorragenden mathematischen Talentes seine rein geometrische Methode auf die Lösung analoger Aufgaben anwendete und verallgemeinerte, datiert die wissenschaftliche Begründung jenes Zweiges der angewandten Mathematik, den er trotz seiner Wichtigkeit für das öffentliche Leben durch dreißig Jahre verschweigen musste, und welcher heute unter dem Namen der descriptiven und darstellenden Geometrie an den Mittelschulen mit realistischem Bildungsgange und an den technischen Hochschulen der ganzen Welt zum Vortrage gelangt.

Monge selbst hatte eine ganze Reihe von gewaltigen Hindernissen zu überwinden, bis er das Chaos von heterogenen Methoden, welche damals zur Anwendung gelangten und das Asyl eines geheimnisvollen Empirismus bildeten, beseitigte und an dessen Stelle die einfache und allgemeine Methode seiner „Géométrie descriptive“ setzte.

Bis zu diesem Zeitpunkte wurde das orthogonale Projectionsverfahren der darstellenden Geometrie, deren literarische Entwickelungsgeschichte bis auf den römischen Baumeister Vitruvius zurückreicht, von den Baumeistern, Zimmerleuten, Steinmetzen und construierenden Künstlern überhaupt nur empirisch, sozusagen handwerksmäßig, und nicht auf mathematischen Principien ruhend, angewendet.[1] Die Kunst großartige und complicierte Bauten, wie die Tempel der Alten, aus behauenen Steinen herzustellen, ist ohne Anwendung des Gründ- und Aufrissverfahrens ganz undenkbar.

Wie bekannt, erregte schon der Bau des Tempels zu Jerusalem, den König Salomo 1000 vor Christi durch die Tyrer ausführen ließ, die Verwunderung der wenig kunstgeübten Juden. Aber auch die wunderbaren Bauwerke der Ägypter, darunter insbesondere die Pyramiden — deren größte und merkwürdigste bei dem Dorfe Gizeh, vom König Cheops, dessen vierte Dynastie von 3686 bis 3402 regierte, erbaut worden sein soll, und die seit Jahrtausenden das Gemüth eines jeden

[1] S.: Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geometrie pag. 5.

Beschauers mit ehrfurchtsvollem Erstaunen erfüllen — konnten unmöglich ohne gewisse Kenntnisse praktisch-geometrischer Operationen ausgeführt werden. So bilden nach den sorgfältigen Messungen des englischen Astronomen Piazzi Smyth [1]) die Seitenflächen der Cheops-Pyramide mit dem Horizonte mit überraschender Genauigkeit einen Winkel von 51° 50′.

Es ist historisch erwiesen, dass schon den baulichen Anlagen der Ägypter Zeichnungen und Risse zugrunde lagen, mit Angabe der Maße nach ganzen Zahlen und Brüchen, von welchen sich mehrere auf Papyros gemalte Pläne bis auf unsere Tage erhalten haben. [2]) Sowie der Anfang aller menschlichen Kenntnisse, so ist auch der Ursprung der Geometrie [3]) überhaupt in das graueste Alterthum zu versetzen, und in jenen der Zeit nach unangebbaren Perioden der menschlichen Entwickelung zu suchen, in welchen das erste Erwachen des Selbstbewusstseins zu finden wäre.

Der römische Baumeister Vitrivius [4]), einer der hervorragendsten Agrimensoren Roms und Verfasser von zehn Büchern über Architektur, die vermuthlich im Jahre 14 vor Chr. vollendet wurden und dem Kaiser Augustus zugeeignet sind, gibt uns als Schriftsteller in diesem Werke die ersten Nachrichten über die Darstellungsweise der Alten. So hat nach Vitruvs Baukunst (I. Buch, 2. Cap. und VII. Buch, Vorwort) zuerst Agatharchus zu Athen, als Äschylus (526—456 vor Chr.)

[1]) S.: Edindburgh Transactions, vol. XXIII, part. 3, 1863—64 und vol. XXIV, part. 2, 1865—66. S. a. Dr. H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874, pag. 71—76.

[2]) S.: Brugsch „Über die Weisheit der alten Ägypter.“ Deutsche Revue, 7. Jahrgang. Jänner 1882, pag. 67, und Brugsch, Histoire d'Égypte, Leipzig 1859.

[3]) Über den Ursprug und die Entwickelung der Geometrie verweisen wir auf die mathematisch-historischen Werke von: M. Montucla, Histoire des mathématiques. Paris 1758, tome I. et II. und die beiden Supplementbände von de la Lande, 1802. — A. G. Kästner, Geschichte der Mathematik. Göttingen 1796. — M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. Bruxelles 1837 (seconde édition Paris 1875); deutsch von Sohncke Halle 1839. — M. Cantor, Euklid und sein Jahrhundert, Leipzig 1867. — C. A. Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig 1870. — H. Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaften. I. Bd. Zürich 1873, II. Bd. 1875. — H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874. — M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I. Bd. Leipzig 1880, II. Bd. 1892 und III. Bd. 1895. — Emil Weyr, „Über die Geometrie der alten Ägypter“. Vortrag, gehalten in der feierlichen Sitzung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien am 29. Mai 1884 etc. etc.

[4]) S.: M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig 1880, I. Bd. pag. 461. — Ch. Wiener, Lehrbuch (Geschichte) der darstellenden Geometrie. Leipzig 1884, pag. 5 und 8. — S. a.: M. Cantor, Die römischen Agrimensoren, Leipzig 1875, und „Römische Feldmesser“, herausgegeben und erklärt von F. Blume, K. Lachmann, und A. Rudorff. Berlin 1848 und 1852.

das Trauerspiel zur Aufführung brachte, die Schaubühne derart hergestellt, dass alle Linien einem Mittelpunkte, Centrum, entsprechen. Hiedurch veranlasst, schrieben Demokrit und Anaxagoras über denselben Gegenstand.

Die Perspective [1]) gieng aus dem Bedürfnisse der Malerei hervor und schon die Optik des Euklid (etwa 300 vor Chr.) und des Heliodor von Larissa gehen von der Ansicht Platons aus, dass man die Gegenstände mittelst vom Auge ausgehender Sehstrahlen sehe. Die Werke von Witelo (lat. Vitellio, etwa 1270), Roger Bacon (1214—1294) und von Ramus (Pierre de la Ramée, Paris 1567) sind der Optik des Euklid nachgebildet. Nicht unerwähnt können wir die Erfindung der stereographischen Projection durch Hipparch lassen, der durch seine astrnomischen Forschungen um 161—126 vor Chr. sich den Namen des Schöpfers einer wissenschaftlichen Sternkunde erwarb.

Die Perspective, dem Abendlande durch Übersetzungen der Optik: „Opticae thesaurus Alhazeni Arabis libri VII" des später in Ägypten lebenden arabischen Mathematikers Ibn Alhaitam [2]) (lat. Alhazen, gestorben 1038 in Kairo), bekannt geworden, bildete von der zweiten Hälfte des 13. Jahrhundertes einen regelmäßig wiederkehrenden Gegenstand schriftstellerischer Thätigkeit. So schrieb über Perspective auch der Ordensgenosse Bacos, der Franziskaner Johannes Peckham [3]) (lat. Pisanus) aus Sussex, gestorben 1292 als Bischof von Canterbury. Peckhams „Perspectiva communis", ein Auszug aus der Schrift Alhazens, erlebte unzählig viele Auflagen und wurde in den folgenden Jahrhunderten geradezu akademischer Leitfaden für Universitäts-Vorlesungen. [4])

[1]) S.: Poudra, Histoire de la Perspective ancienne et moderne. Paris 1864. — Wiener, Lehrbuch (Geschichte) der darstellenden Geometrie, pag. 5—61.

[2]) S.: Cantor, Vorlesungen, Bd. I. pag. 677—680. — Heller, Geschichte der Physik, Stuttgart 1882 Bd. I, pag. 167—168.

[3]) S.: Cantor, Vorlesungen, Bd. II, pag. 87—88 — Heller, Geschichte der Physik. Bd. I, pag. 207.

[4]) Die ersten akademischen Vorlesungen über Perspective wurden wahrscheinlich erst in der Mitte des dreizehnten Jahrhundertes an der Universität zu Oxford gehalten. In dem Studienplan der Pariser Universität vom Jahre 1254 finden wir noch keine ordentlichen Vorlesungen über Mathematik. Das Gleiche gilt von der im Jahre 1224 in Neapel gegründeten Universität. Erst 1366 fanden an der Universität zu Paris die mathematischen Wissenschaften mehr Berücksichtigung, aber noch im sechzehnten Jahrhundert genügte ein Eid statt der Prüfung, der Baccalaureat habe eine Vorlesung über die sechs ersten Bücher des Euklid gehört. (S.: Cantor, Vorlesungen, II. Bd., pag. 50, 80, 127.)

An der 1365 gegründeten Wiener Universität wurde schon nach den Satzungen vom Studienjahre 1389—90 „Perpectiva communis" in 24 Lectionen für fünf Groschen vorgetragen. Diese Vorträge hielt seit 1414 der Magister der freien Künste Johann

Obwohl die Kunst, auf einem Zeichnungsblatte alle vollkommen erklärbaren Körper darzustellen, dass davon alle Maße dieser Körpers abgenommen werden können, mit der Entwickelung der Baukunst gleichen Schritt halten musste, so ist uns in Deutschland doch erst aus dem 16. Jahrhunderte nur die Schrift des hervorragendsten Künstlers dieses Jahrhundertes, Albrecht Dürer, bekannt, dessen berühmtes Werk im Jahre 1525 in Nürnberg unter dem Titel: „Underweysung der messung mit dem Zirckel und richtscheydt in Linien ebenen und gantzen corporen" erschien. [1])

Der berühmte Nürnberger Maler bestimmt in seinem Werke das perspectivische Bild eines Gegenstandes nach der sogenannten Durchstoßmethode, bei welcher die Sehstrahlenpyramide mit der Bildfläche zum Schnitt gebracht wird.

Diese Methode der Bestimmung perspectivischer Bilder finden wir zuerst im Werke „de pictura 1446" des gelehrten italienischen Baumeisters Leon Battista Alberti, (1404—1472). Sie wurde von dem berühmten Maler Leonardo da Vinci (1452—1519) in seinem „Trattato della pittura" bezüglich der Verjüngung der perspectivischen Bilder vervollkommnet, und auf dieser Grundlage des Wissens erhoben sich die großen Meister Italiens Rafael, Michel-Angelo, Titian, Paul Veronese etc., deren unsterbliche Werke die ganze civilisierte Welt bewundert.

Im Jahre 1636 führte der französische Mathematiker und Geometer Desargues (Manière universelle de mettre en perspective les objets, etc. Paris 1636) die Coordinaten-Methode in die Perspective ein, welche Methode von seinem Schüler Bosse, Professor der Perspective an der Schule der schönen Künste in Paris, eifrigst verbreitet und gegen viele Angriffe bezüglich ihrer Richtigkeit, Allgemeinheit und Zweckmäßigkeit vertheidigt wurde. Der Streit bezüglich der Richtigkeit der Desargues'schen Coordinaten-Methode nahm solche Dimensionen an, dass sich selbst die französischen Behörden in diese Streitigkeiten mischten, und Bosse wurde es verboten, sich in seinem Cursus über Perspective an der königlichen Malerschule zu Paris der Desarguesschen Methode zu bedienen — trotzdem sie sehr genau war.

Grundriss und Aufriss bildeten nun über hundert Jahre die wesentlichsten Bedingungen zur Construction perspectivischer Bilder, bis der

v. Gemunden. Für acht Lectionen über „Primus liber Euclidis" zahlte man einen Groschen, für 24 Lectionen „Quatuor sequentes libri Euclidis" fünf Groschen, hingegen kosteten 104 Lectionen „Physicorum" an der damaligen artistischen Facultät einen Gulden. (S.: J. Aschbach. Geschichte der Wiener Universität, Wien 1865, pag. 351—352, und Cantor, Vorlesungen, II. Bd., pag. 162.)

[1]) S.: Cantor, Vorlesungen, II. Bd., pag. 421.

berühmte deutsche Mathematiker und Physiker J. H. Lambert (1728 bis 1777) in seinem Werke: „Freye Perspective, oder Anweisung jeden perspectivischen Aufriss von freyen Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen. Zürich 1759" die gegenwärtig übliche Perspective begründete. [1])

Was die Kunst, kühne und complicierte Gewölbe auszuführen anbelangt, so stand diese schon im 16. Jahrhundert in Deutschland auf einer sehr hohen Stufe, und es unterliegt keinem Zweifel, dass auch die Kunst des Messens und Aufreißens den Steinmetzen jener Zeit besonders geläufig sein musste. Wahrscheinlich brachte es der damalige Zunftgeist mit sich, dass die Mess- und Aufrisskunst unter eidlichem Siegel als Zunftgeheimnis gewahrt werden musste, und so kam es, dass mit dem Untergange der deutschen Steinmetzzunft auch dieses Geheimnis begraben wurde.

Diese Geheimhaltung einer Kunst darf uns nicht überraschen, denn zweihundert Jahre später begegnen wir noch einer interessanteren Geheimhaltung, welche im Corpsgeist begründet, die einzelnen Truppenkörper im französischen Heere veranlasste, sich ihre Erfindungen gegenseitig zu verheimlichen.

Im 16., 17. und 18. Jahrhundert waren es die Franzosen, welche in der Steinmetzkunst Hervorragendes leisteten, und bei welchen wir auch die ersten Schriftsteller über Stereotomie finden. Philibert de l'Orme, Almosenier Heinrich II. von Frankreich, bearbeitete in seinem Werke: „Traité de l'architecture, 1576" zuerst die Aufgaben des Steinschnittes schriftstellerisch. [2]) Ihm folgten Mathurin Jousse: „Secrets de l'architecture, 1642" und P. Derand in seinem Werke: „l'Architecture des voûtes ou l'art des traits et coupes des voûtes, 1643", welche beide den Steinschnitt mittelst

[1]) Zu erwähnen wäre noch Brook Taylors Perspective „New principles of linear perspective", welche 1715 in London erschien und mehrfache Übersetzungen erfuhr.

Anm.: In diesem Jahrhundert fand die freie Perspective ihre weitere Ausbildung durch Cousinery (Géométrie perspective, Paris 1828), Adhémar (Traité de perspective, linéaire, Paris 1838), de la Gournerie (Traité de perspective linéaire, Paris 1859), Schreiber, (Malerische Perspective, Karlsruhe 1854), Hauck, (Die subjective Perspective, Stuttgart 1879), sowie durch mehrere hervorragende österreichische Gelehrte, wie Tilscher, (System der technisch-malerischen Perspective, Prag 1867), Peschka und Koutny (Freie Perspective, Hannover 1868), Pelz (Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1877 und 1878) etc.

[2]) S.: „Sur l'origine et le développement de la géométrie descriptive." Chasles, Aperçu historique, Bruxelles 1837 (seconde édition Paris 1875) pag. 355 deutsche Ausgabe von Sohncke, Halle 1839, pag. 376.

graphischer Methoden behandelten. In theoretischer Hinsicht besonders hervorragend, wenn auch weniger praktisch war das Verfahren von Desargues, welches Bosse in dem Werke: „La practique du trait à preuves de Mr. Desargues, Lyonois, pour la coupe des pierres en l'architecture, par A. Bosse, Paris 1648", veröffentlichte. Dieses Verfahren beruht auf einer allgemeinen Veränderung der Projectionsebene und ist von Bosse ebenso weitschweifig, wie schwer verständlich mitgetheilt.

Das größte Verdienst vor Monge hat sich um die Vervollkommnung der Methode der darstellenden Geometrie der Ingenieur und Stabsofficier des französischen Geniecorps Frézier (1682—1773) durch sein Werk: „La théorie et la practique de la coupe des pierres et des bois, ou Traité de Stéréotomie, Strasbourg 1738 et 1739" erworben.

Frézier[1]) war der erste, welcher in seinem Werke die Theorie von der Praxis trennte, der ersteren den ganzen ersten Band desselben widmete und seinen Erörterungen überall Beweise hinzufügte. Er bediente sich zweier Projectionsebenen und projicierte hauptsächlich orthogonal. Sein Werk umfasst die ebenen krummen Linien, die krummen Flächen, die er dem Steinschnitte gemäß durch Bewegung seiner erzeugenden Linie entstehen lässt. Von den krummen Flächen behandelt er den Cylinder, den Kegel, die Kugel, das Sphäroid, einige Rotationsflächen zweiter Ordnung; ferner das dreiachsige Ellipsoid, verschiedene Ring- und Schraubenflächen und vier Arten von windschiefen Flächen. Frézier construierte Raumcurven vierter Ordnung, welche er durch den Schnitt von Flächen zweiter Ordnung erhielt. Sodann behandelte er Netze oder Abwickelungen (développements) von Polyëdern und krummen Flächen. Auch einige Aufgaben über das Dreikant finden wir in dem Werke dieses verdienstvollen Geometers, welcher aus der Kunst des Steinschnittes schon eine ziemlich weitgehende Theorie der Darstellung entwickelt hatte.

Doch blieb es erst der Geisteskraft eines Monge vorbehalten, aus der Stereotomie, die bis dahin aus einem Chaos von mehr oder weniger verwickelten Aufgaben bestand, die descriptive Geometrie als einen auf mathematischer Grundlage aufgebauten Wissenszweig zu schaffen. Monge zeigte, dass die graphischen Auflösungen der zahllosen Aufgaben aus der Geometrie dreier Dimensionen sich auf eine kleine Zahl von Grundsätzen stützen, die er seinen Zöglingen an der École

[1]) S.: Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig 1884, pag. 23.

normale und später an der École polytechnique mit bewundernswerter Klarheit auseinandersetzte. [1])

Wie leicht erklärlich, befand sich in jener Zeit die Ausführung von militärischen und öffentlichen Bauten in den Händen des französischen Genie-, Artillerie- und Ingenieur-Corps. Der Unterricht für das Geniewesen concentrierte sich in der berühmten Anstalt zu Mézières, welche unter dem Minister d'Argenson im Jahre 1748 errichtet worden war und 1794 nach Metz verlegt wurde. Das Artilleriecorps erhielt seine Ausbildung in der Militärschule zu La Fère, welche 1756 gegründet und im Jahre 1772 nach Bapaume und hierauf nach Chalons sur Marne verlegt wurde. Die Brücken- und Strassen-Ingenieure genossen ihre wissenschaftliche Ausbildung in der unter dem Ministerium Trudaine zu Paris im Jahre 1747 gegründeten École des ponts et chaussées.

Bis zu jenem Zeitpunkte, wo die französische Revolution mit eiserner Hand viele Vorurtheile gebrochen hatte, blieben die Wissenschaften, welche an der Genieschule zum Vortrage gelangten, mit dem dichten Schleier des Empirismus verhüllt, der einer ebenso schönen als weisen Institution, wie es die Errichtung dieser Schule war, nicht würdig war. Es bestand damals zwischen dem Genie-, Artillerie und Ingenieur-Corps bezüglich der wissenschaftlichen Ausbildung und der Ausführung von öffentlichen Bauten eine außergewöhnliche Rivalität, welche nicht zu selten in eine förmliche Eifersucht ausartete. Das Geniecorps besaß ein vollständigeres und mehr auf wissenschaftlicher Grundlage basierendes System von Instructionen. Es nahm an allen Fortschritten in den Wissenschaften regen Antheil und bemühte sich diesen Schatz von Kenntnissen mit der größten Sorgfalt zu hüten. Der Stolz dieser berühmten Militär-Ingenieurschule von Mézières auf ihre Leistungen brachte es mit sich, dass den Genieofficieren verboten war, den Inhalt der an dieser Schule gehaltenen Vorlesungen der Artillerie des eigenen Landes mitzutheilen. [2])

Die descriptive Geometrie, auf die Anwendung der orthogonalen Projectionen gegründet, war nicht allein das Mittel, eine Menge auf die Bauwissenschaften bezüglicher Aufgaben strenge zu lösen, sie bildete auch eine sehr geeignete Methode zur Entdeckung von wichtigen und verborgenen Eigenschaften der begrenzten Räume.

Dieser Gesichtspunkt war für die Schule von Mézières von vorwiegendem Interesse, und sie setzte ihren ganzen Stolz darein, in ihrem

---

[1]) Vergl.: Jules de la Gournerie, Traité de Géométrie descriptive. Iᵉ Partie Paris 1860. Avant-Propos, pag. V—IX et IIᵉ Partie. Paris 1862, pag. IX.

[2]) S.: Dupin, Essai historique. Paris 1819, pag. 15.

Schoße eine mathematische Disciplin von so umfassender Wichtigkeit geschaffen zu haben. Die Oberleitung dieser Anstalt war auch der Ansicht, man dürfe dem Auslande keinen Vorschub bei der Erlangung von Kenntnissen in der militärischen Baukunst leisten. Wenn mit der neuen Methode ein Festungswerk schneller und mit einem geringeren Kostenaufwande ausgeführt werden könne, so müssen diese Vortheile geistiges Eigenthum der französischen Baumeister und vor allem der Militär-Ingenieure bleiben und so lange als möglich als Staatsgeheimnis Frankreichs gewahrt bleiben. Man konnte sich also nicht entschliessen, die neue Wissenschaft aus dem engeren Kreise der Schule von Mézières heraustreten zu lassen. [1])

Dies waren die theils einem patriotischen, theils einem engherzigen Geiste entsprossenen Betrachtungen, auf welche gestützt, das damals mächtige Geniecorps Monge den Befehl ertheilte, von seinen Resultaten in der descriptiven Geometrie nie — weder mündlich, noch schriftlich — etwas öffentlich bekannt zu machen. Während seiner achtzehnjährigen Lehrthätigkeit (1765—1783) in Mézières war es also Monge nicht gestattet, seinen Zöglingen — den angehenden französischen Genieofficieren — die Anwendung seiner descriptiven Geometrie auf das Defilieren und Profilieren der Festungswerke, sowie auf das Entwerfen von Hochbauten, Brückenprojecten etc. zu lehren. [2])

Nur den Schülern der Gipsschule, welche später als militärische Bau- und Zimmermeister verwendet wurden, und welche auf die Entwickelung der Industrie in der Umgebung von Mézières den günstigen Einfluss nahmen, durfte Monge in seinen Vorträgen über Stereotomie die Anwendung und die Vortheile seiner Geometrie auf den Steinschnitt — dessen Methoden durch die neue Wissenschaft wesentlich vereinfacht wurden — zeigen.

Als im Jahre 1768 der Examinator für die Zöglinge des Geniecorps der Geodät Camus gestorben war, trat der Professor der Mathematik, Bossut an dessen Stelle. Monge, der im 22. Lebensjahre stand, erhielt statt des Postens eines Repetitors die Professur für Mathematik und 1771, drei Jahre später, nach dem Tode des Abbé Nollet, jene der Physik. Sein Eifer und seine große Mittheilungsgabe ermöglichten es Monge beide Professuren in trefflichster Weise auszufüllen.

Hier an der Genieschule zu Mézières war es, wo Monges hauptsächlichsten Arbeiten über die Erzeugung der krummen Flächen, sowie über die descriptive Geometrie entstanden sind. An dieser Schule

---

[1]) S.: François Arago, Oeuvres complètes. Paris 1854, tome II, pag. 441.
[2]) S.: Dupin, Essai historique, pag. 14.

sind während der fünfzehnjährigen Professur Monges mehrere der hervorragendsten französischen Geometer wie Meusnier, Tinseau, Carnot etc. herangebildet worden. So trat Carnot, der Begründer der Phoronomie oder Kinematik, [1]) der Verfasser der beiden hervorragenden geometrischen Werke „La géométrie de position, Paris 1803" und „La théorie des transversales, Paris 1806" als Secondelieutenant in die Genieschule zu Mézières ein, wo Monge sein Lehrer war. Carnot, der sich später beim Ausbruch der Revolution als Ingenieur-Capitän ausgezeichnet hatte und zum Mitglied des Directoriums, dann zum Kriegsminister gewählt wurde, war nur sieben Jahre jünger als Monge.

War auch Monge während seiner achtzehnjährigen Lehrthätigkeit an der Genieschule zu Mézières von der Oberleitung dieser Anstalt zum absoluten Stillschweigen über descriptive Geometrie verurtheilt, so blieben seine geometrischen Forschungen deshalb für die Wissenschaft nicht ganz verloren, da es ihm gestattet wurde, seine geometrischen Untersuchungen, behandelt mit der transcendenten Analysis, wenigstens der Gelehrtenwelt bekannt zu geben.

Die ersten wissenschaftlichen Abhandlungen, die sich auf die Untersuchungen der Gleichungen der Oberflächen beziehen, welche durch die Art ihrer Erzeugung bestimmt sind, veröffentlichte Monge in den Denkschriften der Turiner Akademie der Wissenschaften aus den Jahren 1770 und 1773. Es sind dies: „Mémoire sur la détermination des fontions arbitraires dans les intégrales de quelques équations aux différences partielles" und „Second mémoire sur le calcul intégral de quelques équations aux différences partielles." (Mémoires de l'Académie des sciences de Turin, volume publié pour les années 1770 et 1773, pag. 16 et 79). Diesen beiden Abhandlungen folgte in denselben Denkschriften das Memoire: „Sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes" (volume publié pour les années 1784 et 1785).

Ferner veröffentlichte Monge in den Savans étrangers de l'Académie des sciences de Paris in den Jahren 1771—74 nachstehende Abhandlungen: „Mémoire sur la construction des functions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles", (tome VII., année 1773, pag. 267); „Mémoire sur la détermination des fonctions aux différences partielles." (ibid. pag. 305); „Mé-

[1]) S.: A. Heller, Geschichte der Physik. Stuttgart 1884, II. Bd., pag. 599—601.

moire sur les fonctions arbitraires, continues ou discontinues, qui entrent dans les intégrales des équations aux différences finies," (tome IX., pag. 345; présenté le 20 août 1774) und „Mémoire sur les développées des rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure," (tome X., pag. 511 présenté à l'Académie en 1771).

Diese wissenschaftlichen Forschungen sind es, durch welche Monge zum Begründer der neueren analytischen Geometrie wurde. Aufgrund dieser für die Flächentheorie so wichtigen Arbeiten wurde Monge als Mitglied in die altehrwürdige, von Richelieu schon im Jahre 1635 gegründete Akademie der Wissenschaften zu Paris aufgenommen.

Durch diese akademische Auszeichnung trat Monge in den Kreis jener Gelehrten ein, der aus d'Alembert, Lagrange, Laplace etc. gebildet war, und dem es Frankreich in erster Linie zu verdanken hatte, dass nach dem Tode des großen deutschen Mathematikers Euler das Principat der Mathematik in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhundertes auf Frankreich übergieng. [1]) Erst den genialen, deutschen Mathematikern dieses Jahrhundertes Jacobi, Dirichlet, Steiner, Möbius, von Staudt, Plücker etc. gelang es nach den ersten drei Decennien dieses Jahrhundertes in den mathematischen Wissenschaften wieder an die Spitze aller Culturnationen zu treten.

Um den hohen wissenschaftlichen Wert der Arbeiten Monges, über welche der größte und scharfsinnigste Mathematiker Frankreichs, Lagrange, [2]) mit folgenden — vielleicht auch einen leisen Zug von

---

[1]) S.: Dr. H. Hankel, „Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten". Vortrag, beim Eintritt in den akademischen Senat der Universität Tübingen am 29. April 1869. (I. Auflage, Tübingen 1869, II. Aufl. 1885, pag. 21.) — S. a.: F J. Obenrauch, Zur Transformation und Reduction von Doppelintegralen mittelst elliptischer Coordinaten. Neutitschein 1892, pag. 10.

[2]) Josef Louis Lagrange, wurde am 25. Jänner 1736 zu Turin als Sohn eines französischen Kriegsschatzmeisters geboren. Er absolvierte daselbst seine Universitätsstudien und wurde im Alter von siebzehn Jahren zum Professor der Mathematik an der Turiner Artillerieschule ernannt. Im Alter von 23 Jahren wurde Lagrange als Mitglied in die Berliner Akademie der Wissenschaften aufgenommen, und von Friedrich dem Großen im Jahre 1766 an Eulers Stelle zum Präsidenten dieser Akademie berufen. Im Jahre 1787 gieng Lagrange wieder nach Paris, wo er, als der geistvollste Mathematiker Frankreichs vielfach bewundert, nach einer glänzenden Lehrthätigkeit an der École polytechnique am 10. April 1813 starb. (S.: „Éloge de J. L. Lagrange par Delambre", Mémoire de l'institut pour 1812 und Journal de l'Empire du 28. avril 1813. — Ferner: Suter, Geschichte der math. Wissenschaften II. Bd., pag. 217 und Heller, Geschichte der Physik. II. Bd., pag. 414—427.)

Eifersucht enthaltenden Worten sein Urtheil fällte: „Avec son application de l'analyse à la représentation des surfaces ce diable d'homme sera immortel" zu würdigen, ist es nothwendig, dass wir uns die Entwickelungsstufe und die Methoden vergegenwärtigen, welche die Mathematik vor Monge inne hatte.

Werfen wir zu diesem Zwecke wenigstens einen flüchtigen Rückblick auf die Entwicklung der Geometrie, so treten uns in dem, fast zweitausend fünfhundert Jahre umfassenden und historisch erforschten Zeitraume von Thales (640—584) vor Chr.) bis Monge zwei gewaltige, Jahrhunderte beherrschende Schöpfungsperioden der Geometrie entgegen.

Die erste Periode umfasst die Begründung und Entwickelung der synthetischen Geometrie durch die Geistesheroen des Alterthums Pythagoras (580—500 vor Chr.), Euklid (um 300), Archimedes (287—212), Apollonius (um 240) etc., welche Meisterwerke von so vollendetem und geschlossenem Bau schufen, dass durch Jahrhunderte hindurch die Mathematiker an diesem schönen und mächtigen Bau nicht einen Stein zu rütteln wagten. [1])

Ein kolossaler Zeitraum von nahezu tausend Jahren trennt diese wertvollen Forschungen der Geometer des Alterthums von jenen der Neuzeit. Gewaltige Ereignisse und sociale Erschütterungen hatten zur Folge, dass in der Entwickelung der Wissenschaften ein bedauerlicher Stillstand eintrat.

Die Eroberung von Alexandrien, der alten Metropole griechischer Bildung, und das Niederbrennen der berühmten Musealbibliothek „Brucheion" — in welcher in mehr als 400.000 Bänden die Schätze der Wissenschaften des Alterthums und der Bildung von zehn Jahrhunderten aufbewahrt lagen — durch den Chalifen Omar (640 nach Chr.) — die Völkerwanderungen, der Einbruch der Mongolen in Europa, sowie andere sociale Einflüsse schlossen eine freie geistige Entwickelung der Menschheit in den folgenden Jahrhunderten aus. In dieser Zwischenzeit erwarben sich die Araber, fast zweihundert Jahre nach der Zerstörung Alexandriens, durch Errichtung der Gelehrtenschulen zu Bagdad, Damaskus, Cordova um die Pflege der Wissenschaften namhafte Verdienste und brachten insbesondere die Astronomie, Trigonometrie, Algebra und Optik auf eine hohe Entwickelungsstufe.

---

[1]) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I. Bd., 2. Auflage. Leipzig 1894 und Euklid und sein Jahrhundert. Leipzig 1867. — Gino Loria, Le Szienze esatte nell'antica Grecia. Libro I. „I Geometri greci precursori di Euclide". Modena 1893. Libro II. Il periodo aureo della Geometria greca. Modena 1895. (Dalle Memoire della R. Accademia di Szienze, Lettere ed Arti di Modena. Vol. XI. Serie II.)

Erst um die Mitte des 15. Jahrhundertes, nach der Renaissance der Wissenschaften, fand auch die Geometrie wieder Berücksichtigung. Ihre Fortschritte waren anfangs langsam, aber nichtsdestoweniger nahmen sie bald einen allgemeinen und abstracten Charakter an, den sie bis dahin nie gehabt hatten.

Die wichtigsten Entdeckungen bei dem Wiederaufleben der Geometrie machten der französische Mathematiker François Viète (lat. Franciscus Vieta, 1540—1603) und der unsterbliche deutsche Astronom Johannes Kepler (1571—1630). Vieta verdanken wir die ersten Anwendungen der besonders durch die Italiener im 15. und 16. Jahrhundert (Luca Paciuolo, Cardan, Tartaglia, Scipio Ferreo etc.) ausgebildeten Algebra auf die Geometrie, die den ersten Keim zur ersten Entwickelung der analytischen Geometrie des Descartes bilden, während Kepler durch Einführung des Unendlichen in die Geometrie nach Archimed den zweiten Schritt zur Begründung der Infinitesimalrechnung that.

Die zweite Entwickelungsperiode der Geometrie umfasst die Begründung der analytischen Geometrie und die Erfindung der Infinitesimal- und Variationsrechnung im 17., beziehungsweise 18. Jahrhundert.

Die analytische Geometrie in der Ebene wurde durch den großen französischen Philosophen René Descartes [1]) (1637), jene im Raume durch die französischen Mathematiker Parent [2]) (1700) und

[1]) René Descartes (lat. Renatus Cartesius), geb. am 31. März 1596 zu Haye en Tourraine, verbrachte den größten Theil seiner Lebenszeit außerhalb Frankreichs, weil dessen Boden für seine großen reformatorischen Ideen nicht günstig war. Er lebte als Privatmann zuerst in Holland, wo seine meisten mathematisch-philosophischen Werke erschienen. Später (1649) wurde Descartes von der Königin Christine von Schweden an ihren Hof als Lehrer für Philosophie berufen. Der Philosoph Descartes war der bedeutendste Reformator in der französischen Unterrichtspolitik des 17. Jahrhundertes, da er zuerst den Plan fasste, das Gewerbe durch die Schule zu veredeln: „Les mathématiques ont des inventions très-subtiles, et qui peuvent beaucoup servir tant à contenter les curieux qu' à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes." (Descartes, Discours de la Méthode). Er starb in Stockholm am 11. Februar des Jahres 1650. Seine „Géométrie" erschien zu Leyden im Jahre 1637. Die grundlegende Idee für die Coordinaten-Methode des Descartes gab François Viète (Franciscus Vieta), der größte französische Mathematiker des 16. Jahrhundertes, in seinem Werke „Effectionum geometricarum, etc. 1593", indem er die Gleichungen des zweiten und dritten Grades graphisch construierte. (S.: Cantor, Vorlesungen, II. B., pag. 536). S.: Suter, II. Bd., pag. 16; Chasles-Sohncke, pag. 91; Heller, II. Bd., pag. 26.

[2]) Parent war der erste Mathematiker, welcher im Jahre 1700 der Pariser Akademie der Wissenschaften vorgelegten Memoire eine krumme Oberfläche durch eine Gleichung zwischen drei Variabeln darstellte. (S.: Chasles-Sohncke, pag 134.)

Clairaut[1]) (1731) begründet. Von jetzt ab nahm die Entwickelung der Geometrie einen rapiden Flug, und ihre Fortschritte erstreckten sich auf alle anderen Wissenschaften, welche mit ihr in Verbindung stehen. Insbesondere waren es die Niederländer, welche die analytische Geometrie des Descartes sogleich nach ihrem Erscheinen mit klarem Geiste erfasst und weiter ausgebildet haben. Gelehrte, wie van Schooten, Huygens, van Heuraet, Sluse und Hudde werden auch in der Zukunft ausgezeichnete Stellen in der Geschichte der Mathematik einnehmen.

Durch die Erfindung der Differentialrechnung durch Newton[2])

---

[1]) Aber erst Clairaut hat in dem jugendlichen Alter von 16 Jahren in seinem berühmten „Traité des courbes à double courbure, Paris 1731" die Lehre von den räumlichen Coordinaten auf krumme Oberflächen und auf Curven doppelter Krümmung angewendet.

[2]) Isaak Newton, der genialste englische Mathematiker und Physiker, wurde am 25. December (a. St.) 1642 (5. Jänner 1643) zu Woolsthorpe in Lincolnshire als der Sohn eines über bescheidene Mittel verfügenden Gutsbesitzers geboren. Der Vater starb noch vor der Geburt seines einzigen Kindes. Newton studierte an der Universität zu Cambridge und wurde 1669 an Stelle Barrows zum Professor der Mathematik ernannt, welchen Posten er 1699 mit der besoldeten Stelle eines königl. Münzmeisters vertauschte. Seit 1703 war Newton Präsident der Royal Society. Er starb am 20. März 1727. (S.: Suter, II. Theil, pag. 54, und Heller, II. Theil, pag. 253—301).

Anm.: Die zweite Anregung zur Begründung der Infinitesimalrechnung gab nach Archimedes der in Österreich (Graz, Prag und Linz) lebende deutsche Astronom Johannes Kepler, welcher in seinem Werke „Nova Stereometria Doliorum Vinariorum, Lincii 1615" den Begriff des Unendlichen in die Geometrie einführte. Dieser berühmte Astronom wurde am 27. December 1571 zu Magstatt in Württemberg, als der Sohn des dortigen Bürgermeisters geboren, besuchte 1589—1591 die artistische Facultät an der Universität in Tübingen und erhielt 1593 die Professur am ständischen Gymnasium zu Graz, mit welcher ein Jahresgehalt von 150 fl. verbunden war. Im Jahre 1600 wurde er Gehilfe des Astronomen Tycho Brahe in Prag und 1601, nach dessen Tode, Hofastronom und kais. Mathematicus. Als solcher sollte er einen Jahresgehalt von 1500 fl. beziehen. Die eilf Jahre (1601—12), welche Kepler in Prag zubrachte, bilden die Zeit der Glanzepoche seiner wissenschaftlichen Thätigkeit. Die unregelmäßige Auszahlung seines Gehaltes veranlasste Kepler im Jahre 1612 die Professur für Mathematik am Gymnasium in Linz mit dem Jahresgehalte von 400 fl. anzunehmen, wo er bis 1627 wirkte. Er starb in Regensburg am 15. November 1630. Kepler erfand einhundert und fünfzig Jahre vor Monge eine schöne Projectionsmethode, welche er dazu anwendete, um durch eine graphische Construction die Erscheinungen der Sonnenfinsternisse für die Bewohner der verschiedenen Punkte auf der Erde zu bestimmen. Dieses Projectionsverfahren — von welchem die Astronomen und Geometer Cassini, Flamsteed Wren und Halley hübsche Anwendungen machten, und welches Lagrange in einem Memoire in den Jahrbüchern der Berliner Akademie vom Jahre 1781 (gelesen schon 1778)

(A method of fluxions, London 1671) und Leibniz [1]) (Acta eruditorum, Lipsiae, ann. 1684) erhielten die Probleme der analytischen Geometrie und insbesondere der Curventheorie neue, überaus interessante Anziehungspunkte. Einer stattlichen Reihe von hervorragendsten Mathematikern des 18. Jahrhundertes verdanken wir die schönsten Resultate auf dem Gebiete der analytischen Geometrie.

Auf die höchste Stufe ihrer Entwickelung wurde jedoch die analythische Curventheorie bis zur Begründung der descriptiven Geometrie durch die Erfindung der Integralrechnung durch Johann Bernoulli [2]) (Lectiones mathematicae de methodo integra-

---

erweitert und hievon in seiner „Mécanique analytique, Paris 1788" geistreiche Anwendungen gemacht hatte — veröffentlichte der berühmte Astronom in seinem Werke „Harmonicae mundi, Lincii 1619". Dieses Werk enthält auch das berühmte dritte Keplersche Gesetz. Die beiden ersten Gesetze sind bekanntlich in der „Astronomia nova, Prag 1609" enthalten S.: Opera Kepleri, edit. Frisch, Stuttgart 1858 bis 1871. — Heller, Geschichte der Physik, I. Bd., pag. 281—306. — Cantor, Vorlesungen, II. Bd., pag. 749, etc.

[1]) Gottfried Wilhelm v. Leibniz, wurde am 21. Juni 1646 in Leipzig als Sohn eines Actuarius der dortigen Universität geboren, studierte daselbst Jurisprudenz und Philosophie. Im Jahre 1672 wurde er in Paris mit den hervorragendsten Mathematikern jener Zeit bekannt und widmete sich als Bibliothekar und Historiograph des Herzogs von Hannover mit großer Vorliebe mathematischen Studien. Als unter Friedrich I. von Preussen im Jahre 1700 die Akademie der Wissenschaften in Berlin begründet wurde, war Leibniz ihr erster Präsident. Leibniz starb am 14. November 1716 zu Hannover.

Anm.: Newton dürfte seinen berühmten Algorithmus schon im Jahre 1665 entdeckt haben, behielt aber — gemäß der Denkrichtung jener Zeit — seine Methode der Fluxionen für sich, so dass Leibniz 1675 (Jahreszahl des Manuscriptes) denselben Calcul selbständig noch einmal erfinden konnte, den er in den Actis erud. Lipsiae vom Jahre 1684 veröffentlichte. Die Methode der Fluxionenrechnung von Newton erschien erst nach seinem Tode in der Abhandlung „Artis analyticae specimina vel geometria analytica, 1736" unter dem Titel „Doctrina fluxionum" im Druck. Nur langsam verbreitete sich die Differentialrechnung, noch 1691 war sie in Frankreich ganz unbekannt und nur drei Gelehrten auf dem Continente, Leibniz, Jakob und Johann Bernoulli, geläufig. (S.: Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaften, II. Bd., pag. 82 und 124. — Heller, Geschichte der Physik, II. Bd., pag. 215 und 281. — M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig 1894, III. Bd., I. Abth., S. 150—200 und 200—251. — C. J. Gerhardt, „Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz." Halle 1848 und „Die Entdeckung der höheren Analysis." Halle 1855.

[2]) Johann Bernoulli, gehörte jener berühmten Schweizer Kaufmannsfamilie an, welcher im 17. und 18. Jahrhundert acht der bedeutendsten Mathematikern entstammten. Sein älterer Bruder Jakob Bernoulli (1654—1705) war Professor der Mathematik an der Universität zu Basel; Johann Bernoulli, Professor der Mathematik zu Gröningen, später zu Basel, berühmt als der Begründer der Integral-

lium, 1692), und durch die Begründung der Variationsrechnung durch Jakob Bernoulli (Acta eruditorum Lipsiae, ann. 1697), aber in erster Linie durch die beiden Geistesheroen des vorigen Jahrhundertes Lagrange („Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies". Mélanges de la Société de Turin, tome II., 1760 et 1761) und Euler, (Elementa calculi variationum, 1766) gebracht.

In den Anfang der zweiten Entwickelungsperiode fällt auch die Begründung der neueren Geometrie durch Desargues[1]) (1639), Pascal[2]) (1640) und de la Hire[3]) (1685), welche jedoch — wenn wir von le Poivre[4]) absehen — durch fast zwei Jahrhunderte von den die analytische Geometrie und die Infinitesimalrechnung pflegenden Mathematikern vernachlässigt, erst wieder in diesem Jahrhunderte durch Carnot[5]) (1803), Brianchon[6]) (1806), Gergonne[7]) (1810 und 1826), Poncelet[8]) (1822 und 1829), Möbius[9]) (1827), Plücker[10]) (1828) und insbesondere durch den genialsten Geometer Deutschlands Jakob Steiner[11]) auf die höchste Stufe ihrer Entwickelung gebracht wurde.

---

rechnung, war de l'Hôpitals und Eulers Lehrer in Mathematik. Er wurde am 27. Juli 1667 a. St. in Basel geboren und starb am 1. Jänner 1748. Sein Sohn Daniel Bernoulli war Akademiker in Petersburg, später Professor der Physik in Basel. (Suter, II., pag. 120; Heller, II., pag. 379.)

[1]) Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan. 1639.

[2]) Essai pour les coniques. 1640.

[3]) Sectiones conicae. Paris 1685.

[4]) Traité des sections du cylindre et du cône. 1704.

[5]) Géométrie de position. Paris 1803. Théorie des transversales. Paris 1806. S. a.: Lazare Nicolas Marguerite Carnot, sein Leben und seine Werke. Nach den Quellen dargestellt von Dr. K. Fink. Tübingen 1894.

[6]) Mémoire sur les surfaces courbes du second degré. (Journal de l'École polytechnique. Cah. XIII. 1806, pag. 297.)

[7]) Des polaires réciproques. (Annales des Mathématiques. T. I. 1810, etc.) Principe de dualité. (Annales des Mathématiques. T. XVI., pag. 209, T. XVII., pag. 265 et T. XVIII., pag. 125, 1825—1827.)

[8]) Traité des propriétés projectives des figures. Paris 1822. Théorie générale des polaires réciproques. (Crelles Journal, Bd. IV, pag. 1—71, 1829.)

[9]) Der barycentrische Calcul. Leipzig 1827.

[10]) Analylitisch-geometrische Entwickelungen. Essen 1821—1831, und Theorie der algebraischen Curven. Bonn 1839.

[11]) „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832", und „Die geometrischen Constructionen. Berlin 1833".

In diesen beiden großen Entwickelungsperioden der Geometrie war es ganz besonders die Theorie der Curven, welche das Interesse der Mathematiker vielfach in Anspruch nahm.

Schon den Geometern des Alterthums verdanken wir neben gründlichen Betrachtungen der Kugel, des Kegels und Cylinders, ferner der regelmäßigen Körper, der Pyramiden und Prismen eine stattliche Reihe von sehr schätzenswerten Untersuchungen in der Lehre von den Curven und ihrer Umdrehungsflächen. Plato (429—348 vor Chr.) führte die Kegelschnitte und die Lehre von den geometrischen Orten in die Geometrie ein. Hippokrates von Chyos (um 450 vor Chr.) quadrierte seine lunulae, Archytas von Tarent construierte die erste Raumcurve, die er durch den Schnitt eines geraden Kreiscylinders mit einem rotierenden Halbkreise erhielt; Hippias von Elis (um 420) erfand zur Trisection des Winkels die Quadratrix, welche Dinostratus zur Quadratur und Rectification des Kreisquadranten benützte. Euklid (um 300 vor Chr.) behandelte im dritten seiner dreizehn Bücher die Berührung zweier Kreise und Perseus (etwa 200 vor Chr.) entdeckte die Spiren und Schneckenlinien. Von hohem wissenschaftlichen Werte und großem Einfluss auf die Entwickelung der Mathematik waren die näherungsweise Rectification der Kreislinie und die genaue Quadratur der Parabel und der Spirale, sowie die Tangentenconstruction an letztere Curve durch Archimedes (287—212) im dritten Jahrhunderte vor Chr. Archimedes fand den Ausdruck für die Kugeloberfläche und ihre Calotten, verglich die Oberfläche der Kugel mit jener des ihr umschriebenen Cylinders und construierte in seinem Buche von den Conoiden und Sphäroiden die Rotationskörper der Kegelschnitte, deren Rauminhalt er nach seiner Exhaustionsmethode bestimmte.

Apollonius von Pergä (um 200 vor Chr.) verdanken wir das für jene Zeit großartige, aus acht Büchern bestehende Werk über die Kegelschnitte; dem Nikomedes (um 150 vor Chr.) die Erfindung der Conchoide oder Muschellinie, von welcher Vieta in der Theorie

---

S.: Jakob Steiners Abhandlungen auf dem Gebiete der neueren Geometrie in Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. I—LV (1826—1858), bezw. dessen Nachlass in Bd. LXVI (1866) und Bd. LXVIII (1868); sowie Jakob Steiners gesammelte Werke, herausgegeben auf Veranlassung der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften von K. Weierstrass, I. und II. Bd., Berlin 1881 und 1882. S.: ferner C. W. Borchardts Journal, Bd. LXII (1863), pag. 199. — J. C. Poggendorff: Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Berlin 1863, II. Bd., pag. 994—95, und Allgemeine Deutsche Biographie, auf Veranlassung des Königs von Baiern herausgegeben durch die historische Commission bei der königl. Akademie der Wissenschaften, 35. Bd. Leipzig 1893, pag. 700—703.)

der Gleichungen eine interessante Anwendung machte, und welche Curve Newton in seiner Arithmetica universalis zur Construction aller Gleichungen vom dritten Grade benützte.

Diokles ist der Erfinder der Cissoide oder Epheulinie, welche er bei der Bestimmung der beiden mittleren Proportionalen gefunden hatte. Schließlich müssen wir noch dreier Gelehrten gedenken, welche auf die Entwickelung der Wissenschaften einen hervorragenden Einfluss genommen hatten. Es sind dies die beiden großen Astronomen Hipparch und Ptolomäus und der Commentator Pappus, welche wir als die drei darstellenden Geometer des Alterthums bezeichnen können.

Hipparch, der zwischen 161 und 126 vor Chr. astronomische Beobachtungen anstellte, und Ptolomäus, dessen Wirksamkeit zwischen 125 und 151 nach Chr. fällt, sind die Erfinder und Begründer eines Projectionsverfahrens, welchem Aiguillon im Jahre 1613 den Namen der stereographischen Projectionsmethode gab. [1])

Pappus[2]) (etwa 250 nach Chr.) entwickelte in seinen Collectiones mathematicae stereometrische Lehrsätze, welche unsere vollste Bewunderung in Anspruch nehmen. Er war es, der im IV. Buche (Satz 30) seiner mathematischen Sammlungen die sphärische Spirale auf der Kugel construierte nnd die von ihr begrenzte Fläche bestimmte, also die erste Complanation einer krummen Fläche ausführte, und im VII. Buche die

---

[1]) Anm.: Die stereographische Projection ist eine Kegelprojection, als deren Erfinder Hipparch und Ptolemäus bezeichnet werden. Sie wurde im Jahre 1554 von Gerhard Mercator (Kremer, geb. 5. März 1512 zu Rupelmonde in Flandern, gest. 2. Dec. 1594 in Duisburg), dem bedeutendsten Geographen des 16. Jahrhunderts, später (1745) auch von de l'Isle dadurch verbessert, dass nicht der mittlere Parallelkreis, sondern zwei mittlere Parallelkreise zur Auftragung der Längengrade benützt wurden.

Vergl. die Projectionsmethoden von: Sanson (1650), Flamsteed (1729), Bonne (1752) und Murdoch (1758); ferner jene von: Apian (1524), Nicolsi (1660), Paradies (1674), de la Hire (1704) Lambert (1772), Reichard (1803), Mollweide (1805), James (1857), Babinet (1857), August (1874), etc.

S. a.: E. Reusch, Die stereographische Projection 1881. — H. Gretschel, Lehrbuch der Kartenprojection. Weimar 1873 und „Die stereographische Projection" in Dr. G. Peschkas „Darstellende und projective Geometrie," Wien 1884. III. Bd., S. 782 und in Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig 1887, II. Bd., S. 273. — S. a.: Dr. W. Fiedler, Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln. Leipzig 1882. S. 242 und S. 250. (Die stereographische Projection.)

[2]) S.: Pappi Alexandrini mathematicae collectiones, a Frederico Commandino latinum conversae, et commentariis illustratae. Pisanii 1588 und Bononiae 1660.

im siebzehnten Jahrhundert wiedererfundene Guldin sche Regel [1]) zuerst erfand. Genial sind seine Constructionen der windschiefen Schraubenfläche, die Bestimmung und Projection ihrer Schnitte. Pappus construiert nämlich im 28. Satze seines IV. Buches die Schraubenfläche aus der Schraubenlinie, indem er von den Punkten derselben auf die Achse des geraden Kreiscylinders Perpendikel fällt; er bestimmt im 29. Satze die windschiefe Fläche (Plectoide), indem er einen geraden Cylinder, dessen Basis eine Archimedische Spirale ist, durch einen geraden Kreiskegel, dessen Achse die erste Erzeugende des Spiralencylinders ist, schneidet, und aus den Punkten dieser doppelt gekrümmten Curve Perpendikel auf die erste Erzeugende des Cylinders fällt. Nun legt Pappus durch eine Erzeugende der windschiefen Schraubenfläche unter passender Neigung eine Ebene, bestimmt den Schnitt derselben mit der Schraubenfläche, errichtet ferner von den Punkten der Schnittcurve Perpendikel auf die Basisebene des Kreis- oder Spiralencylinders und zeigt schließlich, dass der geometrische Ort der Fußpunkte der errichteten Perpendikel — also die orthogonale Projection der Schnittcurve — eine Quadratrix des Dinostratus ist. (S.: Chasles, Aperçu historique, pag. 30—31.)

Die Curventheorie und die mit ihr genetisch verwandte Theorie der Rotationsflächen waren es aber hauptsächlich, welchen bis zur Mitte des 18. Jahrhundertes die Mathematiker eine ganze besondere Pflege widmeten. Insbesondere waren es aber die Probleme der Tangenten und Normalen, der Quadratur und Rectification, der Cubatur und Complanation und in der Folge die Probleme der isochronen oder tautochronen und brachystochronen Curven, welche die größten Mathematiker des 17. und 18. Jahrhundertes vielfach beschäftigten.

So untersuchte der Portugiese Pedro Nunez (lat. Nonius), Professor der Mathematik an der Universität zu Coimbra in seinem Werke: „De arte atque ratione navigandi, Coimbricae 1546“ die „Rhumbs“ (Schiffslinie oder Schiffsbahn), welcher später der holländische Mathematiker Willebrord Snellius in seiner Schifffahrtskunde „Tiphys Batavus. Leyden 1624“ den Namen „Loxodrome“ gab. Mit dieser „Schiffslinie,“ welche die Meridiane unter constantem Winkel schneidet, beschäftigten sich auch Wright, Stevin und Halley.

Von besonderer wissenschaftlicher Tragweite waren die Untersuchungen auf dem Gebiete der höheren Curventheorie, welche in dem

[1]) Paul Guldin, ein gelehrter Jesuit und Professor der Mathematik in Wien, später in Graz, veröffentlichte diesen Lehrsatz in dem Werke „Centrobaryca“, welches in vier Büchern 1635—41 erschienen ist.

halben Jahrhundert 1615—1668 für die Erfindung der Infinitesimalrechnung bahnbrechend waren. Die ersten Anregungen giengen von Österreich und Italien, von dort nach Frankreich, nach den Niederlanden und nach England.

Schon im Jahre 1609 hatte Kepler in seiner in Prag erschienenen „Astronomia nova" für die Rectification der Ellipse den ersten Näherungswert angegeben und bestimmte in seiner „Nova Stereometria Doliorum Vinariorum. Lincii 1615" (die deutsche volksthümliche Ausgabe erschien 1616 in Linz unter dem Titel „Österreichisches Weinvisirbüchlein") den Rauminhalt von Umdrehungskörpern.[1])

Keplers Doliometrie ist die Quelle aller späteren Cubaturen geworden, trotzdem sie zu einer sehr ungünstigen Zeit erschien, da von 1618—1648 der nach seiner Dauer benannte entsetzliche Krieg in den Gegenden Deutschlands gewüthet und auf die Entwickelung der Wissenschaften den nachtheiligsten Einfluss ausgeübt hatte.

Verhältnismäßig rasch folgten auf Keplers Methode die Grenzmethoden von Cavalieri (Geometria indivisibilibus. Bologna 1635), Fermat (De maximis et minimis. Paris 1636), Roberval (Traité des individisibles, Mémoires de l'Académie royale des sciences, T. VI.), Torricelli (Geometrica organica, Firenze 1644) und Wallis (Arithmetica infinitorum. Oxford 1655). Seit dem Jahre 1634 bildete nun auch die Roulette oder Trochoide, deren Erzeugung durch ein sich bewegendes Wagenrad der Gelehrte Charles de Bouvelles schon 1503 beobachtet hatte, und welcher Galilei im Jahre 1590 den Namen Cycloide gab, wiederholt den Gegenstand der eingehendsten, mathematischen Forschungen. So fanden im Jahre 1635 Fermat und Descartes unabhängig von einander die Quadratur der Cycloide; 1637 construierte Descartes in sehr sinnreicher Weise mittelst der Normalen ihre Tangente, welche Roberval (1640) und Torricelli (1644) mit Hilfe des Kräfteparallelogrammes construierten. Von 1629 bis 1636 beschäftigte sich Fermat (1595—1665) mit Maximal- und Minimalaufgaben in der höheren Curventheorie, construierte die Tangenten an die Cycloide und Cissoide, bestimmte 1638 den Schwerpunkt eines Umdrehungsparaboloides, quadrierte nach der Cycloide (1635) die Flächen zwischen Hyperbeln höherer Ordnung und ihren Asymptoten, ferner die von Parabeln höherer

[1]) Weinfässern. (Anm.: Das Jahr 1613 war in Österreich ein überaus reiches Weinjahr und zahllose Frachtschiffe mit weingefüllten Fässern kamen die Donau heraufgefahren, weshalb in Linz der Wein um billiges Geld zu erstehen war).

Ordnung, darunter auch die semicubische Parabel, begrenzten Flächen, und versuchte die Rectification der Cycloide. Dieses Problem gelang aber erst dem englischen Astronomen und Architekten Christopher Wren im Jahre 1658.

Schon 1635 hatte Cavalieri nach seiner Methode der Indivisibilien die Quadratur der Spirale nach Archimed auf die Quadratur eines Parabelschnittes zurückgeführt. Auch Descartes, der die nach ihm benannte Curve dritter Ordnung (das Descartessche Blatt, folium Cartesii) entdeckte, quadrierte Parabeln höherer Ordnung und cubierte seine Umdrehungskörper. Ferner bildeten die nach ihm benannten Ovalen oder aplanatischen Linien vierter Ordnung, die logarithmische Spirale (1638) und das inverse Tangentenproblem (1639) den Gegenstand eingehender Untersuchungen. [1])

Giles Persone de Roberval, Professor der Mathematik am Collège royal in Paris, will schon 1636 öffentlich gelehrt haben, wie man Tangenten an Curven durch Zusammensetzung von Bewegungen construieren könne und fand bei der Quadratur der Cycloide (De Trochoide ejusque spatio) die Trochoidis socia, Gefährtin der Trochoide oder Cycloide. Im Jahre 1668 legte Roberval der Pariser Akademie der Wissenschaften eine nach den Vorlesungen von seinem Schüler Du Verdus verfasste Abhandlung „Observations sur la composition des mouvemens et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes" vor, welche Robervals Tangentenconstructionen an nachstehende dreizehn Curven enthielt: „Die Parabel, Hyperbel, Ellipse, die Conchoide des Nikomedes, verschiedene andere Conchoiden (Limaçon de Pascal), die Schneckenlinie des Pascal, die Spirale des Archimedes, die Quadratrix des Dinostratus, die Cissoide des Diocles, die Cycloide, die Gefährtin der Cycloide (cycloide socia), die Parabel des Descartes, eine Curve dritten Grades, welche Descartes durch eine continuierliche Bewegung erzeugt und in seiner „Géométrie" zur Construction der Gleichungen vom sechsten Grade gebraucht hatte." Auch kannte Roberval die verlängerte und die verkürzte Cycloide.

Die bereits erwähnte „Limaçon" construierte Etienne Pascal als Kreisconchoide, während sein Sohn Blaise Pascal, kaum 16 Jahre alt, im Jahre 1640 den berühmten „Essai pour les coniques" veröffentlichte, ferner die conische Spirale oder Schneckenlinie untersuchte und 1658 seine „Histoire de la roulette" herausgab. Im Jahre 1652 erweiterte der holländische Mathematiker De Sluse den

[1]) S. a.: Descartes, Géométrie 1703.

Begriff der Cycloide, bestimmte Tangenten an höhere algebraische Curven, darunter die der sogenannten „Perlen" und dehnte 1659 seine geometrischen Untersuchungen auf die Inflexionspunkte der Curven aus. In demselben Jahre führte sein Landsmann van Heuraet die Rectification der Parabel auf die Quadratur der Hyperbel zurück, während der englische Mathematiker William Neil schon 1657 die Rectification der semicubischen Parabel vollzogen haben soll. Sein Landsmann John Wallis beschäftigte sich in seiner „Arithmetica infinitorum. Oxford 1655" mit Quadraturen und Cubaturen. Im Jahre 1659 cubierte Wallis, der unmittelbare Vorgänger Newtons, den Umdrehungskörper der Cycloide. Wenige Jahre später fanden der englische Mathematiker Brouncker und der Holländer Nikolaus Mercator (Logarithmotechnia, 1668) die Quadratur der Hyperbel mittelst natürlichen Logarithmen. [1])

Die meisten bahnbrechenden Erfindungen auf dem Gebiete der höheren Curventheorie, welche auch auf die Entwickelung der exacten Wissenschaften von großem Einfluss waren, verdanken wir aber dem holländischen Mathematiker und eifrigsten Förderer der mechanischen Physik, Christian Huygens, einem der größten Denker des 17. Jahrhundertes, den Newton nie anders als Summus Hugenius nannte. Dieser Gelehrte, dessen wissenschaftliche Thätigkeit an principieller Bedeutung weitaus die seiner Zeitgenossen überragte, und den Newton für den besten Nachahmer des classischen Stiles und der Eleganz der Beweisführung bei den alten Mathematikern hielt, wurde am 14. April 1629 als der zweite Sohn des Constantyn Huygens, eines wohlhabenden Mannes, der auch als Mathematiker bekannt war, geboren. Mit sechzehn Jahren bezog er die Universität Leyden (1645 bis 1646) und hierauf (1646—1648) die Hochschule zu Breda. Hier lernte Huygens den Begründer der neueren französischen Philosophie René Descartes kennen, der ihn wegen seiner hervorragenden mathematischen Kenntnisse, welche er sich unter van Schooten erworben hatte, öffentlich belobte. In den folgenden Jahren unternahm Huygens mit dem Grafen von Nassau große Reisen nach Deutschland, Dänemark, Frankreich und England. Im Jahre 1651 veröffentlichte Huygens die Abhandlung „Theoremata de quadratura hyper-

[1]) Es sei uns an dieser Stelle abermals gestattet, bezüglich der Entwickelung der Geometrie auf das gediegene Werk „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig 1880, 1892 und 1894—96" von Herrn Hofrath Dr. Moritz Cantor, Professor der Mathematik an der Universität zu Heidelberg, hinzuweisen, welches in seinen drei Bänden eine Fülle der tiefsinnigsten Forschungen dieses hochgeschätzten deutschen Gelehrten enthält.

boles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro, Hagae 1651", welcher bald weitere Publicationen folgten. Die „Royal Society" in London ernannte ihn 1663 zu ihrem Mitgliede und als 1666 sich abermals in Paris die Gründung der Académie des sciences durch Colbert, den Minister Ludwig XIV. vollzog, berief ihn dieser als Mitglied nach Paris, wo er mit Roberval und anderen hervorragenden Akademikern bekannt wurde. Im Jahre 1691 kehrte Huygens in die Heimat zurück, wo er in Haag am 8. Juni 1695 starb.

Huygens begründete in seinem mathematischen Hauptwerke „Horologium oscillatorium. Paris 1673" die schöne Théorie der Evoluten und Evolventen, bewies, dass die Evolute der Cycloide eine ihr gleiche Curve sei; rectificierte die Cycloide, die semicubische Parabel und zum erstenmale die Cissoide, untersuchte die Kettenlinie, sowie andere höhere Curven und bestimmte die Oberfläche parabolischer und hyperbolischer Conoide; es sind dies die ersten Beispiele der Complanation krummer Flächen. Im Jahre 1682 entdeckte Tschirnhaus seine Brennlinien, 1690 bis 1696 untersuchten die beiden Brüder Jakob und Johann Bernoulli die isochronen Curven, die Kettenlinie, die logarithmische Spirale, die Lemniscate etc. [1])

Zu derselben Zeit betrachtete Giovanni Domenico Cassini (1625—1712) die nach ihm benannte, ebene Curve vierter Ordnung, die Cassinoide, im unberechtigten Zweifel an der Richtigkeit der Keplerschen Gesetze als Bahn der Planeten an Stelle der Ellipse. Die erste Tangentenconstruction für die Cassinische Curve fand Varignon; eine einfachere stammt von Bobillier. (S. das Mem. „Sur l'ellipse astronomique de M. Cassini." Mémoires de l'Académie de Paris 1703, pag. 181 und Bobillier, Cours de géométrie. 1870, pag. 216).

Newton war der erste Mathematiker, der 1704 in seinem Werke „Optics. London 1704" in der Abhandlung „Enumeratio linea-

---

[1]) S.: Dr. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. III. Bd., I. Abth. S. 119—149.

Anm.: Quetelet fand zuerst die Focalcurven als den geometrischen Ort der Spitzen von Rotationskegeln. (S.: Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles. Tom. II. 1820). — Dupin untersuchte die Focalcurven eines im Raume gedachten Kegelschnittes und als den geom. Ort der Mittelpunkte derjenigen Kugeln, welche drei gegebene Kugeln berühren. Binet beschäftigte sich mit dem gleichen Probleme. S.: Correspondance sur l'École polytechnique. Tom. I. et II. 1804—1818). Im Jahre 1826 entdeckte Magnus die Focallinien des Kegels: (S.: Gergonnes Annales de Math. Tom. XVI.).

rum tertii ordinis. Londini 1704" höhere Curven, u. zw. die Curven dritter Ordnung einer allgemeinen Betrachtung unterzog. (S. a.: Isaaci Newtoni opera que extant omnia. Londini 1779—1785. T. I.).

In Newtons „Arithmetica universalis. Cambridge 1707" (Newtoni opera quae exstant omnia. Londini 1779. Tom. I.) finden wir zum erstenmale die Rectification der Epicycloiden, die er mit Hilfe der Evolute durchführte. Als Erfinder dieser interessanten und auch praktisch wichtigen Curven werden nach Leibniz der Astronom Römer (1693), und — nach Chasles — de la Hire bezeichnet, der auch einen „Traité géométrique des épicycloides" verfasst hatte.

Schon im Jahre 1671 hatte Newton in seinem die Differentialrechnung begründenden Werke „A method of fluxions" den bekannten Differentialausdruck für den Krümmungshalbmesser einer Curve gefunden und mehrfache Quadraturen und theilweise auch Rectificationen von krummen Linien durchgeführt. [1])

Stirling bewies in seinem Werke „Lineae tertii ordinis Newtonianae. London 1717" die von Newton über Curven dritter Ordnung aufgestellten Lehrsätze, und Mauclaurin ergänzte in ausgezeichneter Weise diese Theorie in seiner „Geometria organica" welche im Jahre 1719 erschien. In den „Actis eruditorum, Lipsiae, 1718" untersuchte Hermann rectificierbare Curven auf der Kugel, und entdeckte die sphärische Epicycloide. Im Jahre 1724 legte der Mathematiker Pilot der Pariser Akademie ein Memoire vor, in welchem er die auf einem Cylinder gezogene Schraubenlinie einer eingehenden Untersuchung unterzog. Der italienische Mathematiker Guido Grandi nahm 1728 (S.: Opera posthuma Hugenii) Huygens Untersuchungen bezüglich der Logistik oder logarithmischen Linie wieder auf und untersuchte auch die sphärische Curve, welche durch den Schnitt einer Kugel mit einer windschiefen Schraubenfläche entsteht.

Endlich erschien 1731 Clairauts berühmtes Werk „Traité des courbes à double courbure", welches die Theorie der doppelt gekrümmten Curven analytisch begründete. Schon im Jahre 1718, aber noch eingehender im Jahre 1750 zeigte der italienische Mathematiker Giulio Carlo Fagnano in dem Giornale de letterati d'Italia, tomo XXIX, XXX e XXXIV und in den Produzioni matematiche, Pesaro 1750, tom. II pag. 317, dass die Rectification der Lemniscate von jener der Ellipse und Hyperbel abhänge, und dass

[1]) Newtons „A method of fluxions" erschien erst 1736 im Druck.

sich sowohl auf der Ellipse als auch auf der Hyperbel unendlich viele Bogen angeben lassen, deren Differenz in algebraischer Form angebbar sei, obgleich die Bogen dieser Curven nicht einzeln in algebraischer Form rectificiert werden können.

Euler setzte in den Novi Commentarii acad. Petropolitanae, Tom. VI vom Jahre 1761 Fagnanos Untersuchungen fort, und der englische Mathematiker John Landen führte in den Philosophical Transactions vom Jahre 1771 und 1775, so wie in den Mathematical Memoirs vom Jahre 1780 die nach ihm benannten Substitutionen ein. [1])

Endlich veröffentlichten Colin Maclaurin (De linearum geometricarum proprietatibus generalibus. Londini 1748), Jean Paul de Gua (Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir les propriétés des lignes géométriques de tous les ordres) und der Genfer Gabriel Cramer (Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. 1750) Werke, welche die algebraischen Curven höherer Ordnungen in ausgezeichneter Weise theils auf synthetischem, theils auf analytischem Wege behandelten. [2])

Erst Euler[3]) behandelte im zweiten Bande seines unübertroffenen Werkes „Introductio in analysin infinitorum, Lausanne

[1]) Anm.: Legendres, Abels, Jacobis, Riemanns und Weierstrass bewundernswerte Forschungen auf dem Gebiete der elliptischen Functionen in diesem Jahrhundert bilden einen imposanten Abschluss der höheren analytischen Curventheorie.

[2]) S.: Chasles, Aperçu historique, Bruxelles 1837. (Paris 1875). — Dr. H. Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaften. II. Bd. Zürich 1875. — Chasles, Rapport sur les progrès de la géométrie. Paris 1870. — August Heller, Geschichte der Physik. II Bd. Stuttgart 1884 etc.

[3]) Leonhard Euler, der größte deutsche Mathematiker des 18. Jahrhundertes, wurde am 15. April 1707 zu Basel als Sohn eines calv. Seelsorgers geboren. Er absolvierte seine Universitätsstudien zu Basel unter Johann Bernoulli, wurde 1727 Adjunct und 1733 Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Petersburg. Im Jahre 1741 berief ihn Friedrich der Große mittelst eigenhändigen Schreibens als Präsident der Berliner Akademie der Wissenschaften. Euler kehrte 1766 abermals nach Petersburg zurück, wo er am 18. September 1783 einem Schlaganfall erlag. Euler war ein überaus fruchtbarer mathematischer Schriftsteller und hat im Ganzen 756 Abhandlungen und selbständige Werke verfasst, die sich zumeist — selbst in den schwierigsten Deductionen — durch eine bewundernswerte Klarheit und Eleganz auszeichnen. Besonders ist Eulers „Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748" ein geniales Product des auf allen Gebieten des mathematischen Wissens so großartigen Talentes dieses unsterblichen deutschen Mathematikers. — S.: Condorcet „Éloge de L. Euler" (Mém. de l'Acad. 1783); N. Fuß „Lobrede auf Euler. Basel 1786". Ferner Suter, Bd. II, pag. 186 und Heller, Bd. II. pag. 392—403.

1748" die analytische Geometrie der krummen Oberflächen, auf welche Descartes in seiner „Géométrie, Leyden 1637" nur mit kurzen Worten hingewiesen hatte, und discutierte in vortrefflicher Weise die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit drei Variabeln.

Die Methode der analytischen Geometrie jedoch hatte sich seit Descartes wenig verändert; sie operierte auch in dem Werke eines Euler immer noch vorzugsweise an Figuren, auf welche sie bald Constructionen, bald den Calcul anwendete, und bewegte sich noch sehr schwerfällig durch complicierte Eliminationen. So ist es begreiflich, dass man sich selbst da, wo die Geometrie recht eigentlich hingehörte, darin gefiel, dieselbe zu ignorieren. Selbst Lagrange[1]) war stolz darauf, eine Mechanik geschrieben zu haben, in der sich keine Figur befand.

Nachdem Descartes die Anwendung der Analysis auf die Geometrie — seine glänzendste und zugleich am sichersten begründete Entdeckung — ins Werk gesetzt hatte, beschäftigten sich die Mathematiker zunächst mit Untersuchungen der Eigenschaften ebener Curven, welche durch die Gleichungen der ersten beiden Grade zwischen zwei Variabeln dargestellt werden. Der weitere Weg schien vorgezeichnet: man brauchte nur successive zur Discussion der Curven vom dritten, vierten, fünften Grade, und so weiter, fortzugehen. Newton[2]) unternahm diese Untersuchungen für die Gleichung des dritten Grades. Seine Vorgänger hatten in der Gleichung vom zweiten Grade drei Arten krummer Linien gefunden; er sah sich genöthigt, in der Gleichung vom dritten Grade zweiundsiebzig Arten zu unterscheiden. Euler, der die Gleichung vom vierten Grade zu behandeln vornahm, wagte nicht einmal die Frage nach den eigentlichen, sogenannten Arten zu erörtern. Schon er hielt sich an Kennzeichen von größerer Allgemeinheit und fand, indem er seine Untersuchung nur bis auf die Gattungen oder Geschlechter erstreckte, deren hundertsechsundvierzig.

Dieser Modus zur Classificierung krummer Linien musste offenbar verlassen werden, die Rückwirkung konnte nicht ausbleiben und Frankreich, das überhaupt in jener Zeit unbestritten das geistige Principat in Europa inne hatte, schuf in der geometrischen Wissenschaft den bis dahin unbekannten Begriff der geometrischen Allgemeinheit.

Monge setzte nämlich an Stelle des alten Classificierungsprincips, welches Descartes, Newton und Euler befolgt hatten, ein ganz

[1]) Mécanique analytique. Paris 1788.

[2]) Optics, London 1704 (Enumeratio linearum tertii ordinis).

neues Princip und gruppierte die Oberflächen nach dem Modus ihrer Erzeugung. So studierte er zu gleicher Zeit die Eigenschaften der cylindrischen Flächen aller Ordnungen, dann die Eigenschaften der Kegelflächen, hierauf die der Umdrehungsflächen u. s. w., ohne danach zu fragen, welcher algebraische Rang dieser oder jener Oberfläche zukomme.

Um zu diesem Ziele zu gelangen, sah sich Monge genöthigt, zu einer besonderen Rechnungsart seine Zuflucht zu nehmen, welche beim Studium der Bewegung flüssiger Körper unmittelbar vorher unter den Händen d'Alemberts entstanden war. Es ist die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Monge wusste diesen Zweig der transcendenten Analysis mit einer solchen Eleganz zu handhaben, dass, wer seine Schriften las, nicht im Zweifel darüber war, er sei auf dem äußersten Gipfelpunkte der mathematischen Kenntnisse des achtzehnten Jahrhundertes angelangt. Dieser ausgezeichnete Mathematiker zeigte in äußerst klarer Weise an einer Reihe von Beispielen, wie die willkürlichen Functionen aus den Bedingungen des vorgelegten Problemes bestimmt werden können, wenn diese Bedingungen in analytisch bestimmter Form gegeben sind und wie dagegen das Integral — wenn auch die willkürlichen Functionen desselben wegen der Discontinuität der Bedingungsgleichungen in analytischer Form nicht angebbar sind — dennoch construiert werden könne. So repräsentiert z. B. das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, welches eine willkürliche Function enthält, so viele krumme Oberflächen, als die willkürliche Function Formen annehmen kann; die Lösung ist also eine unbestimmte, sie wird erst eine bestimmte, durch eine gegebene Bedingungsgleichung, welche eine Curve darstellt, durch welche die krumme Oberfläche gehen muss. Ist diese Bedingungsgleichung keine analytische, die Curve also keine continuierliche, so ist auch die willkürliche Function des Integrales analytisch nicht zu bestimmen, das Integral dessenungeachtet aber geometrisch construierbar. Analog verhält es sich mit den Integralen von Differentialgleichungen höherer Ordnung; diese haben bekanntlich so viele willkürliche Functionen, als der Grad der Ordnung beträgt, und um diese zu bestimmen, müssen auch ebensoviele Bedingungsgleichungen gegeben sein; also muss die krumme Oberfläche durch so viele Curven doppelter Krümmung gehen, als das Integral willkürliche Functionen enthält.

Monge veröffentlichte seine diesbezüglichen weiteren Untersuchungen in den Denkschriften der Pariser Akademie der Wissenschaften. Es sind dies: „Mémoire sur une méthode d'intégrer les équations aux différences ordinaires." (Mémoires de l'Académie des sciences de Paris pour l'année 1783, pag. 719); „Mémoire sur l'intégration des équations aux différences finies qui ne sont pas linéaires." (Mém. 1783, pag. 725); ferner „Mémoire sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes". (Mém. 1784, pag. 85); „Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles". (Mém. 1784, pag. 118) und „Supplément où l'on fait voir les équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration". (Mém. 1784, pag. 502); sowie endlich das „Mémoire sur quelques effets d'attraction ou de répulsion apparente entre les molécules de matière". (Mém. 1787, pag. 506.)

Monge begründete in der analytischen Geometrie nicht bloß die Theorie der einhüllenden Flächen, sondern er beschäftigte sich auch vielfach mit der Erzeugung der windschiefen und der abwickelbaren Flächen. Fast gleichzeitig hatte Monge mit Euler, der im Jahre 1771 der Petersburger Akademie der Wissenschaften seine Abhandlung über die developpablen Flächen vorgelegt hatte, seine diesbezüglichen Forschungen der Pariser Akademie vorgelegt und im Jahre 1775 die Theorie dieser Flächen wesentlich erweitert. Eine der schönsten und wichtigsten Anwendungen der Theorie der Developpablen machte Monge auf die Krümmung der Flächen.

Euler[1]) hatte zuerst in den Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1760 seine interessanten Theoreme über die Krümmungsradien der Normalschnitte krummer Flächen veröffentlicht.

Monge begründete in der Abhandlung: „Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais". (Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 1781, pag. 666) die Theorie seiner Krümmungslinien, der Umbilics oder Kreispunkte etc. Seine spätere Anwendung dieser Theorie auf die Krümmungslinien des Ellipsoides („Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde". Journal de l'École polytechnique, II. cahier, an III [1795]) ist ein Muster von geometrischer Eleganz. Diese geometrischen Untersuchungen über die Krümmung der Flächen von Monge, welche

---

[1]) „Recherches sur la courbure des surfaces". (Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1760, pag. 119.)

von seinen Schülern Meusnier [1]), Dupin [2]) etc., durch weitere Lehrsätze bereichert und durch ihre Ausdehnung auf die allgemeine Theorie der Flächen erweitert wurden, bilden mit den Forschungen von Gauss [3]) die Grundlage unserer modernen Krümmungstheorie. [4])

Monge ist auch der Begründer der Theorie der reciproken Curven und Oberflächen, d. i. jener Curven, bezw. Oberflächen, deren erste aus der zweiten gebildet wird, wie die zweite aus der ersten gebildet wurde. Das Manuscript dieser Abhandlung befindet sich in den Memoiren des Institut de France vom Jahre 1808. (S. a.: Correspondance sur l'École polytechnique, Tom. I, pag. 73, 1805.) Diese Theorie der Curven und Oberflächen mit reciprokem Bildungsgesetze wurde von dem französischen Geometer Chasles [5]) verallgemeinert.

Im Jahre 1780 hörte Monges einsamer Aufenthalt in Mézières auf. Er bekam in diesem Jahre die Ernennung zum Lehrstuhle der Hydraulik, welchen der Minister Turgot auf das Verlangen d'Alemberts und Condorcets im Louvre errichtet hatte. Noch in diesem Jahre, wo Monge die Professur im Louvre bekleidete, und in seinen Mußestunden mehrere seiner hochbegabten Schüler, wie Lacroix, Gay-Vernon etc. mit der Anwendung der höheren Mathematik auf die analytische Geometrie bekannt gemacht hatte, war es ihm noch nicht gestattet, über seine descriptive Geometrie etwas vorzutragen. Wiederholt äußerte er sich aber zu seinen strebsamen Zög-

---

[1]) „Mémoire sur la courbure des surfaces", lu à l'Académie le 14 et le 21 février 1776. (Recueil des Savans étrangers tome X., 1785, pag. 477.)

[2]) S.: Charles Dupin, Développements de Géométrie etc., pour faire suite à la Géométrie descriptive et à la Géométrie analytique de M. Monge, Paris 1813, (S. a.: Correspondance polytechnique année 1805—1807), présentés dans la séance de l'Institut de France du 14 décembre 1812.

[3]) S.: Disquisitiones generales circa superficies curvas. (Commentationes societatis regicae scientiarium Gottingensis recentiores. Vol. VI ad 1823—1827. Gott. 1828.) S. a.: Gauss' Werke. Bd. IV., pag. 217—258.

[4]) S.: Application de l'analyse à la géométrie, par G. Monge. Cinquième édition, par M. Liouville. Paris 1850, pag. 124–420. — George Salmon, A Treatise on the analytic Geometry of three dimensions. 3. edit. Dublin 1874 (deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, III. Aufl., Leipzig 1880, pag. 34—89 und pag. 207—240; ferner F. Joachimsthal: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. III. Aufl. bearb. von L. Natani. Leipzig 1890, pag. 91—131, etc.

[5]) S.: Chasles, Aperçu historique. Bruxelles 1837 (Paris 1875), pag. 376. (Sur les courbes et surfaces réciproques de Monge. — Généralisation de cette théorie.)

lingen: „Tout ce que je fais ici par le calcul, je pourrais l'exécuter avec la régle et le compas; mais il ne m'est pas permis de vous revéler ces secrets“.

So groß war noch im Jahre 1780 der Einfluss des mächtigen Geniecorps auf das öffentliche Leben, um den Erfinder einer für die rasche Entwicklung der Künste so wichtigen Wissenschaft zu zwingen, dieselbe einfach todtzuschweigen.

Der Minister hatte verordnet, dass der neue Professor der Hydraulik seinen Aufenthalt sechs Monate zu Mézières und sechs Monate zu Paris haben sollte.

Schon nach dem ersten sechsmonatlichen Aufenthalt in Paris wurde Monge zum Mitgliede der Akademie der Wissenschaften ernannt. Als Bezout im Jahre 1783 starb, wurde Monge gewählt, um den berühmten Examinator der Marinezöglinge oder Flaggencadetten (gardes du pavillon) zu ersetzen. Sein neues Amt erforderte, dass er sofort die Genieschule von Mézières, wo er durch fünfzehn Jahre als Professor der Mathematik und Physik so erfolgreich gewirkt und mehrere berühmte Gelehrte herangebildet hatte, ganz verlassen musste. Er verließ eine Anstalt, die Frankreich die besten Militär-Ingenieure gab — er verließ eine Schule, an der er achtzehn Jahre gewirkt, und welche nach der öffentlichen Meinung ganz zur „Schule des Monge“ geworden war. Diese Thatsache wird auch durch den Ausspruch des Obercommandanten von Mézières gekennzeichnet, welcher sich bei der Berufung des berühmten Lehrers nach Paris zu folgenden, dem Cardinal Mazarin entlehnten Worten, hinreißen ließ: „Il nous faut remplacer Monge par un homme qui ne soit personne!“

Monge versah die Stelle eines Examinators bei der Marine bis zum Ausbruche der ersten Revolution im Jahre 1789. In diesem neuen Amte verband er Milde und Sanftmuth mit einer großen, unbeugsamen Festigkeit, besonders dann, wenn letztere das öffentliche Interesse zu erfordern schien.

Wenn auch sein berühmter Vorgänger, Bezout, durch die Werke „Théorie générale des équations algébriques, Paris 1759“ „Mémoire sur le degré des équations résult. de l'évanouissement des inconnues, Paris 1764“ und durch seine „Traités élémentaires de mathématiques“ der Wissenschaft einen besonderen Dienst geleistet hatte, so entbehrten seine Schriften dennoch jenen Grad der Strenge und Vollkommenheit, auf welche Lagrange, Monge, Laplace, Lacroix, Legendre etc. die Mathematik erhoben hatten. Wiederholt erhielt Monge von dem damaligen Minister, Marschall de Castries, welcher ihm Achtung und Wohl-wollen in hohem Maße entgegenbrachte, den Auftrag, ein vollständiges mathematisches Lehrbuch zum Gebrauche der Aspiranten und Zöglinge der Marine abzufassen. Das Werk sollte obligatorisch eingeführt werden, und hätte dem Verfasser ohne Zweifel ein namhaftes Vermögen eingebracht. Monge weigerte sich entschieden, diesem Auftrage nachzukommen, da er der Witwe seines Vorgängers nicht das einzige Einkommen, das ihr nach dem Tode ihres Gatten aus dem Verkauf seiner Bücher geblieben war, schmälern wollte. Monge verfasste für die Marine nur seinen „Traité élémentaire de statique, à l'usage des écoles de la marine, Paris 1786", der als ein Muster von Eulerscher Logik, Einfachheit und Klarheit bezeichnet werden muss.

Nach seinem Eintritte in die Akademie der Wissenschaften verfasste Monge mehrere sehr schöne Abhandlungen aus der transcendenten Analysis und auch solche physikalischen oder chemisch-technologischen Inhaltes. Hieher gehören nebst den bisher genannten „Mémoire sur le résultat de l'inflammation du gaz inflammable et de l'air déphlogistique dans des vaissseaux clos," (Mémoires de l'Academie des sciences, 1783, pag. 78); „Mémoire sur le fer considéré dans ses différents états métalliques," par M. M. Vandermonde, Berthollet et Monge, (Mém. de l'Acad. 1786, pag. 132); „Mémoire sur l'effet des étincelles électriques excitées dans l'air fixe," (Mém. de l'Acad. 1786, pag. 430); ferner „Mémoire sur quelques phénomènes de la Vision," (Annales de Chimie, tome III. 1789, pag. 131); „Mémoire sur les causes des principaux phénomènes de la météorologie," (Ann. de Chimie, 1790, tome V, pag. 1.); „Observations sur le méchanisme du feutrage," (ibid. tome VI, pag. 300).

Als Monge die grundlegenden Arbeiten für ein bedeutendes Werk der Mechanik „Sur la composition des machines" vollendet hatte, brach 1789 die französische Revolution aus.

Die Grundsätze der „justice, liberté et égalité," welche damals von einem Ende Frankreichs bis zum anderen wiederhallten, blieben auf den großen Gelehrten, der als hochbegabter Jüngling in die, von den durch Geburt begünstigten Zöglingen zu Mézières mit dem verächtlichen Namen der Gipsschule belegte Abtheilung commandiert wurde, nicht ohne Wirkung und erregten in Monges Seele Gefühle der Sympathie und Enthusiasmus. Schon in Mézières pflegte sich Monge in seinen Träumen mit einem Wonnegefühl in jene entfernte Zeit zu versetzen, wo der Geist frei seinen Aufschwung zu nehmen vermöchte, und wo jeder vom Staate den für seine Verdienste und Fähigkeiten am meisten geeigneten Posten erhalten würde.

Mit Ungeduld erwartete Monge nun eine Gelegenheit, um seine Fähigkeiten ganz dem Vaterlande widmen zu können. Sein Traum von Mézières gieng bald in Erfüllung. Er wurde seitens der Académie des sciences in die Commission zur Einführung des neuen Maß- und Gewichtssystemes gewählt und nahm als Mitarbeiter an dem Werke „Rapport fait à l'Académie des sciences, sur le système général des poids et mesures, par les citoyens Borda, Lagrange et Monge" (Histoire de l'Académie pour l'année 1789, pag. 1) hervorragenden Antheil.

Als nach dem blutigen Kampfe auf dem Carousselplatz und der Einnahme der Tuillerien am 10. August 1792 die königliche Autorität provisorisch suspendiert, und der executive Rath (conseil exécutif) als neues Bürgerministerium gebildet wurde, wurde Monge über Vorschlag Condorcets von der gesetzgebenden Versammlung anfangs October 1791 zum Marineminister ernannt.[1] Als Monge die Leitung des Marineministeriums im Jahre 1792 noch inne hatte, standen die Heere der verbündeten Mächte schon auf Frankreichs Boden. Paris und ganz Frankreich waren in der größten Aufregung. In dieser hohen Stellung, reich an Mühen und schwerer Verantwortung that Monge, der die Sympathien seiner untergebenen Beamten nicht besaß, sein Möglichstes. Den Marine- und Artillerie-Officieren, welche Paris besuchten, hatte der Bürgerminister in gastfreundlicher Weise den größten Theil seiner „Appartements" zur Verfügung gestellt.

Als endlich der gelehrte Geometer, der zweimal als Candidat in die Liste der Mitglieder des Directoriums aufgenommen wurde, zu bemerken glaubte, dass er auf seinen hohen und gefahrvollen Posten verzichten könne — ohne sich des Verbrechens des Landesverrathes schuldig zu machen — reichte er am 12. Februar 1793 unter Hinweis auf seine politische und administrative Unfähigkeit seine Dimission ein, die — nachdem er am 17. Februar wiedergewählt wurde — erst am 10. April desselben Jahres angenommen wurde. Noch am Tage seines

[1]) Die der Mehrzahl nach aus Girondisten bestehende gesetzgebende Versammlung (Assemblée législative), welche am 1. October 1791 ins Leben trat, hatte als Minister in den Conseil exécutif entsendet: Roland für innere Angelegenheiten, Servan für Krieg, Clavière für Finanzen, Monge für Marine und Lebrun für äußere Angelegenheiten. Der Führer der Cordiliers, Danton, übernahm das Justizministerium und beherrschte mit der neuen aus Jakobinern bestehenden Pariser Commune (Gemeinderath) ganz Frankreich.

Anm.: Am 5. April 1794 ließ Robespierre Danton und 14 seiner Genossen hinrichten, und am 28. und 29. Juli wurden Robespierre mit seinen Genossen Conthon, Lebas, Saint Just und Henriot, nebst 81 Communemitgliedern (Pariser Gemeinderäthen) guillotiniert.

Rücktrittes verfasste Monge, der mit einer seltenen Seelenruhe sein Minister-Portefeuille niedergelegt hatte, eine mehrere Seiten umfassende Abhandlung aus der transcendenten Mathematik.

Nach diesem Rücktritt wurde Monge vom Convente zum Director der Gewehrfabriken, Geschützgießereien und Pulvermühlen der Republik ernannt. In dieser Stellung leistete Monge im Vereine mit mehreren hervorragenden Männern der Wissenschaft — unter Carnot als Kriegsminister — für die Vertheidigung seines Vaterlandes geradezu Unglaubliches.

Im Jahre 1793 hatte bekanntlich Frankreich an allen seinen Grenzen einen unermesslichen Kampf gegen die Armeen des verbündeten Europa zu bestehen. Der Convent hatte die Aushebung von 900.000 Mann angeordnet — aber es fehlte an Waffen, denn die Zeughäuser waren leer, Frankreich zu Wasser und zu Lande abgeschlossen, und die verbündeten Heere waren im Aufmarsche gegen Paris begriffen. Seit Jahren hatte Frankreich den Salpeter zur Pulverfabrication aus Indien, das Kupfer für das Kanonenmetall aus Schweden, England und Russland bezogen.

Monge, von seltenem patriotischen Geist beseelt, hatte sein Herz, seine Seele und seinen Leib dem Vaterlande geweiht, dessen Vertheidigung er in großartiger Weise unterstützte. Nach seinen Vorschriften wurde nun der Salpeter, das Pulver, die Gewehre und Kanonen im Lande selbst erzeugt. In einem Monat verfügte Frankreich über zwölf Millionen Pfund Salpeter, die Geschützgießereien lieferten siebentausend eherne Kanonen; die Zahl der eisernen Kanonen stieg von 900 auf 13.000, der Gewehrfabriken von eins auf zwanzig. Paris allein erzeugte 140.000 Gewehre.

Der berühmte Geometer, der von vier Uhr morgens die Arbeiten in den Kanonenfabriken leitete, und die Nächte dazu benützte, um für die Arsenale ein umfangreiches Werk „Description de l'art de fabriquer les canons, Paris, an II (1793)“ zu verfassen, war damals ohne Vermögen, und der Wohlfahrtsausschuss (Comité de sûreté et de salut public) fand es auch nicht nöthig, seinen Delegierten, der die Waffenfabrication leitete, zu bezahlen. So kam es wiederholt, dass Monge nach seinen langen und ermüdenden Inspectionen in den Werkstätten der Arsenale sich beim Mittagstische mit trockenem Brode begnügen musste. Ja es sollten noch bittere Enttäuschungen kommen. — — —

Wenige Tage nach dem 9. Thermidor (27. Juli) wurde Monge, der Leiter der umfassendsten Vertheidigungsarbeiten Frankreichs, infolge der Denunciation seines Portiers als Anhänger des Agrargesetzes in den

Anklagestand versetzt. Während Monge Marineminister war, hätten mehrere Schritte der Regierung zugleich die ewigen Grundsätze der Gerechtigkeit, die geheiligten Empfindungen der Menschheit und die Regeln einer gesunden Politik verletzt: „Pendant que Monge était ministre de la marine, plusieurs actes du gouvernement blessèrent à la fois les princips éternels de la justice, les sentiments sacrés d'humanité et les règles d'une saine politique.“ So lautete die Anklage gegen den verdienstvollen Marineminister, der mit seinem Freunde Condorcet den Muth hatte, gegen das Todesurtheil Ludwig XVI. zu sprechen. [1])

Frankreich, welches nach der Parole der Republikaner „liberté, égalité et fraternité“ ein Tempel der Freiheit und des Geistes hätte werden sollen, befand sich in einem schrecklichen Culturzustande. Unwissenheit, Rohheit und eine schmachvolle Tyrannei beherrschten das Land. Gegen König Ludwig XVI., welcher in der Nacht vom 20. zum 21. Juni 1791 mit seiner Familie aus Paris geflohen war, aber schon in der folgenden Nacht vom Postmeister Drouet in St. Menehould erkannt, vom Maire Sausset in Varennes festgehalten wurde, und seit dem 13. August 1792 im Temple gefangen war, erhob der Convent nach Abschaffung des Königthumes am 11. und 26. December 1792 eine 57 Punkte umfassende Anklage, welcher der Präsident des Conventes Barère vertrat. Durch die Abstimmung von 15. bis 17. Jänner 1793, bei welcher bloss 361 von 721 Stimmen unbedingt für den Tod, hingegen 286 für Gefangenhaltung und Landesverweisung, 46 für den Tod nach geschlossenem Frieden, 26 für Aufschub der Strafe und 2 Stimmen für Kettenstrafe gestimmt hatten, war das Schicksal der unglücklichen Königsfamilie und Frankreichs entschieden. Am 20. Jänner 1793 verkündete Justizminister Garat, von dem Brauer Santerre, Commandanten der Pariser Nationalgarde und der Commission begleitet, Ludwig XVI. das Todesurtheil, welches am 21. Jänner nach 10 Uhr morgens auf der Place Louis XV. in Gegenwart eines zahllosen Pöbels vollzogen wurde. Am 16. October 1793 fiel das Haupt seiner königlichen Gattin Maria Antoinette, Tochter der großen Kaiserin Maria Theresia, unter dem Fallbeil der Guillotine. Am 8. Juni 1795 endlich erlöste der Tod ihren zehnjährigen Sohn Ludwig XVII. von seinen Qualen, die er durch den rohen Schuster Simon, welchem der Convent den Thronfolger zur Erziehung übergeben hatte, zu erdulden hatte. — — —

---

[1]) S.: Arago, Oeuvres complètes. Paris 1854. Tome deuxième, pag. 478 et 567. — Dupin, Essai historique. Paris 1819, page 158.

Die altehrwürdige, vom Cardinal Richelieu im Jahre 1635 gegründete Akademie der Wissenschaften war schon seit 1793 aufgelöst; die Militär-, Civil- und Klosterschulen waren zerstört, und ihre Lehrer nach allen Windrichtungen vertrieben oder unter dem Schaffot gestorben. In den sieben Wochen, vom 8. Juni bis 26. Juli 1794, wurden in Paris allein 1500 Menschen guillotiniert. Es ist eine in der Weltgeschichte einzig dastehende Ironie, dass Robespierre und seine würdigen Genossen Couthon und Saint-Just — die Häupter des sogenannten Revolutions-Tribunals — in ihrer, an Wahnsinn grenzenden Zerstörungswuth nach Abschaffung der Religion noch die moralische Kühnheit fanden, die Vernunft als die einzigwahre Gottheit zu erklären. [1])

Nachdem in diesem Zeitraume mehrere hervorragende politische Persönlichkeiten nur nach dem Nachweise ihrer Identität, ohne vorherigen Richterspruch zum Tode geführt wurden, und Monges innigster Freund, der Encyklopädist Condorcet, welcher gegen das Todesurtheil Ludwig XVI. gestimmt hatte, am 8. April 1794 im Kerker todt aufgefunden wurde — nachdem auch der berühmte französische Chemiker Lavoisier trotz seiner hohen wissenschaftlichen Verdienste am 8. Mai 1794 und kurz vorher der Astronom Bailly in Paris guillotiniert wurden, so gab Monge — der schon 1777 in Madame Horbon eine liebenswürdige und intelligente Lebensgefährtin gefunden hatte und Familienvater war — dem Drängen seiner lieben Angehörigen und Freunde nach — und rettete sein Leben durch die Flucht.

Bis zu diesem Zeitpunkte war Monge noch immer im alleinigen Besitze der von ihm erfundenen und seit dreißig Jahren geheim gehaltenen Wissenschaft — der descriptiven Geometrie.

---

[1]) S.: Roux le Bouchers: „Histoire parlamentaire de la révolution française“ Paris 1833—38. — „Histoire de la révolution française“ par Mignet (Paris 1824); ibid. par Thiers (Paris 1823—27); ibid. par Louis Blanc (Paris 1847); ibid. par Michele (Paris 1847—51); ferner die Werke von Granier de Cassagnac (Paris 1850), Villiaume (Paris 1849—50); Lamartine: „Histoire des Girondins“ (Paris 1847) et Granier de Cassagnac (Paris 1859). — Schließlich die historischen Werke von Wachsmuth, Sybel, Dahlmann etc. über Frankreich und seine Revolution.

II.

Die Gründung der École normale.

Nach dem Sturze der Schreckensregierung war es neben der Landesvertheidigung die erste Sorge des Nationalconventes, die Bildung und den Wohlstand des französischen Volkes zu heben. Hatte ja der Tyrann Robespierre, den sein Schicksal am 9. Thermidor (27. Juli 1794) ereilte, eine förmliche Verschwörung gegen die Vernunft organisiert, um die Wissenschaften und Künste auf der Erde auszurotten. Deshalb hatte er die Wissenschaften am meisten gehasst und sie am blutdürstigsten verfolgt, um die „égalité" aller Franzosen herbeizuführen. Der Nationalconvent hatte alle Ursache, dem öffentlichen Unterrichte seine vollste Aufmerksamkeit zuzuwenden, da fast alle Schulen in Frankreich geschlossen oder verödet waren, und es im ganzen Lande an Lehrern fehlte. Die Lehrer, größtentheils Geistliche, waren proscribiert, oder hatten — soweit sie republikanisch gesinnt und dem Laienstande angehörten — als Officiere im Heere Dienste genommen. Alle jungen Leute von achtzehn bis fünfundzwanzig Jahren hatte der Convent zu den Waffen gerufen, um die Grenzen Frankreichs zu vertheidigen.

Durch ein Decret vom 30. October 1794 wurde anbefohlen, dass in der kürzesten Zeit Lehrer geschaffen werden. Dieser für die culturelle Entwicklung Frankreichs so bedeutungsvolle Beschluss des Nationalconventes wurde auch mit aller Macht rasch durchgeführt. Die ersten Gelehrten Frankreichs erhielten von der Regierung den Auftrag, fünfzehnhundert junge, durch Talent hervorragende Leute aus allen Departements Frankreichs zu Lehrern heranzubilden, welche dann verpflichtet waren, in allen Theilen des Reiches für die Hebung der Volksbildung zu wirken. So entstand die Normalschule (École normale) zu Paris, in welcher es Monge gestattet wurde, die descriptive Geometrie zum

---

Anm.: Nach Veröffentlichung des I. Abschnittes dieser mathematisch-historischen Studie über „Monge" in dem bereits vergriffenen Jahresberichte der deutschen Landes-Oberrealschule in Brünn für das Schuljahr 1892—93 wurden wir in einer liebenswürdigen Zuschrift vom Herrn Hofrath Dr. Moritz Cantor, o. ö. Professor an der Universität zu Heidelberg, auf eine schöne Abhandlung über den großen, französischen Geometer aufmerksam gemacht, welche Herrn Prof. K. Fink in Tübingen zum Verfasser hat und in dem „Correspondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen Württembergs", 1892, 7.—10. Heft unter dem Titel „Monge" veröffentlicht wurde.

erstenmale öffentlich zu lehren. Diese Normalschule zu Paris war eine Lehrerbildungsanstalt, deren Zustand wir uns kaum idealer denken können. Als Lehrer wirkten an dieser Schule die ersten Gelehrten Europas, wie man sie nur in einer Weltstadt wie Paris vereinigt finden konnte, während das Schülermaterial, aus fünfzehnhundert jungen und hervorragenden Talenten bestehend — dem Princip der republikanischen Gleichheit entgegen — der geistigen Aristokratie des ganzen Landes entnommen wurde. [1])

In das Professoren-Collegium der École normale wurden berufen: Lagrange und Laplace für Mathematik, Monge für descriptive Geometrie, Hauy für Physik, Berthollet für Chemie, Daubenton für Naturgeschichte, Thouin für Agricultur, Buache, Mantelle und Volney für Geographie und Geschichte, Laharpe, Garat, Bernardin de Saint-Pierre und Sicard für Grammatik, Literatur und Moral. Lacroix und Hachette waren Monge als Professeurs adjoints (Hilfsprofessoren) in der descriptiven Geometrie zugetheilt.

Monge, der noch vor kurzem sein Leben als politischer Flüchtling retten musste, wurde nun berufen, die Organisation der École normale durchzuführen. Unter den Schülern der École normale finden wir u. a. den später so berühmt gewordenen Mathematiker Fourier. Der Nationalkonvent hatte ausdrücklich bestimmt, dass die Vorträge der Professoren nicht gelesen, sondern frei gehalten werden, und von Stenographen niedergeschrieben, die Leitfäden für den späteren wissenschaftlichen Unterricht in Frankreich bilden sollten. Hier, an der Pariser Normalschule, deren fünfzehnhundert Schüler aus allen Departements Frankreichs sich täglich in dem weiten Amphitheater des Jardin des plantes versammelten, hatte Monge schon damals in seiner denkwürdigen Antrittsrede bei der Eröffnung der École normale mit seiner ganzen Autorität darauf hingewiesen, dass die öffentliche Erziehung der französischen Nation auf die Kenntnis jener Doctrinen begründet werden müsse, welche Genauigkeit erfordern, damit die Naturwissenschaften besser gepflegt und ihre unermesslichen Erfolge auf das praktische Leben angewendet werden können, da nur dann Präcision in die industriellen Arbeiten des Landes gelegt, die Fortschritte der Industrie beschleunigt werden, der Wohlstand gehoben und Frankreich von der ausländischen Industrie unabhängig gemacht werden könne.

---

[1]) Vergl.: Dupin, Essai historique. Paris 1819, pag. 40, und Monge-Brisson, Géométrie descriptive. Paris 1847 (Avertissement).

Monge, der die descriptive Geometrie bis zu diesem Zeitpunkte, also durch dreißig Jahre als Staatsgeheimnis wahren musste, war nun so glücklich, seine Wissenschaft öffentlich vortragen zu dürfen. Mit der Begeisterung eines idealen Lehrers trat Monge am 19. Jänner 1795 im Jardin des plantes vor sein hochbegabtes Collegium und leitete die Vorträge (séances des écoles normales [1]) über sein System der darstellenden Geometrie, welches heute Gemeingut von Millionen geworden ist, mit folgenden, historisch denkwürdigen Worten ein:

„Pour tirer la nation française de la dépendance où elle a été jusqu' à présent de l'industrie étrangère, il faut, premièrement, diriger l'éducation nationale vers la connoissance des objets qui exigent de l'exactitude, ce qui a été totalement négligé jusqu' à ce jour, et accoutumer les mains de nos artistes au maniement des instrumens de tous les genres, qui servent à porter la précision dans les travaux et à mesurer ses différens degrés: alors les consommateurs, devenus sensibles à l'exactitude, pourront l'exiger dans les divers ouvrages, y mettre le prix nécessaire; et nos artistes, familiarisés avec elle dès l'âge le plus tendre, seront en état de l'atteindre. [2])

Il faut, en second lieu, rendre populaire la connoissance d'un grand nombre de phénomènes naturels, indispensable aux progrès de l'industrie, et profiter, pour l'avancement de l'instruction générale de la nation, de cette circonstance heureuse dans laquelle elle se trouve, d'avoir à sa disposition les principales ressources qui lui sont nécessaires.

Il faut enfin répandre parmi nos artistes la connoissance des procédés des arts, et celle des machines qui ont pour objet, ou de

---

[1]) Anmerkung: Die Vorträge an der École normale fanden im Amphitheater des botanischen Gartens (Jardin des plantes) statt, während die Constructionsübungen in der descriptiven Geometrie in den zu Zeichensälen eingerichteten großen Sälen der Sorbonne abgehalten wurden.

[2]) S.: Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles normales, l'an 3 de la République; par Gaspard Monge, de l'Institut national. Paris, Baudouin, Imprimeur du Corps législatif et de l'Institut national. An. VII, pag. 1—4.

Anmerkung: Des historischen Interesses wegen wurde die am Ende des vorigen Jahrhunderts übliche französische Rechtschreibung beibehalten. — Es bedarf wohl nicht der besonderen Bemerkung, dass Monge — welcher vom Standpunkte des wirtschaftlichen Erziehungswerkes aus als der bedeutendste Staatspädagoge der französischen Revolution angesehen werden muss — sich in den einleitenden Worten seiner Rede absichtlich einer Übertreibung schuldig gemacht hatte, um als übereifriger Reformator seine Landsleute zu erhöhter Anstrengung auf industriellem Gebiete anzuspornen. In Wahrheit handelte es sich vielmehr darum, die Überlegenheit der französischen Industrie noch zu steigern, als um die Einholung des angeblich weiter vorgeschrittenen Auslandes.

diminuer la main-d'oeuvre, ou de donner aux résultats des travaux plus d'uniformité et plus de précision; à cet égard, il faut l'avouer, nous avons beaucoup à puiser chez les nations étrangères.

On ne peut remplir toutes ces vues qu'en donnant à l'éducation nationale une direction nouvelle.

C'est, d'abord, en familiarisant avec l'usage de la géométrie descriptive tous les jeunes gens qui ont de l'intelligence, tant ceux qui ont une fortune acquise, afin qu'un jour ils soient en état de faire de leurs capitaux un emploi plus utile et pour eux et pour la nation, que ceux même qui n'ont d'autre fortune que leur éducation, afin qu'ils puissent un jour donner un plus grand prix à leur travail.

Cet art a deux objets principaux.

Le premier est de représenter avec exactitude, sur des dessins qui n'ont que deux dimensions, les objects qui en ont trois, et qui sont susceptibles de définition rigoureuse.

Sous ce point de vue, c'est une langue nécessaire à l'homme de génie qui conçoit un projet, à ceux qui doivent en diriger l'exécution, et enfin aux artistes qui doivent eux-mêmes en exécuter les différentes parties.

Le second objet de la géométrie descriptive est de déduire de la description exacte des corps tout ce qui suit nécessairement de leurs formes et de leurs positions respectives. Dans ce sens, c'est un moyen de rechercher la vérité; elle offre des exemples perpétuels du passage du connu à l'inconnu; et parce qu'elle est toujours appliquée à des objets susceptibles de la plus grande évidence, il est nécessaire de la faire entrer dans le plan d'une éducation nationale. Elle est non-seulement propre à exercer les facultés intellectuelles d'un grand peuple, et à contribuer par-là au perfectionnement de l'espèce humaine, mais encore elle est indispensable à tous les ouvriers dont le but est de donner aux corps certaines formes déterminées; et c'est principalement parce que les méthodes de cet art ont été jusqu'ici trop peu répandues, ou même presque entièrement négligées, que les progrès de notre industrie ont été si lents.

On contribuera donc à donner à l'éducation nationale une direction avantageuse, en familiarisant nos jeunes artistes avec l'application de la géométrie descriptive aux constructions graphiques qui sont nécessaires au plus grand nombre des arts, et en faisant usage de cette géométrie pour la représentation et la détermination des élémens des machines, au moyen desquelles l'homme, mettant à contribution les forces de la nature, ne se réserve, pour ainsi dire, dans ses opérations d'autre travail que celui de son intelligence.

Il n'est pas moins avantageux de répandre la connoissance des phénomènes de la nature, qu'on peut tourner au profit des arts.

Le charme qui les accompagne pourra vaincre la répugnance que les hommes ont en général pour la contention d'esprit, et leur faire trouver du plaisir dans l'exercice de leur intelligence, que presque tous regardent comme pénible et fastidieux.

Ainsi il doit y avoir à l'école normale un cours de géométrie descriptive.

Mais comme nous n'avons sur cet art aucun ouvrage élémentaire bien fait, soit parce qu'il n'a été pratiqué que d'une manière obscure par des citoyens dont l'éducation n'avoit pas été assez soignée, et qui ne savoient pas communiquer les résultats de leurs méditations, un cours simplement oral seroit pas communiquer les résultats de leurs méditations, un cours simplement oral seroit absolument sans effet. Il est donc nécessaire pour le cours de géométrie descriptive, que la pratique et l'exécution soient jointes à l'audition des méthodes.

Ainsi ceux des citoyens dont les études antérieures auroient été dirigées vers la géométrie, ou vers les autres sciences exactes, seront exercés dans des salles particulières aux constructions graphiques de la géométrie descriptive.

Les deux parties de cet art ont des méthodes générales, avec lesquelles les citoyens se familiariseront par l'usage de la règle et du compas, et sans lesquelles il seroit difficile qu'ils se missent en état de l'enseigner eux-mêmes.

Parmi les différentes applications que l'on peut faire de la méthode des projections, il y en a deux qui sont remarquables, et par leur généralité, et par ce qu'elles ont d'ingénieux; ce sont les constructions de la perspective, et la détermination rigoureuse des ombres dans les dessins. Ces deux parties peuvent être considérées comme le complément de l'art de décrire les objets. On y exercera ces citoyens, parce qu'étant destinés a conseigner un jour les procédés de la géométrie descriptive, il est nécessaire qu'ils en connoissent toutes les ressources.

Ensuite on appliquera la méthode des projections aux constructions graphiques, nécessaires au plus grand nombre des arts, tels que les traits de la coupe des pierres, ceux de la charpenterie etc.

Enfin le reste de la durée du cours sera employé, d'abord à la description des élémens des machines, afin d'en étudier les formes et les effets, et ensuite à celle des machines dont il est le plus important de répandre la connoissance, soit que les machines aient pour objet de donner au travail plus de précision et plus d'uniformité, soit qu'elles aient pour but d'employer à la production d'un certain travail les forces de la nature, et par là d'augmenter la puissance nationale.

La géométrie descriptive a deux objets; le premier, de donner les méthodes pour représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, savoir, longueur et largeur, tous le corps de la nature, qui en ont trois, longueur, largueur et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent étre définis rigoureusement.

Le second objet est de donner la manière de reconnoître d'après une description exacte les formes des corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent et de leur forme et de leurs positions respectives.

Nous allons d'abord indiquer les procédés qu'une longue expérience a fait découvrir, pour remplir le premier de ces deux objets; nous donnerons ensuite la manière de remplir le second."

Mit Recht wies Monge in dieser vom patriotischen Geiste durchwehten Rede darauf hin, dass, um die Fortschritte der Industrie zu beschleunigen, es vor allem nöthig sei, die öffentliche Erziehung in neue Bahnen zu lenken. Der große französische Gelehrte, der ein besonders warmes Herz für das industrielle Leben seines Vaterlandes hatte, wies insbesondere auf die Nothwendigkeit präciser materieller Arbeit im industriellen Leben hin und auf die Kenntnis der Naturerscheinungen für die mannigfaltigsten Industriezweige, sowie auf das Vertrautsein mit der gehörigen Verwendung der wichtigsten Hilfsmittel, welche technische Künste durch Verminderung der Handarbeit bei gleichzeitiger Vervollkommnung der Erzeugnisse liefern. [1])

Monges Vorträge über die neue Wissenschaft, welche in dem Werke „Géométrie descriptive, Leçons données aux Écoles normales, l'an III de la République" im Jahre 1795 zuerst im Druck erschienen, in demselben Jahre im „Journal des Écoles normales" aufgenommen und im Jahre 1798 oder 1799 (an VII de la République) als besonderer Band veröffentlicht wurden, behandelten das ganze Lehrgebäude der darstellenden Geometrie in fünf Capiteln und einem aus drei Theilen bestehenden Anhang. [2]) Fünfundzwanzig Tafeln mit fünfzig musterhaft ausgeführten Figuren, bei welchen die zweckentsprechenden und schönen Annahmen sofort ins Auge fallen, erleichtern das Verständnis der überaus klaren und fasslichen Erläuterungen. Der Geist dieses ersten Werkes über darstellende Geometrie

---

[1]) Vergl. die interessanten Artikel „Die Unterrichts-Politik in Frankreich" von Prof. Wilhem Exner. (Wiener-Zeitung von 7., 8. und 10. April 1894.) — Vergl. auch: „Wert und Bedeutung des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie an Mittelschulen". Vortrag vom Regierungsrath Dr. G. Ad. V. Peschka, ord. Professor an der k. k. tech. Hochschule in Wien. (Gehalten in der 42. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Wien im Mai 1893.) Leipzig 1894.

[2]) S. Monge, Géométrie descriptive. Paris, an VII, pag. 1—132.

hat sich nicht bloß über ganz Frankreich, sondern über alle civilisierten Länder verbreitet und bildet gegenwärtig ein unerschütterliches Fundament der realistischen Bildung, welche selbst in die entlegensten und niedrigsten Werkstätten unseres Erdballes, wo die Constructionskunst als sichere und unveränderliche Grundlage materieller Arbeit dienen soll, gedrungen ist. Dass dies so werden musste, hat Monge schon vor hundert Jahren in einem in der Einleitung zum vierten Capitel seiner Vorträge [1]) vorgekommenen und seither in glänzender Weise in Erfüllung gegangenen Ausspruche vorhergesagt: „L'exposition de cette méthode, considérée d'une manière abstraite, seroit suffisante pour le plus grand nombre des arts; car, si l'on prend pour exemples l'art de la coupe des pierres et celui de la charpenterie, les surfaces courbes que l'on y considère, et dont on peut avoir besoin de construire les intersections, forment ordinairement l'objet principal dont on s'occupe, et elles se présentent naturellement. Mais la géométrie descriptive devant devenir un jour une des parties principales de l'éducation nationale, parce que les méthodes qu'elle donne sont aussi nécessaires aux artistes que le sont la lecture, l'écriture et l'arithmétique, nous croyons qu'il est utile de faire voir par quelques exemples comment elle peut suppléer l'analyse pour la solution d'un grand nombre de questions, qui, au premier aperçu, ne paroissent pas de nature à devoir être traitées de cette manière.“

Der historisch interessante Lehrgang, den Monge vor hundert Jahren in seinen Vorträgen an der École normale befolgte, war folgender.

Das erste Capitel [2]) enthielt:

Nro. 1. Objet de la géométrie descriptive, pag. 5 (Definition der darstellenden Geometrie).

---

[1]) Ibid., pag. 89.

[2]) Vergl.: Rudolf Schnedar, Grundzüge der darst. Geometrie. I. Aufl. Brünn 1856. II. Aufl. Brünn 1859. S. 1—67. §§. 1—45. — Josef Streissler, Elemente der darst. Geometrie. I. Aufl. 1875. II. verb. Aufl. Brünn 1879. S. 36—120. III. gek. Aufl. Brünn 1894. S. 1—55. — Irenäus Kreuszel, Lehrbuch der darst. Geometrie. Brünn 1876. S. 84—90. — Carl Güntner, Lehrb. d. darst. Geometrie. II. verb. Aufl. Wien 1878, S. 24—73. — Josef Menger, Lehrb. der darst. Geometrie. Wien 1882. S. 12—105. — Franz Smolík, Elemente der darst. Geometrie. Prag 1882 S. 1—98. — Vergl. ferner die Lehrbücher der darst. Geometrie von F. A. Heissig (Wien 1859), K. Klekler (Leipzig 1877), Menger-Zian (italienisch). V. Jarolímek (böhmisch, Prag 1875—77), M. Lazarski, (polnisch, Lemberg 1889), M. Creizenach, Anfangsgründe der darst. Geometrie, Mainz 1821. — W. von Alemann, Unterlieutenant im k. k. Pionniercorps, Elemente der entwerfenden Geometrie, Wien 1825. — Guido Schreiber, Lehrbuch der darst. Geometrie nach Monges Géométrie descriptive, Karlsruhe und Freiburg 1828—29.

Nr. 2—9. Considérations d'après lesquelles on détermine la position d'un point situé dans l'espace (Fig. 1—3), pag. 5—15. (Betrachtungen, nach welchen man die Lage eines Punktes im Raume bestimmt.)

Nr. 10. Comparaison de la géométrie descriptive avec l'algèbre, pag. 15—16. (Vergleichung der darstellenden Geometrie mit der Algebra.)

Nr. 11—13. Convention propre à exprimer les formes et les positions des surfaces. Application au plan, pag. 16—21. (Grundsätze zur Darstellung der Form und Lage der Flächen. Anwendung derselben auf die Ebene.)

Nachdem Monge in Nr. 1—9, pag. 5—14 (Fig. 1—3) die Darstellung des Punktes und der geraden Linien besprochen und in Nr. 11, pag. 16 darauf hingewiesen hatte, dass das Darstellungsgesetz eben-

— B. Gugler, Lehrbuch der beschreibenden Geometrie, Nürnberg 1841, IV. Aufl. Stuttgart 1880. — W. von Engerth, Grundzüge der darst. Geometrie, Wien 1843. — J. Hönig, Anleitung zum Studium der darst. Geometrie, Wien 1845. — G. Bellavitis, Lezioni di geometria descrittiva, Padova 1851. — F. Klingenfeld, Darst. Geometrie, Nürnberg 1851 u. 1871—74; — K. Pohlke, Darst. Geometrie, Berlin 1860 u. 1876: etc. etc., sowie die in der Folge genannten Werke französischer Autoren. — Vergl. insb.: Dr. B. Gugler, Lehrbuch der descriptiven Geometrie Nürnberg 1841. S. 1—54 und S. 180—213. — J. de la Gournerie, Traité de Géométrie descriptive. Ie Partie Paris 1860. Articles 1—64 und 86—110. — Dr. W. Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 2. Aufl. Leipzig 1875. S. 154 - 178. — Dr. G. A. V. Peschka, Darstellende und projective Geometrie nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft. I. Bd. Wien 1883. S. 276—340. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. I. Bd. Leipzig 1884. S. 62—98 etc. — Vergl. a.: J. Choura, Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden Geometrie. Wien 1882 und Franz Tilšer, Kritische Bemerkungen zur Einführung in die Anfangsgründe der Géométrie descriptive. Wien 1883. — Vergl. ferner die Werke und Lehrbücher über darstellende Geometrie von: G. H. Dufour (Genève-Paris 1827), S. Haindl (München 1835), J. M. Ziegler (Winterthur 1843), C. Kuhn (Augsburg 1844). L. Mossbrugger (Zürich 1845), C. Pasi (Pavia 1844), J. Nigris (Pressburg 1853), C. Th. Anger (Danzig 1858), W. H. Behse (Halle 1866), J. Schlotke (Hamburg 1867), C. Riess Stuttgart 1871), G. Kosak, (Wien 1871), W. F. Pierce (Treatise on practical solidor descriptive geometry. London 1873), A. Menetrier (Eléments de géom. descr. Mons 1873), R. Sturm (Elemente der darst. Geom. Leipzig 1874), Pillet (Cours de géom. descr. Paris 1875—76), U. Artus (Éléments de géom. descr. Paris 1876), A. Javary (Recueil d'épurns de géom. descr. Paris 1876), E. Lebon (Traité élém. de géom. descr. Paris 1876), N. Breithof (Cours de géom. descr. Louvain 1876). C. Margerie et E. Racine (Traité de géom. desc. Paris 1883), E. Prix (Elemente d. darst. Geom. Leipzig 1883), C. Seidelin (Forelaesninger over descriptiv-geometri, Kjöbenhavn 1886—87), J. Vonderlinn (Stuttgart 1888), G. Hauck (Übungsstoff f. d. prakt. Unterricht in der Projectionslehre. Berlin 1888), W. Pözl (Elemente der darst. Geometrie. München 1890), G. D. Diesener (Darst. Geometrie, II. Aufl. Halle 1891), J. Kuglmayr (Die Projectionslehre. Wien 1891), Dr. K. Rohn und Dr. E. Papperitz (Lehrbuch der darst. Geometrie, Leipzig 1893—96), etc. etc.

flächiger Körper[1]) nicht auf runde Körper anwendbar sei, bespricht er in Nr. 12 und 13, pag. 18—21 das Entstehungsgesetz krummer Flächen, und zeigt, dass sich jede krumme Oberfläche auf mindestens zweifache Weise durch Bewegung gerader oder krummer Linien (génératrix) nach einem bestimmten Gesetze erzeugen lasse und gelangt schließlich zu dem Ergebnis, dass eine krumme Fläche unendlich viele Erzeugungsweisen zulasse. Monge erläutert nun das Entstehungsgesetz für cylindrische und conische Flächen, ferner für Rotationsflächen, sowie für die Ebene selbst und gelangt auf diese Weise zu den Flächenfamilien, welche demselben Erzeugungsgesetz ihre Entstehung verdanken. Punkte auf solchen Flächen ergeben sich durch den Schnittpunkt zweier Erzeugenden (génératrices) und werden dementsprechend in ihren Projectionen bestimmt.

Nr. 14—22. Solutions de plusieurs questions élémentaires relatives à la ligne droite et au plan (Fig. 4—11), pag. 21—29. (Lösung mehrerer Elementaraufgaben, betreffend die gerade Linie und die Ebene. Den Schluss des ersten Capitels (pag. 21—29), Fig. 4—11) bildet die Lösung von neun Elementaraufgaben, betreffend die gerade Linie und die Ebene, nämlich: 1. Construction der Projectionen einer durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden gezogenen parallelen Geraden. 2. Bestimmung der Spuren einer durch einen Punkt zu einer gegebenen Ebene gelegten parallelen Ebene. 3. Bestimmung der von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Ebene gefällten Normalen und ihrer Durchstoßpunkte mit der Ebene. 4. Bestimmung der Spuren der durch einen Punkt auf eine gegebene Gerade gefällten Normalebene. 5. Bestimmung des Neigungswinkels zweier Ebenen, welche durch ihre Spuren gegeben sind. 6. Bestimmung des Neigungswinkels zweier Ebenen, welche durch ihre Spuren gegeben sind. 7. Bestimmung des Neigungswinkels zweier sich schneidenden und durch ihre Projectionen be-

[1]) S.: Die Darstellung und den Schnitt ebenflächiger oder eckiger Körper in Schnedars Lehrb. S. 71—101. — Streisslers, II. Aufl. S. 132—165; III. Aufl. S. 58—84. — Kreuszel, S. 98—132. — Güntner, S. 92—96. — Menger, S. 112—143. — Smolik, S. 110—150 etc. — S. a.: J. Kuglmayr, Die Projectionslehre. Wien 1891. S. 60—103. — Vergl. insb.: Dr. B. Gugler, Lehrbuch der descriptiven Geometrie. Nürnberg 1841. S. 54—65 u. S. 76—129, J. de la Gournerie, Traité de Géométrie descriptive. Ie Partie. Paris 1860. Articles 25—32 et IIe Partie. Paris 1862. Art. 1—11. — Dr. W. Fiedler, Die darstellende Geometrie. 2. Aufl. Leipzig 1875. S. 179—194. (3. Aufl. Leipzig 1883, 1885 u. 1888.) — A. Mannheim, Cours de Géométrie descriptive de l'École polytechnique. Paris 1880, pag. 1—75. (IIe édit. Paris 1886). — Dr. G. Peschka, Darstellende und projective Geometrie. I. Bd. Wien 1883. S. 496—569. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig 1884. S. 105—157.

stimmten Geraden. 8. Bestimmung des Neigungswinkels einer Geraden mit einer Ebene. 9. Reduction eines Winkels im Raume auf den Horizont.

Das zweite Capitel [1]) behandelt:

Nr. 23—26. Des plans tangens aux surfaces courbes, et de leurs normales, pag. 29—32. (Von den berührenden Ebenen und den Normalen der krummen Flächen.)

Nr. 27—31. Méthode pour mener des plans tangens par des points donnés sur les surfaces (Fig. 12—15), pag. 32—39. (Bestimmung der berührenden Ebenen, welche durch auf den krummen Flächen gegebene Punkte gehen.)

Nr. 32. Des conditions qui déterminent la position du plan tangent à une surface courbe quelconque; observation sur les surfaces développables, pag. 39—41. [2]) (Von den Bedingungen, welche die Lage der berührenden Ebene irgend einer krummen Fläche bestimmen; Betrachtung bei den abwickelbaren Flächen.)

Nr. 33—34. Des plans tangens aux surfaces, menés par des points donnés dans l'espace, pag. 41—43. (Von den Berührungsebenen, welche durch außerhalb der Fläche gelegene Punkte gehen.)

Nr. 35—44. Du plan tangent à la surfaces d'une ou de plusieurs sphères. (Bestimmung der Berührungsebene an eine oder mehrere Kugeln.) Propriétés remarquables du cercle, de la sphère, des sections coniques

---

[1]) Vergl. die Lehrbücher von: R. Schnedar, § 79, S. 143; §§ 89—90. S. 158—161; §§ 100, 101, 107—109, S. 185, 186—220. — J. Streissler, II. Aufl. S. 166—191, 205—221. — III. Aufl. S. 102—138. — J. Kreuszel, S. 132—141, 147—158, 175—204. — C. Güntner, S. 96—138. — Menger, S. 175—220. — F. Smolík, S. 152—199 etc. etc. — Vergl. insb.: B. Gugler, Lehrbuch der descr. Geometrie. Nürnberg 1841. S. 251—304. — J. de la Gournerie, Traité de Géom. descr., Ie Partie, Articles 46—102. Art. 33—39. IIe Partie, Art. 11—24. — Dr. W. Fiedler, Die darstellende Geometrie, S. 211—250 u. S. 319—341; ferner S. 441—475. — A. Mannheim, Cours de Géom. descr., IIe Partie, pag. 155—223. — Dr. G. Peschka, Darstellende und proj. Geometrie, II. Bd. Wien 1884, S. 170—198 u. S. 3—170. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geom. II. Bd. Leipzig 1887, S. 1—28 u. S. 103—140. S. a. I. Bd. Leipzig 1884, S. 157—184.

[2]) Vergl.: Schnedar, S. 144—152, 185—199. — Streissler, II. Aufl. S. 166—199; III. Aufl. 102—126. — J. Kreuszel, S. 133—141 u. 175—186. — C. Güntner, S. 100—123. — J. Menger, S. 185—192. — F. Smolík. S. 161—187. — Vergl. insb.: Dr. B. Gugler, Lehrbuch der descr. Geometrie. Nürnberg 1841. S. 214—221 u. S. 259—262. — J. de la Gournerie, Traité de Géom. descr. IIe Partie. Paris 1862. Articles 44—64. — Dr. W. Fiedler, Die darstellende Geometrie, S. 216—250. — A. Mannheim, Cours de Géom. descr., pag. 210—237. — Dr. G. Peschka, Darstellende und projective Geometrie, II. Bd. S. 380—433, S. 433—529 u. S. 529—574. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geom. II. Bd. Leipzig 1887; S. 28—43, S. 43—89 u. S. 373—410.

et des surfaces courbes du second dégré (Fig. 16—22), pag. 44—55. (Bemerkenswerte Eigenschaften des Kreises, der Kugel, der Kegelschnitte und der Flächen zweiter Ordnung.)

Nr. 45—47. Du plan tangent à une surface cylindrique, conique, à une surface de révolution, par des points donnés hors de ces surfaces (Fig. 23—25), pag. 55—59. (Von der Berührungsebene an eine cylindrische, conische Fläche und an eine Umdrehungsfläche durch Punkte, welche außerhalb derselben gelegen sind.)

Nachdem Monge in Nr. 23—27 des zweiten Capitels die Theorie der Berührungsebene an krumme Flächen erläutert hat, werden in Nr. 28—30 (Fig. 12, 13 und 14) Berührungsebenen an Cylinder-, Kegel- und Rotationsflächen construiert, welche durch auf den Flächen liegende Punkte hindurchgehen. In Nr. 31 (pag. 37, Fig. 15) wird das Problem der Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier sich kreuzenden Geraden gelöst. Monge führt dieses Problem auf die Construction eines Cylinders zurück, der die eine gegebene Gerade zur Achse hat, und von einer durch die zweite Gerade gelegten Ebene berührt wird, bemerkt aber schließlich, dass weder der Cylinder noch die berührende Ebene zur Lösung dieser Aufgabe nöthig seien. Die Aufgaben Nr. 32—35, pag. 39—44, beschäftigen sich mit der Construction von Berührungsebenen an Flächen, welche durch außerhalb derselben gelegene Punkte gehen. In Nr. 34 werden die Glanzpunkte beleuchteter, krummer Flächen erörtert und ihre Bestimmung für die Kugel gezeigt. Die Construction der Berührungsebene, welche durch eine gegebene Gerade an eine Kugel gelegt wird, wird nach zwei Methoden in den Aufgaben Nr. 36 und 37, pag. 44—49 (Fig. 16 und 17) durchgeführt. Die bisherigen Entwicklungen benützt Monge zur Entdeckung bemerkenswerter Eigenschaften des Kreises, der Kugel, der Kegelschnitte und der Flächen zweiter Ordnung, welche in den Aufgaben Nr. 38—44, pag. 49—55 in klarer und eleganter Weise besprochen werden. Nachdem Monge in Nr. 39, pag. 50 (Fig. 18 und 19) den Satz entwickelt hat: „Ist ein Kreis und eine Gerade gegeben, und zieht man von den einzelnen Punkten der Geraden an den Kreis Tangenten, so schneiden sich die Sehnen zusammengehöriger Berührungspunkte in einem Punkte, welcher in dem auf der Geraden normalen Halbmesser liegt", und auf pag. 51 (Fig. 20) auf den reciproken Satz hingewiesen hat: „Zieht man durch einen innerhalb des Kreises gelegenen Punkt Sehnen, construiert in ihren Schnittpunkten mit dem Kreise Tangenten, so liegen die Schnittpunkte zusammengehöriger Tangenten in einer Geraden, welche auf dem Halbmesser des gegebenen Punktes normal steht", dehnt er diese beiden Sätze, welche die Theoreme über Pol und Polare enthalten —

ohne jedoch die jetzt gebräuchlichen Namen anzuwenden — auf Curven und Flächen zweiter Ordnung aus. Das Ergebnis dieser durch ihre Einfachheit und Schärfe geführten geometrischen Betrachtungen sind die schönen, auf pag. 52 (Nr. 40) entwickelten allgemeinen Theoreme [1]: „Ist eine beliebige Fläche zweiter Ordnung gegeben, construiert man von einem beliebigen Punkte an diese Flächen die berührende Kegelfläche, und bewegt sich die Spitze der berührenden Kegelfläche auf einer Geraden, so gehen die Ebenen der Berührungscurven beider Flächen immer durch eine Gerade, welche durch die Berührungspunkte der beiden Ebenen bestimmt ist, welche durch die die Kegelspitzen enthaltende Gerade berührend an die Fläche der zweiten Ordnung gelegt werden" und reciprok „Beschreibt die Spitze einer eine Fläche zweiter Ordnung berührenden Kegelfläche eine Ebene, so gehen die Ebenen der Berührungscurven immer durch einen bestimmten Punkt". [2])

In Nr. 41, pag. 52 (Fig. 21) werden die Berührungsebenen an zwei Kugeln construiert, und in Nr. 42 und 43, pag. 53—54 löst Monge mittels umgeschriebener Kegelflächen die schöne Aufgabe, an drei ihrer Größe und Lage nach bestimmte Kugeln die Berührungsebene zu legen. Er findet auf pag. 54, dass acht verschiedene Ebenen dieser Bedingung Genüge leisten. Zwei Ebenen berühren die Kugeln an ihren Außenseiten, während die sechs anderen Berührungsebenen so gelegen sind, dass sie zwei Kugeln an der einen Seite und die dritte Kugel an der entgegengesetzten Seite berühren. In Nr. 44 (Fig. 22) entwickelt Monge den Satz von den Ähnlichkeitsachsen dreier beliebigen Kreise und zeigt, dass die drei Schnittpunkte der äußeren Tangenten in einer Geraden liegen, während zwei der drei Schnittpunkte der inneren Tangenten mit je einem Schnittpunkt der äußeren Tangenten wieder in einer Geraden liegen, so dass diese sechs Schnittpunkte im Durchschnitte von vier Geraden liegen. Indem Monge mit den Worten: „Enfin cette proposition n'est qu'un cas particulier de la suivante, qui a lieu dans les trois dimensions" (pag. 58) darauf hinweist, dass die in Rede stehenden Theoreme in der Ebene nur besondere Fälle von Theoremen im Raume sind, dehnt er auch dieses Theorem sofort auf

---

[1]) Vergl.: G. Schreiber, Cursus der darst. Geom. I. Th. Karlsruhe und Freiburg 1828, S. 99—101.

[2]) Vergl.: W. Fiedler, Cyklographie. Leipzig 1882, S. 54—105 u. S. 156 bis 168.

Anmerkung: Den Beweis dieses allgemeinen Theorems lieferte Brianchon in seinem „Mémoire sur les surfaces courbes du second degré". Journal de l'École polytech. Cahier XIII, Paris 1806, pag. 297.

den Fall von vier Kugeln aus und gelangt auf pag. 55 zu dem schönen, stereometrischen Lehrsatze: „Quatre sphère quelconques étant données de grandeurs et de positions dans l'espace, si l'on conçoit les six surfaces coniques qui sont circonscrites extérieurement à ces sphères considérées deux à deux, les sommets des six cônes seront dans un même plan et aux intersections de quatre droites; et si l'on conçoit les six autres surfaces coniques circonscrites intérieurement, c'est-à-dire, qui ont leurs sommet entre les centres de deux sphères, les sommets de ces six nouveaux cônes seront trois par trois dans un même plan avec trois des premiers". [1])

Sind vier der Größe und Lage nach gegebene Kugeln bestimmt, und denkt man sich die sechs Kegelflächen, welche je zweien dieser

[1]) Vergl. die fünfzehn Berührungsaufgaben über die Kugel in Fermats Abhandlung „De contactibus sphaericis". (Varia opera mathematica, Tolosae 1679, Vol.) — S. a.: E. Brassine, Précis des oeuvres mathématiques de Fermat. (1595 bis 1665). Paris 1853 und Oeuvres de Fermat, publiées par les soins de M. M. Paul Tannery et Charles Henry. Tome I. et II. Paris 1891—94.

Siehe auch die diesbezügliche Abhandlung „Über die Kugeln" in Guido Schreibers „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" nach Monges Géométrie descriptive. II. Lieferung. Karlsruhe und Freiburg 1829. S. 300—306 u. Dr. B. Gugler, Lehrbuch der descriptiven Geometrie. Nürnberg 1841. S. 304—311. — S. a.: Th. Olivier, Cours de Géométrie descriptive. Paris 1852—53.

Anmerkung: Monges Nachfolger im Lehramte, M. Hachette, erweiterte das Berührungsproblem für die Kugeln, indem er jene Kugeln bestimmte, welche vier der Lage und Größe nach gegebene Kugeln berühren und fand sechzehn Kugeln, welche dieser Bedingung genügen. (S.: M. Hachette, „Mémoire sur le contact des sphères" in der Correspondance sur l'École impériale polytechnique. Tome premier, pag. 19. Paris 1804—1808. (Seconde Édit. Paris 1813), pag. 15—28 und „De la sphère qui touche quatre sphères données". Correspondance. Paris 1809—13. II[e] vol. pag. 421 et 425—429; III[e] vol. Paris 1814, pag. 21—22. — Dupin fand (Corresp. sur l'École polyt. vol. II[e] pag. 420 und später Applications de Géométrie et de Mécanique. Paris 1822) als die Enveloppe einer Kugel, welche immer drei gegebene feste Kugeln tangiert, die nach ihm benannte Cyclide, eine Fläche der vierten Ordnung, deren Krümmungslinien Kreise sind. — S. a.: Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes. II. Th. Leipzig 1880, S. 446—464 und H. Schubert: „Eine geometrische Eigenschaft der sechzehn Kugeln, welche vier beliebig gegebene Kugeln berühren." Zeitschrift für Mathematik und Physik. XIV. Jahrg. Leipzig 1869, S. 506. S. f.: „Theorie der Kugelberührung und der Ähnlichkeitspunkte" und „Die Dupinsche Cyclide" in Dr. G. Peschkas „Darstellende und projective Geometrie". III. Bd. Wien 1884., S. 375—459, S. 267—297, bez. 297—310 und Dr. Th. Reyes „Synthetische Geometrie der Kugeln und der linearen Kugelsysteme". Leipzig 1879. S 49. — S. insb.: Die Lösung der Constructionsaufgabe: „An drei gegebene Kugeln ist eine gemeinschaftliche Berührebene zu legen" in Dr. G. A. V. Peschkas „Darstellende und projective Geometrie". III. Bd. Wien 1884, S. 398. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geometrie. II. Bd. Leipzig 1887, S. 384. — Dr. B. Gugler, Lehrbuch der descript. Geometrie Nürnberg 1841, S. 309—311.

Kugeln von außen umgeschrieben sind, so liegen die Spitzen dieser sechs Kegelflächen in einer Ebene und im Schnitte von vier Geraden; denkt man sich hingegen die sechs Kegelflächen, welche je zweien dieser Kugelflächen von innen umgeschrieben sind, so liegen die zwischen je zwei Kugelmittelpunkten liegenden Kegelspitzen zu dreien mit drei Spitzen der ersteren Kegelflächen in einer Ebene.

Offenbar hat hier Monge, welcher diese Entwicklungen durch ihre Neuheit überraschend findet, bereits jenes Gebiet der neueren Geometrie berührt, welches bald darauf seine berühmten Schüler Carnot, Brianchon, Gaultier, Gergonne und Poncelet in den Theorien der Transversalen, Polaren, reciproken Polaren und den projectivischen Eigenschaften der Figuren weiter ausgebildet, und welche insbesondere der geniale Poncelet als Princip der Continuität durch Einführung imaginärer Größen zu so hervorragender Bedeutung erhoben hat. [1])

Obwohl die Methode der darstellenden Geometrie rein synthetischer Natur ist, so fand es Monge aus wissenschaftlichen und pädagogisch-didaktischen Gründen doch für angezeigt, zu wiederholtenmalen auf den innigen Zusammenhang der darstellenden Geometrie mit der Algebra hinzuweisen, und jene ebenso interessanten als lehrreichen Beziehungen zwischen diesen beiden Disciplinen anzudeuten, welche später in der Theorie der Formen so geistvoll zum Ausdruck gebracht wurden. Schon bei der Darstellung eckiger Körper und ihren Constructionsaufgaben findet Monge mehrfach Gelegenheit (Nr. 10, pag. 15—16) zwischen den Methoden der Darstellung in der Geometrie mit jenen in der Analysis, insbesondere in der Lehre von den Gleichungen, innige Beziehungen aufzustellen:

---

[1]) Siehe: I. Abschnitt, S. 19 dieser math.-histor. Studie. — General Jean Victor Poncelet, geb. am 1. Juli 1788 zu Metz, gestorben am 22. December 1867 in der Nähe von Paris, war einer der hervorragendsten Schüler der École polytechnique. Im Jahre 1812 nahm er als Geniehauptmann (capitain du génie) an dem Feldzuge Napoleons gegen Russland Antheil, fiel nach dem unglücklichen Uebergange über die Beresina in russische Kriegsgefangenschaft, musste durch vier Monate hindurch durch die unwirtsamen Steppen den Weg nach Saratow an der Wolga zurücklegen, wo er erkrankt ankam, und durch zwei Jahre hindurch bis 1814 die Zeit in russischen Kerkern zubrachte. In der Muße dieses Kerkerlebens legte Poncelet den Grund zu seiner synthetischen Geometrie „Traité des propriétés projectives des figures", welche im Jahre 1822 in Paris erschien, und ein Grundwerk der neueren Geometrie bildet. (S.: M. Chasles, Rapport sur les progrès de la géométrie. Paris 1870, pag. 89, etc. — E. u. U. Dühring, Neue Grundmittel und Erfindungen. Leipzig 1884, S. 467. — Heller, Geschichte der Phys., II. Bd. pag. 604.)

„Ce n'est pas sans objet que nous comparons ici la géométrie descriptive à l'algèbre; ces deux sciences ont les rapports les plus intimes. Il n'y a aucune construction de géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en analyse; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectrale en géométrie.

Il seroit à désirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble: la géométrie descriptive porteroit dans les opérations analytiques les plus compliquées l'évidence qui est son caractère, et, à son tour, l'analyse porteroit dans la géométrie la généralité qui lui est propre."

Bei der Bestimmung des Schnittes krummer Flächen benützt Monge in Nr. 49 und 50, pag. 60—62 abermals die Gelegenheit, um auf die innigen Beziehungen algebraischer Operationen und geometrischer Constructionen hinzuweisen.

So entspricht z. B. das Verfahren der Elimination zwischen drei Gleichungen mit drei Unbekannten in der Algebra der Bestimmung der Projectionen der Schnittcurven der durch die Gleichungen in Beziehung auf drei gegebene Projectionsebenen dargestellten Flächen in der descriptiven Geometrie.

Aber dieses Entsprechen der algebraischen Operationen und der geometrischen Constructionen, beschränkt sich nicht bloß auf das hier Angeführte; es besteht überall:

„La correspondance entre les opérations de l'analyse et les méthodes de la géométrie decscriptive; ne se borne pas à ce que nous venons de rapporter; elle existe par-tout. [1]"

Die Bewegungen der Punkte, Curven und Flächen im Raume entsprechen algebraischen Operationen, deren Resultaten wieder die im Raume dargestellten Gebilde entsprechen, und jede algebraische Operation mit drei Veränderlichen ist der Ausdruck der von ihr vorgeschriebenen Bewegung im Raume. —

In den Aufgaben Nr. 45 und 46, pag. 65—56 (Fig. 23 und 24) werden durch beliebige Punkte im Raume Berührungsebenen an Cylinder- und Kegelflächen construiert, während in der letzten Aufgabe dieses Capitels (Nr. 47, pag. 56—59, Fig. 25) durch eine gegebene Gerade im Raume die Berührungsebene an eine Rotationsfläche gelegt wird.

---

[1] S.: Monge, Géométrie descriptive. Paris, an VII, pag. 62.

Der Gegenstand des dritten Capitels [1]) war:

Nr. 48. Des intersections des surfaces courbes. Définitions des courbes à double courbure, pag. 59—60. (Von den Schnitten der krummen Flächen. Erklärung der Curven mit doppelter Krümmung.)

Nr. 49—50. Correspondance entre les opérations de la géométrie descriptive et celles de l'élimination algébrique, pag. 60—62. (Vergleichung der Operationen in der darstellenden Geometrie mit den Eliminationen in der Algebra.)

Nr. 51—56. Méthode générale pour déterminer les projections des intersections des surfaces. Modification de cette méthode dans quelques cas particuliers (Fig. 26), pag. 62—66. (Allgemeine Methode, um die Projectionen der Schnitte krummer Oberflächen zu bestimmen. Vereinfachung dieser Methoden in einigen besonderen Fällen.)

Nr. 57—58. Des tangentes aux intersections des surfaces, pag. 66—68. (Von den Tangenten an die Durchschnitte krummer Flächen.)

Nr. 59—83. Intersections des surfaces, cylindrique, conique, etc. Développement de ces intersections lorsque l'une des surfaces aux quelles elles appartiennent est développable (Fig. 27—35), pag. 68—86. (Schnitte der Flächen, cylindrische Flächen, Kegelflächen, etc. Abwicklung dieser Schnitte, wenn eine der Flächen, der sie angehören, eine abwickelbare Fläche ist.)

Nr. 84—87. Méthode de Roberval pour mener une tangente à une courbe qui est donnée par la loi du mouvement d'un point générateur. Application de cette méthode à l'ellipse et à la courbe résultante de l'intersection de deux ellipsoïdes de révolution, qui ont un foyer commun (Fig. 36—37), pag. 86—88.

(Methode des Roberval, um an eine durch das Bewegungsgesetz ihrer Punkte bestimmte Curve eine Tangente zu construieren.

---

[1]) Vergl.: Schnedar, §§ 91—99, S. 163—184, §§ 110—111, S. 221—238; ferner §§ 60—78, S. 102—140. — J. Streissler, II. Aufl. S. 166—199, 205 und S. 221—235; ferner S. 9—35; III. Aufl., S. 139—150. — J. Kreuszel, S. 155—173, 204—220 u 1—32. — C. Günter, S. 100—143, 2—18 u. 96—100. — Menger, S. 175—220, 239—268; ferner S. 150—161. — Smolík, S. 159—236, ferner S. 152. — J. Kuglmayr, S. 107, 118, 146, etc. etc. — Verg. insb.: B. Gugler, Lehrbuch der descr. Geom., S. 311—338. — J. de la Gournerie, Traité de Géométrie descr. Ie Partie. Paris 1860. Articles 53—71, 83—102 u. Art. 33—39. — Dr. W. Fiedler, Die darstellende Geometrie. S. 211—250, S. 319—400 u. S. 452—471. — A. Mannheim, Cours de Géom. descr., pag. 155—232, pag. 285—400. — Dr. G. Peschka, Darstellende und projective Geometrie. II. Bd. Wien 1894, S. 437—502 und II. Bd. S. 375—746. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geom. II. Bd. Leipzig 1887. S. 43—140 u. S. 162—194.

Anwendung dieser Methode auf die Ellipse und auf die Schnittcurve zweier Rotationsellipsoide, welche einen gemeinsamen Brennpunkt haben.)

Monge betrachtet in diesem Capitel (Nr. 54—58, pag. 62—68, Fig. 26) die Raumcurve als Schnitt zweier Flächen und nennt sie eine doppeltgekrümmte Curve, weil sie an den Krümmungen beider Flächen theilnimmt. Zur Construction der Schnittcurven zweier krummen Flächen genügt im Allgemeinen die Anwendung ebener Hilfsflächen, doch bietet in vielen Fällen die Anwendung krummer Hilfsflächen, z. B. concentrischer Kugelflächen, namhafte Vortheile.

Die Tangente in einem Punkte der Schnittcurve ist der Schnitt der Tangentialebenen beider Flächen für diesen Punkt, während die Normalebene der Schnittcurve durch die Normale der beiden Flächen in dem gegebenen Punkte bestimmt ist (Nr. 57 und 58). Diese Constructionen werden an der Schnittcurve zweier Kegelflächen zweiter Ordnung durchgeführt. (Fig. 26.)

Es wird nun in Nr. 59—68, pag. 68—73 (Fig. 27 und 28) der Schnitt einer cylindrischen Fläche mit einer Ebene, in Nr. 69—72 pag. 73—75 (Fig. 29) einer Kegelfläche mit einer Ebene von bestimmter Lage construiert, für Punkte der Schnittcurve die Tangentenconstruction durchgeführt, und die wahre Größe der Schnittfigur gefunden. Die Aufgabe Nr. 73, pag. 75 beschäftigt sich mit der Construction der Schnittcurve zweier Kreiskegel mit parallelen Achsen; in Nr. 74, pag. 75 wird wieder die Tangente an die gemeinsame Schnittcurve bestimmt, während sich die Aufgabe Nr. 75, pag. 76 mit der Abwicklung der Schnittcurve beschäftigt.

In Nr. 76—77, pag. 77—79 (Fig. 30) wird das Problem des Schnittes zweier Kegelflächen und die Tangentenconstruction der Schnittcurve unter der Voraussetzung beliebiger Grundlinien, also allgemein gelöst. Die Aufgaben Nr. 78 und 79, pag. 79—82 (Fig. 31) beschäftigen sich mit der Construction der Schnittcurve einer Kegelfläche von beliebiger Basis mit einer Kugel, und mit der zugehörigen Tangentenconstruction. Die Abwickelung einer Kegelfläche mit beliebiger Basis sammt einer auf der Kegelfläche befindlichen Curve wird in Nr. 81, pag. 82 (Fig. 32 und 33) gezeigt, während die Construction des Schnittes zweier allgemeinen Cylinderflächen in Nr. 82, pag. 83 (Fig. 34) durchgeführt wird. Hierauf construiert Monge in Nr. 83, pag. 85 (Fig. 35) den Schnitt zweier Rotationsflächen (Ellipsoide), deren Achsen sich schneiden, mittels einer concentrischen Kugelschar, also nach einer Methode, welche noch heute zu den elegantesten gehört. Am Schlusse des dritten Capitels, Nr. 84, pag. 85 weist Monge auf die zahlreichen

Anwendungen hin, welche Roberval [1]) von seiner Methode der Tangentenconstruction gemacht hat, bevor Descartes die Algebra auf die Geometrie angewendet hatte; dehnt in Nr. 86, pag. 87 (Fig. 36) Robervals Methode auf doppeltgekrümmte Curven aus und erläutert dieselben in Nr. 87, pag. 88 (Fig. 36) an einem der Ellipse entsprechenden Raumproblem.

Das vierte Capitel [2]) behandelte:

Nr. 88—102. Applications des intersections des surfaces à la solution de diverses questions (Fig. 38—42), pag. 88—104. (Anwendung der Schnitte der Flächen zur Lösung verschiedener Aufgaben.)

In der Einleitung zum vierten Capitel bespricht Monge unter Hinweis auf die große Bedeutung der descriptiven Geometrie im allgemeinen und der Theorie der Schnitte von Flächen insbesondere nicht bloß für den Steinschnitt und die Holzconstructionen, sondern auch für die größte Zahl der Künste und weist der descriptiven Geometrie in der Zukunft einen noch größeren Einfluss auf das sociale Leben der Völker zu, den er in jenem historisch-denkwürdigen Ausspruche zum Ausdrucke bringt, welchen wir an die Spitze dieser mathematisch-historischen Studie gestellt haben.

Aber auch bei der Lösung von wissenschaftlichen Fragen, wie z. B. in der analytischen Geometrie und ihren Anwendungen, bildet die descriptive Geometrie eine wertvolle Hilfswissenschaft.

Der große Geometer betont beim Übergang auf die Aufgaben über die sogenannten geometrischen Örter die genetische und verständnismäßige Entwicklung in der constructiven Geometrie, und warnt förmlich vor der Behandlung dieses Gegenstandes ohne organischen Zusammenhang, da nur dann diese Wissenschaft einem größeren Kreise von Talenten zusagen und einer größeren Zahl von Menschen zugänglich und nutzbringend gemacht werden könne. Nur auf diesem Wege könne eine mittelbare höhere Belehrung des Volkes erzielt und der Fortschritt in den Wissenschaften beschleunigt werden.

Wiederholt weist Monge auf den organischen Zusammenhang gewisser Raumprobleme mit jenen in der Ebene hin und war somit bahnbrechend für jenen Geist der Geometrie, durch welchen — drei Decennien später — der große deutsche Geometer Steiner [3]) in seiner

---

[1]) S.: Mémoires de l'Académie des sciences, antérieurs à 1669.

[2]) Vergl.: Die diesbezüglichen Aufgaben über die Kugel in den genannten Lehrbüchern.

[3]) Jakob Steiner, der erste Geometer unseres Jahrhundertes, wurde am 18. März 1796 in Utzenstorf, Kanton Bern, als der Sohn eines nichts weniger als schulfreundlich gesinnten Landwirtes geboren. Infolge dieses Umstandes lernte

„Systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" durch Erforschung solcher räumlichen Fundamental-

Deutschlands größter Geometer erst im 14. Lebensjahre schreiben. Gegen Wunsch seines Vaters wählte Steiner den Lehrberuf als sein Lebensziel und gieng nach Iferten (Yverdon im Canton Waadt), wo der berühmte deutsche Pädagoge Pestalozzi in dem altehrwürdigen, vom Herzog Konrad von Zähringen im Jahre 1185 erbauten Schlosse ein Pädagogium errichtet hatte, das sich wegen seiner Erfolge eines europäischen Rufes erfreute. Hier erhielt Steiner seine erste wissenschaftliche Bildung und wirkte auch als Lehrer. Im Jahre 1818 gieng Steiner an die Universität nach Heidelberg, um sich ganz den mathematischen Studien zu widmen, und studierte 1818—21 bei Professor Schweins Geometrie. Der hochbegabte Geometer war aber von diesen Vorlesungen nichts weniger als befriedigt und, nachdem er zum Doctor der Philosophie promoviert war, gieng er nach Berlin, um in dem Plaman'schen Privat-Institute eine Lehrstelle einzunehmen. In Berlin lernten Wilhelm und Alexander v. Humboldt den genialen Geometer kennen und verschafften ihm die Lehrstelle für Mathematik an der städtischen höheren Gewerbeschule. Dieses Amt bekleidete Steiner durch volle 10 Jahre, bis 1834. In diesem Jahre wurde Jacob Steiner auf Grund seiner in Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik seit 1826 veröffentlichten geometrischen Forschungen, sowie auf Grund seiner epochemachenden Werke: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832", und „Die geometrischen Constructionen. Berlin 1833," zum Mitgliede der Berliner Akademie der Wissenschaften ernannt. Im folgenden Jahre (1835) wurde für Steiner an der Universität zu Berlin eine außerordentliche Professur für synthetische Geometrie geschaffen, die Steiner bis zu seinem am 1. April 1863 in Bern erfolgten Tode inne hatte. In Berlin trat der größte Synthetiker in der Geometrie mit den ersten Analytikern dieses Jahrhundertes, Abel und Jacobi, in persönlichen Verkehr und trug in den 1826—1858 im Crelleschen Journal für die reine und angewandte Mathematik veröffentlichten Abhandlungen nicht wenig dazu bei, den Weltruf dieser mathematischen Zeitschrift zu begründen. Obwohl Steiner den hohen Wert der Analysis anerkannte, so konnte er sich doch niemals mit derselben befreunden. Einfachheit und Strenge seiner synthetischen Principien, neben der Mannigfaltigkeit der aus denselben gewonnenen Resultate, kennzeichneten schon seine ersten wissenschaftlichen Publicationen. Die zahlreichen Entdeckungen dieses großen Geometers gehen weit über die Grenzen, welche sich seine Zeitgenossen gesteckt haben. Sie werden für die Nachwelt noch lange Räthsel bleiben, denn Steiner hat es im Drange seiner Entdeckungen nicht mehr bewältigen können, um alle die Wege zu bezeichnen, die ihn zu so schönen wissenschaftlichen Resultaten auf dem Gebiete der synthetischen Geometrie geführt haben. Deshalb bleiben die Steinerschen Lehrsätze für den Geometer ein zu erstrebendes Ziel, für den Analytiker ein Wegweiser zur Bildung und Erforschung von Functionen, die in der höheren Algebra von großer Bedeutung sind. Steiners Wirken wird mit der synthetischen Geometrie für immerwährende Zeiten in unauflöslicher Verbindung bleiben.

(S.: Jakob Steiners Abhandlungen auf dem Gebiete der neueren Geometrie in Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. I—LV (1826—1858), bezw. dessen Nachlass in Bd. LXVI (1866) und Bd. LXVIII (1868);

eigenschaften, die den Keim aller Sätze, Porismen und Aufgaben der Geometrie in sich enthalten, den Fortschritt in dieser Wissenschaft so außerordentlich beschleunigt hat. Schon Monge hat, indem er gewisse Theoreme der Ebene mit den entsprechenden im Raume in das Verhältnis geometrischer Verwandtschaft brachte, die ersten Andeutungen dazu gegeben, dass sich für dieses Heer von auseinandergerissenen Eigenthümlichkeiten ein leitender Faden und eine gemeinsame Wurzel auffinden lassen müsse, von wo aus eine umfassendere und klare Uebersicht der Sätze gewonnen, ein freier Blick in das Besondere eines jeden und seiner Stellung geworfen werden kann. Wiederholt tritt uns in den Vorträgen des Begründers der darstellenden Geometrie das Bestreben entgegen, zu zeigen, dass die ganze Geometrie als Wissenschaft in ihren einzelnen Zweigen einen organischen Zusammenhang besitze, welcher ihr Studium erleichtern und ihren Fortschritt wesentlich beschleunigen müsse.

So übergeht Monge in diesem Capitel in Nr. 90, pag. 90 auf die Constructionsaufgabe, durch vier beliebige Punkte des Raumes eine Kugel zu legen erst dann, nachdem er unmittelbar vorher auf die Lösung der analogen Aufgabe in der Ebene hingewiesen hat. In Nr. 91, pag. 91 (Fig. 38) vereinfacht Monge die Lösung der Aufgabe 90 durch die Annahme, dass drei der vier gegebenen Punkte in einer Projectionsebene liegen. In Nr. 92, pag. 92 löst Monge das Problem, einer gegebenen dreiseitigen Pyramide eine Kugel einzuschreiben, und vereinfacht in Nr. 93 (Fig. 39) die Lösung dieser Aufgabe wieder durch eine

---

sowie Jakob Steiners gesammelte Werke, herausgegeben auf Veranlassung der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften von K. Weierstrass, I. und II. Bd., Berlin 1881 und 1882. S.: ferner C. W. Borchardts Journal, Bd. LXII (1863), pag. 199. — J. C. Poggendorff: Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Berlin 1863, II. Bd., pag. 994—95, und Allgemeine Deutsche Biographie, auf Veranlassung des Königs von Baiern herausgegeben durch die historische Commission bei der königl. Akademie der Wissenschaften, 35. Bd. Leipzig 1893, pag. 700 703.)

Anm.: In die letzten Decennien der Entwicklungsperiode der neueren Geometrie gehören noch v. Staudts „Geometrie der Lage, Nürnberg 1847", „Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1856—60"; ferner M. Chasles „Traité de géométrie supérieure, Paris 1852" und Reyes „Geometrie der Lage, Hannover 1866—68". In Österreich fand die neuere Geometrie eine weitere Ausbildung durch mehrere hervorragende Gelehrte, wie Dr. Wilhelm Fiedler, Professor Carl Küpper, Dr. Rudolf Staudigl, Dr. G. A. V. Peschka, Dr. Eduard Weyr; besonders aber durch Professor Dr. Emil Weyr. (S.: Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag und Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Jahrgänge 1868—1894, etc.)

zweckmäßige Annahme. Die Aufgabe, einen Punkt zu finden, welcher von drei gegebenen Punkten im Raume bestimmte Abstände hat, bildet den Gegenstand des nächsten Problemes in Nr. 94, pag. 94 (Fig. 40).

Im Anschlusse an diese Constructionsaufgaben wird auf pag. 95 das Problem gestellt, die Projectionen eines Punktes zu finden, dessen Entfernungen von drei gegebenen Geraden im Raume bestimmte Abstände haben. Die zwei letzten Aufgaben des vierten Capitels Nr. 95—101, pag. 95—104 beschäftigen sich unter Hinweis auf die algebraischen Lösungen mit der graphischen Lösung topographischer und militärtechnischer Aufgaben, von welchen die algebraische Lösung der ersteren Aufgabe (Nr. 95, Fig. 41 und 42) — wie Monge auf pag. 100 des näheren ausführt — auf eine Gleichung vom 64. Grade führt.

In der Einleitung zum fünften Capitel bemerkt Monge auf pag. 106, dass die ersten vier Capitel seiner Vorträge über descriptive Geometrie die wichtigsten Methoden enthalten, deren Kenntnis in den Künsten nöthig sei. Damit diese für das praktische Leben so wichtige Wissenschaft Gemeingut der ganzen französischen Nation werde, sei die Errichtung von Secundarschulen (écoles secondaires, realistische Mittelschulen) in allen Städten Frankreichs nöthig, in welchen die jungen Leute im Alter von zwölf Jahren durch zwei Jahre hindurch in den graphischen Constructionen unterrichtet und mit den wichtigsten Erscheinungen in der Natur vertraut gemacht werden.

Der Gegenstand des fünften Capitels, welcher sich mit der Theorie der Krümmung doppeltgekrümmter Curven und krummer Oberflächen beschäftigt, ist für Lehrer höherer Schulen und für Künstler bestimmt.

Das fünfte Capitel enthält:

Nr. 103—109 Considérations générales sur l'étendue. Des courbes planes et à double courbure, de leurs développées, de leurs développantes, de leurs rayons de courbure (Fig. 43—44) pag. 105—109 [1]. (Allgemeine Betrachtungen über die Ausdehnung. Von den ebenen und doppeltgekrümmten Curven, ihren Evoluten, Evolventen und ihren Krümmungsradien.)

---

[1]) S.: Schnedar, §§ 60-65, S. 102—114); Streissler II, S. 11—16; Menger, S. 150—159, etc.

Vergl. insb.: Dr. B. Gugler, Lehrbuch der descript. Geometrie. S. 129—180. — J. de la Gournerie, Traité de Géom. descript. I[e] Parties Articles 83—89 et III[e] Partie. Art. 1—108. — Dr. W. Fiedler, Die darst. Geom. S. 211—220 und S. 250—275. — A. Mannheim, Cours de Géom. descr. pag. 273—343. — Dr. G. Peschka, Darstellende und projective Geometrie. I. Bd. S. 185, II. Bd. S. 148—170 u. S. 433—437. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geom. I. Bd. S. 193—221 und II. Bd. S. 527—593.

Nr. 110—112. De la surface qui est le lieu géométrique des développées d'une courbe à double courbure; propriété remarquable des développées, considérées sur cette surface. Génération d'une courbe quelconque à double courbure par un mouvement continu (Fig. 45), pag. 110—112. (Von der Fläche, welche der geometrische Ort der Evolute einer doppelt gekrümmten Curve ist; bemerkenswerte Eigenschaft der Evolute auf dieser Fläche. Erzeugung irgend einer doppeltgekrümmten Curve durch stetige Bewegung.)

Nr. 113—124. Des surfaces courbes. Démonstration de cette proposition: „Une surface quelconque n'a dans chacun de ses points que deux courbures; chacune de ces courbures a un sens particulier, son rayon particulier, et les deux arcs sur lesquels se mesurent ces deux courbures sont à angles droits sur la surface“ (Fig. 46—48), pag. 112—120 [1]). (Von den Krümmungen der Flächen. Beweis des Lehrsatzes: „Irgend eine krumme Fläche hat in jedem ihrer Punkte nur zwei Krümmungen; jede dieser Krümmungen hat einen besonderen Mittelpunkt und besonderen Krümmungshalbmesser, und die beiden Bogen, auf welchen diese beiden Krümmungen gemessen werden, schneiden sich unter rechten Winkeln auf der Fläche.)

Nr. 125—131. Des lignes de courbure d'une surface quelconque; de ses centres de courbure, et de la surface qui en est le lieu géométrique. Application à la division des voûtes en voussoirs et à l'art du graveur (Fig. 49), pag. 120—128 [2]). (Von den Krümmungsmittelpunkten und von der Fläche, deren geometrischer Ort sie ist. Anwendungen auf den Steinschnitt der Gewölbe und in der Kupferstecherkunst.)

Nachdem Monge in Nr. 104—106, pag. 106—108 (Fig. 43) die Krümmung und die Evoluten ebener Curven behandelt hat, übergeht er in Nr. 107—112 pag. 108—112 (Fig. 44 und 45) auf die Theorie doppeltgekrümmter Curven und ihre Erzeugung durch den Schnitt krummer Flächen. In Nr. 109—110, pag. 109—112 wird speciell darauf hingewiesen, dass die Schnitte (lignes des poles, Pollinien) der auf-

---

[1]) Vergl. insb.: J. de la Gournerie, Traité de Géom. descr. II^{e} Partie. Articles 1—49. — Dr. W. Fiedler, Die darstellende Geom. S. 319—399, S. 448 bis 458. — A. Mannheim, Cours de Géom. descr., pag. 273—299. — Dr. G. Peschka, Darstellende und project. Geometrie. III. Bd. S. 3 459, etc., IV. Bd. S. 183—255. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geom. II. Bd. S. 526—593.

[2]) Vergl. insb.: J. de la Gournerie, Traité de Géom. descr. IV^{e} Partie. Art. 81—109. — Dr. W. Fiedler, Die darst. Geom. S. 396—400, etc. — Dr. Chr. Wiener, Lehrb. der darst. Geom. II. Bd. S. 564—593. — A. Mannheim, Cours de Géom. descr. pag. 299—454.

einander folgenden Normalebenen einer doppeltgekrümmten Curve eine abwickelbare Fläche bilden, auf der sich ihre unendlich vielen Evoluten befinden. Diese Evoluten einer doppeltgekrümmten Curve, welche nach der Abwicklung der developpablen Fläche in eine Gerade übergehen, sind somit die kürzesten Linien, die man zwischen ihren beiden Endpunkten auf der Fläche ziehen kann. Diese Eigenschaft führt zu einer einfachen Construction der Evoluten, sowie zur Erzeugung von doppeltgekrümmten Curven durch stetige Bewegung. (Nr. 111, pag. 112). So ist die Schraubenlinie (la vis ordinaire, Nr. 112, pag. 111) eine von den Evoluten der Evolvente des Kreises, welcher die Basis der Cylinderfläche bildet, auf der sich die Schraubenlinie befindet. Bleibt der Durchmesser des Cylinders constant, so ist dieses Bildungsgesetz von der Höhe eines Schraubenganges der Schraubenlinie unabhängig, d. h. alle so erzeugten Schraubenlinien sind Evoluten derselben Curve, nämlich der Evolvente des Basiskreises.

In Nr. 113, pag. 112—113 übergeht Monge auf die Krümmung der Flächen, und theilt diese in drei große Classen ein, und zwar: 1. in solche, welche in jedem ihrer Punkte keine Krümmung haben, das sind ebene Flächen; 2. in Flächen, welche in jedem ihrer Punkte nur eine Krümmung haben, es sind dies die developpablen oder abwickelbaren Flächen; zur dritten Classe gehören jene Flächen, welche in jedem ihrer Punkte zwei von einander unabhängige Krümmungen haben, es sind dies die eigentlichen krummen Flächen. Nun übergeht Monge in Nr. 114—116, pag. 113—115 (Fig. 46) auf die specielle Behandlung der Krümmung von Cylinderflächen, an welche sich in Nr. 117—129, pag. 115—124 (Fig. 47, 48 und 49) die allgemeine Krümmungstheorie der krummen Flächen anschließt. In Nr. 125, pag. 120 (Fig. 49) erklärt Monge die beiden Systeme von Krümmungslinien einer krummen Fläche, welche dieselbe in unendlich kleine Rechteckchen zerlegen, weist in Nr. 126, pag. 121—122 darauf hin, dass bei einer Rotationsfläche die Krümmungslinien der einen Art die Meridiane und jene der anderen Art die Parallelkreise der Fläche sind; bespricht in Nr. 127, pag. 122—123 (Fig. 49) die developpable oder abwickelbare Fläche, welche von dem System der Normalen einer Fläche längs ihrer Krümmungslinie gebildet wird, und dass der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Krümmungslinie die Rückkehrkante (arête de rebroussement) der zugehörigen Normalfläche ist. Das System der Rückkehrkanten (le système des arêtes de rebroussement) aller dieser developpablen Flächen bildet eine zweite, beziehungsweise eine dritte krumme Fläche, die Centraflächen (le lieu des centres de la première et de la seconde courbure de la surface), welche der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte der gegebenen krummen Flächen sind. Ist die gegebene krumme Fläche eine Rotationsfläche (Nr. 128, pag. 123), so ist die eine Fläche der Krümmungscentra die von der ebenen Evolute des Meridians beschriebene Rotationsfläche, während die zweite Centrafläche sich auf die Rotationsachse reduciert.

Zwei praktische Beispiele (Nr. 130 und 131), das eine dem Steinschnitt in der Gewölbetheorie, das andere der Kupferstecherkunst gewidmet, bilden den Schluss der von Monge begründeten Krümmungstheorie der Flächen. Im Anschluss an diese Theorie entwickelte Monge in den Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie in eingehender Weise die Theorie der Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoides und gab ihre Construction, sowie ihre Anwendungen in der Ingenieurtechnik an [1]. Sein Schüler Dupin [2], der zu den talentvollsten Zuhörern des großen Geometers gehörte, und von seinem Meister die Schärfe des Blickes in den geometrischen Betrachtungen, die Tiefe der Erfassung und die Schönheit der Darstellung in den analytischen Forschungen sich angeeignet hatte, bildete die Krümmungstheorie der Curven und Flächen, insbesondere jene der zweiten Ordnung, in seinen berühmten Développements de Géométrie [3]) weiter aus.

Monges und Dupins fundamentale Anschauungen über Flächenfamilien und Curvenscharen auf den Flächen, sowie ihre tiefsinnigen Betrachtungen in der Krümmungstheorie gehören zu den wertvollsten Errungenschaften, die wir dem Schöpfer der neufranzösischen Schule zu verdanken haben. Es sind dies wahre Perlen des menschlichen

---

[1]) S.: Journal de l'École polytechnique, II. cahier. an III. (1795). — S. a.: Monge et Hachette, Application de l'algèbre à la géométrie. Paris 1813.

[2]) Charles Dupin, geb. 1784 zu Varzy im Département Nivernois (Nièvre), gest. 1873 zu Paris, trat nach Absolvierung der polytechnischen Schule in das Geniecorps der Marine ein, bereiste, mit verschiedenen Staatsaufträgen betraut, Belgien, Holland, Italien und die jonischen Inseln, und bekleidete dann als Stabsofficier des Geniecorps der Marine feste Posten in Toulon und Dünkirchen. Seine Mussestunden widmete Dupin nach dem Vorbilde seines Lehrers Monge vollständig den geometrischen Studien. S.: Chasles, Rapport sur les progrès de la géométrie. Paris 1870, pag. 9, etc. — K. Fink, „Dupin" Correspondenz-Blatt für die Gelehrten- und Realschulen Würtembergs" 1893. I. und II. Heft.

[3]) Ch. Dupin, Développements de géométrie, avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, au défilement, à l'optique etc.; ouvrage approuvé par l'Institut de France pour faire suite à la géométrie descriptive et à la géométrie analytique de Monge. Paris 1813.

Geistes, welche mit den Forschungen von Gauss die Grundlage unserer modernen Krümmungstheorie bilden. [1])

Im Anhange zu diesen Vorträgen über descriptive Geometrie befinden sich folgende Zusätze:

I. Suite au Nr. 4. Trois surfaces cylindriques à bases circulaires, qui se coupent, ont en général huit points communs (pag. 120). (Drei cylindrische Flächen von kreisförmiger Basis, welche sich schneiden, haben im allgemeinen acht Punkte gemein.)

II. Suite au Nr. 12. De la génération de la surface gauche. C'est ainsi qu'on appelle la surface qui enveloppe l'espace parcouru par une droite.) De la surface gauche qui peut être engendrée par une droite de deux manières différentes (pag. 130—131 [2]). (Von der Erzeugung windschiefer Flächen. — So nennt man jene Fläche, welche den von einer Geraden durchlaufenen Raum einhüllt. — Von der windschiefen Fläche, welche von einer Geraden auf zwei verschiedene Arten erzeugt wird.)

III. Suite au Nr. 30. Du plan tangent à une surface gauche pag. 131—132 [3]). (Von der Berührungsebene an eine windschiefe Fläche.)

---

[1]) S.: Disquisitiones generales circa superficies curvas. (Commentationes societatis regiae scientiarium Gottingensis recentiores. Vol. VI. ad 1823—1827. Gott. 1823.) — Gauss Werke, IV. Bd. S. 217—258. Göttingen 1873. (II. Abdruck 1880.)

Karl Friedrich Gauss wurde am 30. April 1777 in Braunschweig als der Sohn eines wenig bemittelten Maurers und Wasserkunstmeisters geboren. Von 1795 bis 1798 besuchte er die Universität in Göttingen, an welche er im Jahre 1807 als Professor der Mathematik und Director der Sternwarte berufen wurde. Seine ebenso berühmten „Disquisitiones arithmeticae" erschienen 1801. (S. a.: Gauss Werke, Göttingen 1863—77). Die Mathematik war diesem großen deutschen Gelehrten, der am 23. Februar 1855 in Göttingen starb, die Königin der Wissenschaften und neben der classischen Literatur die Hauptbildnerin des menschlichen Geistes. In der Strenge der Beweisführung nahm sich Gauss ein Beispiel an den Mathematikern des Alterthums und insbesondere an Archimedes, der ihm stets ein leuchtendes Vorbild war. (S.: Heller, Gesch. d. Phys., II. Bd., pag. 571.)

[2]) Vergl.: Schnedar, S. 152—158. — Streissler, II. Aufl. S. 200—204; III. Aufl., S. 102—126. — J. Kreuszel, S. 141—147. — C. Güntner, S. 123—128. J. Menger, S. 215—220. — F. Smolík, S. 159 - 161, etc. etc.

Vergl. insb.: J. de la Gournerie, Traité de Géom. descr. IIe Partie. Paris 1862. Articles 127—219. — Dr. W. Fiedler, Die darstellende Geometrie. Leipzig 1875, S. 400—441. — A. Mannheim, Cours de Géométrie descr. Paris 1880, pag. 413 - 446. — Dr. G. Peschka, Darstellende und projective Geometrie. III. Bd. Wien 1884. S. 1—189. S. 459—604, S. 677—711 u. IV. Bd. Wien 1885. S. 1—255, S. 869—888. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. II. Bd., Leipzig 1887. S. 140—162 u. S. 410—447.

[3]) Vergl.: Schnedar, S. 199—206. — K. Kreuszel, S. 186—191 etc.

Vergl. insb.: Dr. B. Gugler, Lehrbuch der descr. Geom. S. 262. — J. de la Gournerie, Traité de Géom. descript. IIe Partie, Articles 127—219. —

Monge lässt auf pag. 130 eine windschiefe Fläche durch die Bewegung einer unbegrenzten Geraden entstehen, welche beständig drei der Lage nach gegebene Curven schneidet, und construiert die windschiefe Fläche (Fig. 50) mittels einer allgemeinen Kegelflächenschar, welche die Punkte der ersten Curve zu Spitzen, und die zweite Curve zur Leitlinie hat. Die Spitzen der Kegelschar und die Durchstoßpunkte der dritten Curve mit der Kegelschar bestimmen Punkte der Erzeugenden der windschiefen Fläche. Indem Monge an Stelle der drei gegebenen Curven gerade Linien nimmt, beweist er, dass die entstehende windschiefe Fläche, welche auf zwei verschiedene Arten mittels dreier Leitlinien erzeugt werden kann, eine Fläche der zweiten Ordnung (das eintheilige oder einmantelige Hyperboloid) sein muss. Bezüglich der weiteren Besprechung dieser Fläche verweist Monge auf seine Application de l'Analyse à la Géométrie. [1]).

Den Schluss des Werkes bildet auf pag. 131—132 (Fig. 50) die Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt einer windschiefen Fläche an diese die Berührungsebene zu legen, und das umgekehrte Problem, den Berührungspunkt zu finden, wenn die Berührungsebene gegeben ist. Monge zeigt, dass die Berührungsebene eines Punktes der windschiefen Fläche durch die Erzeugenden beider Arten dieses Punktes bestimmt ist. —

Dies ist in Kürze der Inhalt der Vorträge, welche Monge in den ersten vier Monaten des Jahres 1795 an der École normale über descriptive Geometrie gehalten hat. Sie bilden in ihrer Einfachheit, Klarheit

---

Dr. W. Fiedler, Die darst. Geometrie. S. 401—428. — A. Mannheim, Cours de Géom. descr. pag. 413—449. — Dr. G. Peschka, Darst. und proj. Geom. III. Bd. S. 1—183 etc., IV. Bd. S. 1—252, etc. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geom. II. Bd. S. 140 162 etc.

[1]) Vergl.: Des Feuilles d'Analyse appliquée à la géometrie. Paris 1795. (V. Aufl., 1850). — S. a.: Dupin, Développements de Géométrie. Paris 1813 und Monge-Hachette, Application de l'algèbre à la géométrie. Paris 1813.

Vergl. insb.: Dr. B. Gugler, Lehrbuch der descr. Geom. S. 224 — J. de la Gournerie, Traité de Géom. descr. II^e Partie. Art. 173—203. — Dr. W. Fiedler, Die darst. Geometrie, S. 319—341 und 400—428. — A. Mannheim, Cours de Géom. descr., pag. 413—449. — Dr. G. Peschka, Darst. u. proj. Geom. III. Bd. S. 11—72, S. 99—156, S. 342—355, 527—574, etc. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geom. II. Bd. S. 145—157. — Vergl. a.: F. Ruth, Über eine besondere Erzeugungsweise des orthogonalen Hyperboloides und über Büschel orthogonaler Kegel und Hyperboloide. (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. 80, 1879, II. Abth. S. 257 und O. Rupp, Über die auf Flächen zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln. Ibid. Bd. 86, 1882, II. Abth., S. 909. — S. insb.: Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und Raumcurven dritter Ordnung. Leipzig 1880.

und Eleganz heute nach hundert Jahren noch immer die wissenschaftliche Grundlage unserer Lehrbücher über die orthogonale Projection der Raumgebilde, sowie der diesbezüglichen Vorträge an Real-, Gewerbe- und technischen Hochschulen. In pädagogisch-didaktischer Hinsicht bleiben Monges Vorträge trotz ihres Alters jedem Lehrer dieser wissenschaftlichen Disciplin ein elegantes Vorbild. In den folgenden Jahren erweiterte Monge an der École centrale und an der École polytechnique seine Vorträge über descriptive Geometrie durch die Lehre von den Schattenconstructionen [1]) und der Perspective [2]). Diese beiden angewandten Capitel der darstellenden Geometrie befanden sich unter den zurückgelassenen Stenogrammen von Monges Vorträgen, welche aber nicht im Druck erschienen sind. Es waren dies die Abhandlungen: „Théorie des ombres", ferner „La linéaire Perspective" und „Sujet annoncé dans le programme". Ueber die Luftperspective (Perspective aérienne) hatte Monge im ersten Hefte des Journal de l'École polytechnique eine Abhandlung unter dem Titel „Mémoire sur la détermination des teintes" veröffentlicht. Er begnügte sich nicht bloß mit der Bestimmung der

[1]) Vergl.: Fr. Tilscher, Die Lehre der geometrischen Beleuchtungs-Constructionen. Wien 1862. S. Schnedar, S. 239—271. — Streissler, II. Aufl. S. 286—863; III. Aufl. S. 55-58, S. 150—155. — Kreuszel, S. 221—264. — Güntner, S. 144—165. — Menger, S. 105—111, 221—279. — Smolík, S. 238—151, 205—236, etc.

Vergl. insb.: J. de la Gournerie, Traité de Géom. descr. II[e] Partie. Articles 1—103. — Dr. W. Fiedler, Die darst. Geom. S. 220—237 u. S. 458—482. — A. Mannheim, Cours de Géom. descr., pag. 86—99, pag. 237—252 et pag. 324—343. — Dr. G. Peschka, Darstellende und proj. Geometrie. IV. Bd. Wien 1885. S. 388—605. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geometrie. I. Bd. S. 390—437 u. II. Bd. S. 200—243, S. 332—343, S. 385—387, S. 420—435 u. 503—526. — S. a.: Dr. L. Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen. Leipzig 1871. — Tessari: „La teoria delle ombre e del chiaro scuro." Torino 1878—1880. — A. Göller, Lehrbuch der Schattenconstruction und Beleuchtungskunde. Stuttgart 1895.

[2]) Vergl.: Fr. Tilscher, System der technisch-malerischen Perspective. Prag 1867, II. Aufl. 1883. — G. A. V. Peschka und Em. Koutny, Freie Perspective in ihrer Begründung und Anwendung. Hannover 1868. — Schnedar, S. 272—302. — Streissler, II. Aufl., S. 264—390. III. Aufl. S. 158—181. — Kreuszel, S. 265—323. — Güntner, S. 166—181. — Menger, S. 286—332. — Smolík, S. 238—271, etc. — S. a.: J. de la Gournerie, Traité de perspective linéaire. Paris 1859 und Cousinery, Géométrie perspective, Paris 1828; ferner G. Hauck, Die subjective Perspective, Stuttgart 1879 und Dr. G. A. V. Peschka, Freie Perspective. (Centrale Projection in ihrer Begründung und Anwendung). I. u. II. Bd. Leipzig 1888 und 1889.

Schattengrenzen, sondern untersuchte auch unter der Voraussetzung des Princips der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes sowohl bei paralleler als auch bei centraler Beleuchtung die Intensitäten der im Schatten liegenden Flächentheile [1]). Als erläuternde Beispiele wurden der Würfel und die Kugel gewählt. In der Perspective unterscheidet Monge die geometrische oder Linear-Perspective und die Luftperspective [2]). In der ersteren weist er auf die große praktische Bedeutung des Fluchtpunktes hin und erwähnt in der letzteren ihre bisherige geringe Pflege, ohne die Schwierigkeiten des Studiums der Luftperspective bei dem Mangel an sorgfältigen Beobachtungen zu unterschätzen. Am Schlusse dieser Abhandlung verallgemeinert Monge den Begriff der Perspective durch Einführung krummer Bildflächen, wobei er die Kugel und die Kreiscylinderfläche (Panorama) als Bildflächen besonders berücksichtigt. [3])

Die „Leçons données aux Écoles normales, l'an 3 de la Republique“ sollten den ersten theoretischen Theil von Monges Géométrie descriptive bilden. Der zweite praktische Theil dieses Werkes sollte die Application aux constructions de la perspective linéaire, à la détermination des ombres dans les dessins, à la description des élémens des machines etc. enthalten, zu welchem Monge die nothwendigen Zeichnungen bereits ausgeführt hatte. Aber die verschiedenen, theils politischen, theils wissenschaftlichen Arbeiten, welche Monge im Auftrage der Regierung in den folgenden Jahren in Italien, Ägypten und Syrien übernommen hatte, verhinderten die Drucklegung dieses praktischen Theiles seiner Géométrie descriptive. Sein berühmter Schüler, Charles Dupin, ergänzte Monges Géométrie descriptive durch die Développements de géométrie, welche 1813 in Paris veröffentlicht, und vom Institut de France, (Akademie der Wissenschaften) in Paris als Fortsetzung von Monges Géométrie descriptive und Géométrie analytique anerkannt wurden.

Hatte auch Monge durch den wissenschaftlichen Ausbau der darstellenden Geometric für die Künste der Wissenschaften, für das Gewerbe und dic Industrie eine Hilfswissenschaft von hervorragender

---

[1]) S.: Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. I. Bd. Leipzig 1884, S. 53—59.

[2]) Ibid. S. 9—21, 33—42. S. a.: I. Abschn. d. math.-histor. Studie, S. 7—9.

[3]) Ibid. S. 50—51.

Anmerkung. Vergl.: Kurzgefasste Geschichte der darst. Geometrie (poln.) von Mich. Rembacz, veröffentlicht in den Jahresberichten der Staats-Oberrealschule in Stanislau für die Schuljahre 1890 und 1891.

socialer Tragweite begründet, und durch Errichtung realistischer Normal- und Secundärschulen, aber ganz besonders durch die bald darauf erfolgte Begründung der polytechnischen Schule in Paris die Grundlage für das moderne Schulwesen des ganzen Erdballes geschaffen, so bildete trotzdem die Géométrie descriptive nicht den Höhepunkt seiner wissenschaftlichen Thätigkeit. Den Höhepunkt seiner Gelehrsamkeit und den Ruf der Unsterblichkeit erreichte Monge durch Begründung der neuen analytischen Geometrie, für welche er in seinem Werke „Applications de l'Analyse à la Géométrie“ ein kostbares, jeden Mathematiker zur Bewunderung hinreißendes Kleinod geschaffen hat. Wir werden im vierten Abschnitte dieser mathematisch-historischen Studie die geistvollen Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie dieses großen und edlen Gelehrten der ersten französischen Revolution noch einer besonderen Betrachtung unterziehen.

III.

Die Gründung der École polytechnique.

Der weitere Ausbau der darstellenden Geometrie als Wissenschaft.

Die École normale[1]) erfreute sich, trotzdem ihr Lehrkörper aus den ersten Gelehrten Frankreichs gebildet war und ihr Schülermaterial aus den begabtesten Jünglingen der jungen Republik bestand, keiner langen Lebensdauer. Noch bevor das Professoren-Collegium seinen ersten Cursus nach viermonatlichem Bestande geschlossen hatte, fiel diese Schule, welche zu den schönsten Hoffnungen berechtigt hatte — trotz ihrer wiederholt an den Tag gelegten republikanischen Gesinnung — noch in demselben Jahre den damals herrschenden politischen Missverhältnissen angeblich deshalb zum Opfer, weil ihre Zöglinge noch zu wenig von demokratischen Ideen erfüllt waren.[2]) Aber eine so gewaltsame Unterbrechung konnte selbstverständlich von keiner langen Dauer sein. Die Pariser Musterschule musste schon aus Staatsinteressen bald wieder ins Leben gerufen werden und erzielte bis heute solche volkswirtschaftliche Erfolge, dass anlässlich der Feier (21.—23. April 1895) ihres hundertjährigen Bestandes Sauton, der Maire von Paris, sie mit den Worten begrüßen konnte: „Je salue cette École qui est, avec École polytechnique, sa voisine, une des gloires de notre France!“[3])

Da auch in Folge der kriegerischen Ereignisse die Lehrer und Schüler der 1747 von dem berühmten Perronnet gegründeten Land- und Wasserbau-Ingenieurschule „École des Ponts et Chaussées“ in Paris als Officiere zur Armee einberufen wurden, so hatte auch diese Schule zu bestehen aufgehört. Nicht besser ergieng es der Artillerieschule, welche 1756 zu La-Fère gegründet, 1772 nach Bapaume und Chalons sur Marne verlegt worden war. Ebenso mussten die

---

[1]) S.: Mortimer d'Ocagne, Les grandes École de France. Paris 1887, pag. 350.

[2]) S.: Dupin, Essai historique. Paris 1819, pag. 40.

[3]) Anmerkung: An dieser École normale supérieure hatte bekanntlich der berühmte Chemiker Pasteur (gestorben am 28. September 1895) vom Jahre 1857 bis 1888 in der Rue d'Ulm sein Laboratorium, wo er mehrere wichtige Gährungsfermente und 1885 das „Virus et vaccins“ entdeckte.

Schüler der berühmten Genieschule zu Mézières, welche im Februar 1794 nach Metz verlegt wurde, zur Armee einrücken. Da auch die Vermessungsingenieure keine eigentliche Bildungsanstalt besaßen, trotzdem ihnen die Regierung ein absolutes und ausschließliches Recht zur Vornahme geodätischer Operationen eingeräumt und selbst den Officieren des Geniecorps die Ausführung solcher Operationen in ihrem Dienste verboten hatte, so fasste der gelehrte Lamblardie, der Nachfolger Perronnets, die erste Idee zur Gründung einer Centralschule, welche die eingegangenen Schulen ersetzen und für alle Staatsdienste, welche Vorkenntnisse in den exacten Wissenschaften erfordern, die schleunige Ausbildung einer großen Zahl von jungen Leuten zur Aufgabe haben sollte.

Mit wahrer Begeisterung erfasste Monge diese Idee, für deren Durchführung er bei den Mitgliedern des Wohlfahrtsausschusses Fourcroy und bei seinen ehemaligen Zöglingen von Mézières, Carnot und Prieur de la Côte-d'Or, mit seiner ganzen Beredtsamkeit eintrat.

Schon im März 1794 wurde eine Commission eingesetzt, welche in der ganzen Ausdehnung der Republik die Leitung der Civil- und Militärbauten übernehmen sollte. In dem am 11. März 1794 erlassenen Gesetze wurde angeordnet, „die Commission solle sich mit der Einrichtung einer Centralschule für die öffentlichen Arbeiten und mit der Modalität der erforderlichen Prüfungen beschäftigen“. Auf diese wenigen Worte hin wurde von der Commission mit beispiellosem Eifer die Errichtung der neuen Schule, welche ein Jahr später [1]) den Namen „École polytechnique“ erhielt, unternommen. Am 28. September 1894 (7 vendémiaire an III) legte der Wohlfahrtsausschuss durch Fourcroy dem Nationalconvente den die Errichtung der polytechnischen Schule betreffenden Gesetzentwurf vor, der auch — trotz der hohen Anforderungen, die er an die Finanzen der Republik stellte — ohne Widerspruch angenommen wurde.[2]) Dem Berichte Fourcroys lag ein Organisationsplan der neuen Anstalt bei, welcher den Titel führte „Développements sur l'enseignement adopté pour l'École centrale des travaux publics“. Dieser Organisationsentwurf, ohne Namen des Verfassers, war zweifellos von Monges Hand, denn er war damals der einzige Mathematiker in ganz Europa, welcher mit einer solchen Autorität von der descriptiven Geometrie, ihrer Unterrichtsmethode und ihrer Bedeutung für das sociale Leben sprechen konnte. Nur der gelehrte Professor von Mézières konnte mit aller Entschiedenheit vom Nationalconvente ver-

[1]) 1. September 1795.

[2]) S.: François Arago, Oeuvres complètes. Paris 1854. Tome II. pag. 491. (Arago-Hankel, S. 400).

langen, dass die descriptive Geometrie populär werden müsse. Der Chemiker Fourcroy, berühmt durch sein „Système des connaissances chimiques", war begeistert für Monges Organisationsentwurf.

Die neue Anstalt wurde im Palais Bourbon untergebracht und durch Sammlungen, Modelle, Gemälde, eine Bibliothek, ein physikalisches und mineralogisches Cabinet, ferner mit mehreren größeren und fünfundsiebzig kleineren Laboratorien für die Schüler reich ausgestattet. Fünfundzwanzig Künstler arbeiteten Tag und Nacht an der Ausführung der Risse, welche zum Unterrichte in der darstellenden Geometrie dienten [1]).

Die Zöglinge der École centrale, deren Zahl auf 350 bis 400 festgesetzt wurde, wurden — wieder dem republikanischen Princip der Gleichheit entgegen — auf Grund ihrer durch eine strenge Aufnahmsprüfung festgesellten Begabung aufgenommen. Der Anstalt zuliebe wurde sogar das im April desselben Jahres erlassene Gesetz, dass kein Sohn eines Altadeligen Paris betreten dürfe, zurückgenommen. Zu den großen Erfolgen und den wissenschaftlichen Leistungen der polytechnischen Schule und zu ihrer Bedeutung für die öffentlichen Dienste trug nicht wenig jener Theil der Organisation dieses berühmten Institutes bei, durch welchen es bestimmt war, dass talentierte Söhne unbemittelter Bürger auf Staatskosten ausgebildet wurden.

Jeder Zögling erhielt dreihundertundvierzig Francs jährlich, nämlich den Sold eines Artillerie-Sergeanten, und fünfhundert Francs, wenn die Mittellosigkeit seiner Eltern festgestellt war [2]). Die Zöglinge der École centrale wurden als bereits im Staatsdienste stehend betrachtet und bei gut patriotisch gesinnten Bürgern von Paris untergebracht. Die Zeit des Unterrichtes sollte drei Jahre umfassen, dem drei Classen entsprachen. In dem Studienplan des ersten Jahres nach der Gründung nahm die Mathematik mit ihren Anwendungen nur den zwölften Theil der Unterrichtszeit in Anspruch, während auf freies Zeichnen der sechste, auf Physik und Chemie der vierte Theil, auf die Géométrie descriptive die Hälfte kam. Diese Vertheilung war noch eine Folge des ersten andrängenden praktischen Bedürfnisses, unter dessen Auspicien die Schule ins Leben getreten war. Später erhielt die Mathematik einen größeren Antheil. Die mathematische Analysis wurde hauptsächlich nur in ihren Anwendungen gelehrt. Diese betrafen im ersten

---

[1]) Anmerkung.: In diese „Collection des épures à l'usage de l'École polytechnique" wurden von Monge auch viele, ziemlich genaue Risse aus dem „Traité de la coupe des pierres par de la Rue, Paris 1728" aufgenommen.

[2]) Vergl.: Dupin, Essai historique, Paris 1819, pag. 68 mit C. G. J. Jacobi, „Über die Pariser polytechnische Schule". Jacobis Gesammelte Werke, VII. Bd. Berlin 1891, S. 362.

Jahre die analytische Geometrie von drei Dimensionen, im zweiten die Mechanik fester und flüssiger Körper, im dritten die Maschinenlehre. Die Géométrie descriptive wurde im ersten Jahre auf Stereotomie, im zweiten auf Architektur und im dritten auf Fortification angewendet. Der Curs über Stereotomie umfasste den Steinschnitt und die Holzconstructionen, die Lehre von dem Schatten, der Linear- und Luftperspective, Aufnahme von Karten und Plänen, das Nivellement, die einfachen und hauptsächlichsten zusammengesetzten Maschinen.

Unter Architektur, welche den Cursus des zweiten Jahrganges bildete, verstand man die Anlegung und Erhaltung von Straßen, Brücken, Canälen und Häfen, den Bergbau, die schöne Baukunst und dergleichen mehr.

Die ersten Lehrer der École normale waren Lagrange und Prony für Mathematik und Mechanik, Monge für Stereotomie, Hassenfratz für Physik, Fourcroy und Vauquelin, Berthollet und Chaptal für Chemie. Ebenso strenge wie die Aufnahmsprüfungen waren die Abgangsprüfungen. Als Examinatoren in der Mathematik fungierten Laplace und nach seiner Berufung als Minister des Innern Legendre, dem Poisson folgte. Monge, der diese polytechnische Schule ins Leben gerufen hatte, wurde als erster Präsident in Vorschlag gebracht. Er lehnte jedoch in seiner Bescheidenheit diese Ehre ab und gab auf das Andrängen seiner Collegen zur Antwort: „Ernennet Lagrange, ernennet den größten Geometer Europas!“

Um die Schule gleich von vornherein mit allen drei Jahrgängen beginnen zu können, wurde für die Aufgenommenen ein sogenannter revolutionärer Cursus von drei Monaten angeordnet, nach dessen Beendigung die Zöglinge, ihren Fähigkeiten entsprechend, in drei Classen vertheilt wurden. Die begabteren Zöglinge bekamen noch besonderen Unterricht, um ihrerseits den übrigen nachhelfen zu können. Sie führten den Namen Brigadechefs (chefs de brigades) und hatten eine Art Aufsicht über ihre Mitschüler. Es waren ihrer fünfundzwanzig, später fünfzig, zumeist solche, welche, in der Absicht, sich den Wissenschaften zu widmen, den dreijährigen Curs wiederholten. Unter ihnen befanden sich Malus, Biot und andere, später berühmt gewordene Gelehrte. Nach kaum dreijährigem Bestande hatte die polytechnische Schule, die Schöpfung Monges, durch ihre Lehrer und die Leistungen ihrer Schüler einen solchen Glanz auf ganz Frankreich geworfen, dass sie auf der Tribüne der legislativen Gewalt oder in öffentlichen Documenten nicht anders genannt wurde, als: „La première École du monde,“ „l'Institution que l'Europe nous envie,“ „l'Établissement sans rival comme sans modèle.“ Diesen glänzenden Ruf erhielt sich die École polytechnique durch alle Stürme der Zeit, indem die Nationalehre bei ihrer Erhaltung betheiligt war. [1]) Durch fünfzig Jahre blieb die polytechnische Schule der berechtigte Stolz Frankreichs.

Die berühmtesten und gefeiertsten Generale Frankreichs, wie Desaix, Cafarelli und Bonaparte gehörten zu den Bewunderern der École polytechnique und wohnten wiederholt den Lehrcursen bei. Ihre hochbegabten Schüler Malus, Thénard, Gay-Lussac, Poisson, Poinsot, Dulong, Petit, Arago, Fresnel, Cauchy, Binet, Dumas, etc. wurden nach und nach an ihr Lehrer. In ihren Laboratorien haben Gay-Lussac und Humboldt gemeinsam gearbeitet und ihre berühmten Entdeckungen gemacht. Es wurde seit der Eröffnung der École centrale darauf gehalten, dass die hervorragenderen Lehrer dieser Anstalt ihre Vorträge zum besseren Nutzen der Schüler drucken ließen, und so ist eine Reihe von Werken, wie Lagranges Functionentheorie und Functionenrechnung, Puissants Geodäsie, Poinsots Statik, Laplaces Exposition du système du monde, Lacroix, Francoeurs, Cauchys Lehrbücher der Algebra und Infinitesimalrechnung u. s. w. entstanden, welche uns das beste Urtheil über die Höhe, bis zu welcher der Unterricht in dieser Anstalt getrieben wurde, fällen lassen. Diese Lehrbücher haben zugleich die Früchte des dort gegebenen Unterrichtes über ganz Europa verbreitet.

Nach dem Vorbilde der Kriegsschule zu Mézières, deren geistige Seele bekanntlich Monge war, nahmen die mündlichen Vorträge nur einen kleinen Theil der Zeit ein; in der übrigen wurden die Schüler in den Studiensälen unter Aufsicht ihrer Lehrer mit eigenen Arbeiten beschäftigt.

Mit der Géométrie descriptive gieng von der Schule von Mézières auch jene glückliche Methode auf die polytechnische Schule über, bei dem Unterrichte von vornherein die eigene Thätigkeit des Schülers in Anspruch zu nehmen, was aber bei einer so umfangreichen Anstalt größere Schwierigkeiten machte. Die dort gebräuchliche Lehrmethode hatte — wie der große deutsche Mathematiker Jacobi in seinem Vortrage über die polytechnische Schule in Paris besonders betont — den großen Vorzug eines fast gänzlichen Mangels mündlicher Lehrvorträge.[2])

Zur Beaufsichtigung der Schule wurde aus dem Lehr- und Verwaltungspersonale ein Rath gebildet, dem unter anderem auch anempfohlen wurde, die Wissenschaft weiter zu fördern. Dies benutzte der Rath, um eine kleine Akademie zu bilden, an deren Versammlungen

[1]) S.: Mortimer d'Ocagne, Les grandes Écoles de France. Paris 1887, pag. 104.

[2]) S.: C. G. J. Jacobis Gesammelte Werke, VII. Bd. Berlin 1891, S. 357.

er auch andere Gelehrte theilnehmen ließ. Diese Vereinigung war für die Entwicklung der Wissenschaften umso bedeutungsvoller, da der Convent kurz vorher alle Akademien als dem Princip der Gleichheit entgegenstehende, privilegierte Körperschaften aufgehoben hatte. Der Druck der Vorträge und Verhandlungen wurde ebenfalls angeordnet, und so entstand das berühmte Journal de l'École polytechnique. Hier findet man in den ersten Bänden die lehrreichen Unterrichtsprogramme, welche die Lehrer von jedem Cursus publicieren mussten. In diesem Journal findet sich auch die berühmte Theorie der Functionen von Lagrange, die er an der polytechnischen Schule gelehrt hatte, und seine Vorlesungen über die Functionenrechnung. Später schloss sich an das Journal de l'École polytechnique die von Hachette in den Jahren 1804 bis 1816 herausgegebene Correspondance sur l'École polytechnique.

Monge veröffentlichte bis zu seinem im Jahre 1809 erfolgten Rücktritte vom öffentlichen Lehramte im Journal de l'École polytechnique die nachstehenden pädagogischen und wissenschaftlichen Abhandlungen:

Plan du Cours de géométrie descriptive: „Instruction donnée à l'École des chefs de brigades. Travaux géométriques de élèves de cette école. Ier cahier, an III, pag. 1.

Cours de floréal Stéréotomie, coupe des pierres. IIe cahier, pag. 100. — Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde; ibid. pag. 145. — Suite de la stéréotomie, coupe de pierres. IIIe cahier, pag. 440. — Suite de la stéréotomie; charpente, ombres, perspective. IVe cahier, an IV, pag. 619. — Mémoire sur la surface courbe, dont toutes les normales sont tangentes à la surface d'une même sphère. XIe cahier, an X, pag. 28. — Mémoire sur la surface courbe, dont toutes les normales sont tangentes à une même surface conique à base arbitraire. XIe cahier, tome IV, an X, pag. 59. — Application d'algèbre à la géométrie par Monge et Hachette; ibid. pag. 143. — Mémoire sur la surface courbe, dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable. — Génération de la surface. — Recherche de l'équation intégrale de la surface. — Recherche des équations aux différences partielles des Ier, IIe et IIIe ordres. — Second mémoire sur la surface courbe qui enveloppe l'espace parcouru par une sphère variable de rayon, et dont le centre parcourt une courbe à double courbure. XIIIe cahier, tome VI, 1806, pag. 1—59. — Essai d'application de l'analyse à quelques questions de la géométrie élémentaire. XVe cahier, tome VIII, 1809, pag. 68—117. — Construction de l'équation des cordes vibrantes; ibid. pag. 118—145."

Ferner veröffentlichte Monge in der Correspondance sur l'École polytechnique.

„De l'intégrale de l'equation différentielle à deux variables $y = x Fp + fp$, F et f étant des fonctions quelconques de $p = \frac{dy}{dx}$. Tome Ier, Nr. IV, an 1805, pag. 73—75. — Analyse appliquée à la géométrie; solution de ce problème: Trouver l'équation de la surface développable, qui a pour arête de rebroussement une courbe à double courbure, dont on connaît l'équation unique aux différences ordinaires; ibid. Nr. VII, an 1807, pag. 209—211. — Des relations qui existent entre les coordonnées des points où trois droites rectangulaires, passant par le centre de la sphère, coupent la surface de cette sphère; ibid. pag. 211—213. — Sur la thérorie des ombres et de la perspective; sur les points brillantes des surfaces courbes, par M. M. Monge et Hachette; ibid. Nr. VIII, 1807, pag. 295—305. — Sur quelques propriétés de la pyramide triangulaire; ibid. Nr. X, 1809, pag. 440—444. — Sur la pyramide triangulaire. Tome II, Nr. I, 1809, pag. 1—6." —

Hier an der École polytechnique war der Schauplatz von Monges größter Thätigkeit. Überall sah man den großen Geometer rathen, helfen, anleiten und alles durch seinen Eifer anfeuern. Monges durchdringendes Auge entdeckte bis in den entlegensten Winkel seines zahlreichen Auditoriums den Zögling, der sich nicht weiter zu helfen wusste. Sofort nahm der große Gelehrte die Constructionsaufgabe seines Zöglings von neuem mit den Worten auf: „Je reprends, mon ami, du point où j'ai commencé inintelligible", brachte in seinen Gang und in den Ausdrücken die nothwendigen Verbesserungen an, und wenn alle diese Bemühungen bei dem zerstreuten oder wenig fähigen Zuhörer ohne Erfolg blieben, so hielt Monge für ihn allein eine Vorlesung, welche die erstere oft an Einfachheit, Klarheit und Eleganz in der Methode übertraf. Monges großer Erfolg im Unterrichte der descriptiven Geometrie war zum Theile auch jener unvergesslichen Geschicklichkeit zuzuschreiben, mit welcher dieser berühmte Lehrer durch Gesten es verstand, die Oberflächen, welche den Gegenstand seiner Untersuchungen bildeten, im Raume darzustellen.

Das räumliche Vorstellungsvermögen war es eben, auf dessen Pflege Monge vom Beginne seines Unterrichtes in der descriptiven Geometrie das größte Gewicht legte. War auch Monge an der École polytechnique der einzige Lehrer, welcher — der republikanischen Sitte treu bleibend — seine im Alter von sechzehn bis zwanzig Jahren stehenden Zöglinge mit dem vertraulichen „Du" anredete, so war doch seine Lehrmethode stets von unendlicher Güte beseelt und mit grenzenlosem Eifer führte er seine Zöglinge in die junge Wissenschaft ein.

Monge blieb bis zu dem letzten Augenblicke in den Arbeitssälen; dann umringten die Schüler ihren berühmten Lehrer und geleiteten ihn bis zu seiner Wohnung, auf jedes Wort lauschend, das aus dem Munde des verehrten Forschers und Lehrers kam. Mit bewunderswertem Eifer nahmen die Zöglinge am nächsten Tage wieder ihre Arbeiten auf, und so kam es, dass die von den Schülern in einem Jahre angefertigten geometrischen Zeichnungen durch ihre Zahl und Schwierigkeit jede Vorstellung übertreffen. Man kann diese Leistungen, zu welchen die Zeit kaum auszureichen schien, wenn die Zeit der Zöglinge durch keine andere Thätigkeit in Anspruch genommen wäre, durch die Anfeuerung erklären, welche das Beispiel des Lehrers gab. Der berühmte deutsche Mathematiker C. G. J. Jacobi, der Begründer der Theorie der elliptischen Functionen, hatte im Jahre 1829 durch die Gefälligkeit des damaligen Studiendirectors Binet Gelegenheit, die Zeichnungen, sowie die von den Zöglingen in Gyps und Holz ausgeführten Modelle in Augenschein zu nehmen und konnte sie nicht ohne Verwunderung betrachten [1]).

Die Erfolge, welche an der École polytechnique durch Monges harmonisches Zusammenwirken mit seinen Collegen Laplace, Lagrange und anderen erprobten Fachgelehrten unter gleichzeitiger größtmöglichster Anstrengung der für das große Werk der nationalen Erziehung begeisterten Zöglinge in kürzester Zeit erzielt wurden, gestalteten sich sowohl in theoretischer als auch in praktischer Beziehung zu einem so gewaltigen, weit über Frankreichs Grenzen hinaus Einfluss übenden Factor, dass selbst Monges kühnste Erwartungen übertroffen sein mochten.

Schon nach wenigen Decennien wetteiferten die sämmtlichen vorgeschrittenen Staaten Europas in der Gründung militär- und civiltechnischer Anstalten, welche die polytechnische Schule in Paris zum Vorbild hatten. Die mannigfaltigen, seither allerorts in dem großartigsten Maßstabe ausgeführten und Achtung gebietenden Werke technischer Kunst, deren Möglichkeit in früheren Zeiten kaum geahnt wurde, haben sich nun auf dem sicheren Grunde jener neuen Errungenschaften kühn erhoben und zwangen zu solcher Würdigung ihrer Erfolge, dass schon mit Beginn der zweiten Hälfte unseres Jahrhundertes den altehrwürdigen, humanistischen Schulen ebenbürtige Unterrichtsanstalten zur Seite traten, welche nun im hohen Grade berufen sind, das Interesse aller Cultur-

[1]) S.: C. G. J. Jacobis Gesammelte Werke, VII. Bd. S. 363.

staaten zu fördern. Seit jener denkwürdigen Inauguration hat eine ganze Schar Monge treuer Nachfolger an der Ausbildung der Sprache des Ingenieurs — wie Monge seine descriptive Geometrie auch nannte -- ihre besten Kräfte eingesetzt und Gelehrte wie Lacroix [1]), Potier [2]), Hachette [3]), L. Vallée [4]) Th. Olivier [5]), Adhémar [6]), Leroy [7]), de la Gournerie [8]), Mannheim [9]) und viele andere haben in ihren Literaturwerken Denkmale errichtet, welche von unbegrenztem Vertrauen zu dem verehrten großen Genius und Meister lautes Zeugnis geben. Nach Millionen zählt nun die Schar derjenigen, welche Monges Doctrin zu lehren, zu lernen und anzuwenden haben, und trotz des hundertjährigen Bestandes derselben ist verschwindend klein die Zahl derjenigen, welche unter Anerkennung der außergewöhnlichen Verdienste des großen Geometers die Einfachheit und Exactheit der Entwicklungen in Monges Begründungselementen in Frage stellen. [10])

War auch Frézier [11]) der erste Geometer, welcher in der descriptiven Geometrie die Theorie von der Praxis getrennt hatte, so legte er dennoch in seinem Werke auf die Stereotomie das Hauptgewicht, und erst Monge schuf die descriptive Geometrie als solche auf wissenschaftlicher Grundlage. Auch dürfen wir in richtiger Würdigung der Verdienste Monges um den Aufbau eines Systems der darstellenden Geometrie nicht unberücksichtigt lassen, dass die seit dem siebzehnten Jahrhundert angebahnte und im achtzehnten Jahrhundert durch Lagrange vollendete Suprematie der reinen Analysis, d. h. des rechnenden Elementes die mathematischen Forschungen vor hundert Jahren

---

[1]) S.: F. Lacroix, ein Schüler Monges, geb. 1765 zu Paris, gest. 1843 daselbst, gab fast gleichzeitig mit Monges Géométrie descriptive seine „Essais de géométrie sur les plans et les surfaces. Paris 1796“ heraus.

[2]) Potier, Traité géométrie descriptive. Paris 1717.

[3]) Hachette, Supplément à la géométrie descriptive. Paris 1812 und 1818.

[4]) L. Vallé, Traité de la géométrie descriptive. Paris 1819.

[5]) Th. Olivier, Cours de géométrie descriptive. Paris 1843.

[6]) J. Adhémar, Géométrie descriptive. Paris 1841.

[7]) C. F. A. Leroy, Traité de géométrie descriptive. Paris 1842 und Traité de stéréotomie. Paris 1844.

[8]) J. de la Gournerie, Traité de géométrie descriptive, 3 parties. Paris 1860, 62 et 64, IIe édition, Paris 1873, und Traité de perspective linéaire. Paris 1859 etc.

[9]) A. Mannheim, Cours de géométrie descriptive. Paris 1880, 2e édition 1886.

[10]) S.: Fr. Tilscher, Grundlagen der Ikonognosie. Prag 1878. S. 1—10. S. a.: Die Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, math.-naturwiss. Classe, Sitzung vom 30. März 1870. — Vergl. a.: Franz Tilšer, Kritische Bemerkungen zur Einführung in die Anfangsgründe der Géométrie descriptive. Wien 1883. — Eduard Hartmann, Zur Reform des höheren Schulwesens. Berlin 1878.

[11]) S. den I. Abschn. S. 10 d. math.-historischen Studie.

beherrschte, und dass die Geometrie selbst dort ignoriert wurde, wo sie eigentlich hingehörte. So ist es erklärlich, dass man Werke der angewandten, mathematischen Wissenschaften schuf, wo Operationen an geometrischen Figuren — die selbst ein Euler noch mit Vorliebe gepflegt hatte — fast ängstlich vermieden wurden, und Lagrange war stolz darauf, eine Mechanik geschrieben zu haben, in der sich keine Figur befand. [1]) Erst wenige Decennien sind verstrichen, seitdem Monges System der darstellenden Geometrie durch Einführung der neueren Geometrie und der Kinematik, sowie durch die wissenschaftliche Begründung der Reliefperspective und der Photogrammetrie erweitert wurde, trotzdem der große Geometer und Physiker schon vor hundert Jahren in seinen zahlreichen wissenschaftlichen Abhandlungen mit den drei erstgenannten Wissenschaften mehr oder weniger Fühlung genommen hatte. [2]) Selbst die durch ihre scharfen Ausfälle gegen hervorragende und große Gelehrte, wie Arago, Cauchy, Fourier, Sturm, Abel, Jacobi, Gauss, Steiner u. a. bekannten kritischen Schriftsteller Dr. E. Dühring und U. Dühring betonten in ihrem Werke, [3]) dass die darstellende Geometrie noch heute in ihrem von Monge geschaffenen, originalen Grundwerke studiert werden müsse, wenn sie für den Geist etwas abwerfen soll und wenn ihre Vorzüge zur Geltung kommen sollen.

In der That schuf Monge das wissenschaftliche Gebäude der darstellenden Geometrie als ein in sich so vollkommen abgeschlossenes Ganzes, dass seine Schüler und Nachfolger durch Jahrzehnte hindurch auf diesem Gebiete nichts wesentlich Neues schaffen konnten. Monges Géométrie descriptive, deren siebente, durch die Theorie der Schatten und der Perspective erweiterte Auflage der Ingenieur-Inspector Brisson, ein Schüler Monges, im Jahre 1847 in Paris herausgab, beherrschte bis über die Mitte dieses Jahrhundertes das wissenschaftlich-technische Gebiet in Frankreich und Deutschland. Die Werke von Potier (Traité

---

[1]) Anmerkung.: Dreißig Jahre später fand noch Poncelets berühmter Traité des propriétés projectives des figures den Missfall Cauchys, eines reinen Analysten.

[2]) Bezüglich des weiteren Entwicklungsganges der darstellenden Geometrie verweisen wir wieder auf die Geschichte und das Lehrbuch der darstellenden Geometrie des Geh. Hofrathes u. o. ö. Professors an der großherz. badischen technischen Hochschule in Karlsruhe, Herrn Dr. Christian Wiener, aus dessen ehrender Zuschrift wir mit Vergnügen ersahen, dass er auch unsere Monographie über „Monge“ mit lebhaftem Interesse verfolgt hat.

[3]) S.: E. u. U. Dühring, Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra, Functionsrechnung und zugehörigen Geometrie. Leipzig 1884. XVIII. Capitel, S. 464.

de Géométrie descr. Paris 1817), La Vallée (Paris 1819), Lefébure de Fourcy (Paris 1832) und das durch seine Klarheit ausgezeichnete Werk von C. F. A. Leroy (Paris 1842), der durch fünfunddreißig Jahre als Professor der darstellenden Geometrie an der École polytechnique in Paris wirkte, sind ganz im Geiste Monges verfasst, während Th. Oliviers „Cours de Géométrie descriptive, Paris 1843" wegen seiner nicht immer berechtigten und complicierten Transformationen der Projectionsebenen weder in Frankreich noch in Deutschland Anklang fand. [1])

Monge selbst erzielte mit seinem Werke in einem gewissen Sinne einen Erfolg, den anzustreben ihm als Gelehrten und Lehrer gewiss ferne lag. Bis zu Ende des achtzehnten Jahrhundertes waren die Stereotomie, die Perspective und die Gnomonique als ernste Künste geschätzt und verlangten gründliche und sorgfältige Studien. Seitdem Monge gezeigt hatte, dass die Construction ihrer Risse auf eine kleine Zahl von elementaren Operationen zurückgeführt werden könne, glaubte man daraus den Schluss ziehen zu können, dass diese Zweige der graphischen Künste keine Schwierigkeiten mehr bieten und dass einige Studien in der descriptiven Geometrie genügen würden, um sich mit ihren Methoden vollständig vertraut zu machen. Und so kam es, dass gerade diese mit der descriptiven Geometrie so eng verwandten, graphischen Künste in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhundertes in Verfall geriethen. [2])

Es bedurfte einer besonderen, wissenschaftlich-neuen Richtung, um auf rein geometrischem Gebiete wieder bahnbrechend fortzuschreiten.

---

[1]) Anmerkung.: Die ersten Transformationen der Projectionsebenen führte Desargues in seiner Abhandlung „Méthode universelle de mettre en perspective les objets, etc. Paris 1636" aus. Sein Schüler Abraham Bosse, Kupferstecher und Professor der Perspective an der Schule der schönen Künste in Paris, benützte in seinem Werke „Pratique du Trait à preuves de M. Desargues, Paris 1643" die Transformation der Projectionsebene zur Bestimmung der Risse des Steinverbandes einfacher Gewölbe, fand aber mit Desargues Methode keinen Anklang bei den praktischen Bauleuten, welche sich entschieden gegen diese Methode aussprachen. Hundert Jahre später entwickelte Frézier in seinem Traité de Stéréotomie, Strasbourg 1738 in klarer Weise Desargues Methode, welche aber von den Praktikern abermals abgelehnt wurde. Monge, dem diese Transformationen nicht unbekannt waren, machte in seiner „Collection des épures de l'École polytechnique" gar keine Anwendungen von denselben, und J. de la Gournerie spricht in seinem Traité de Géométrie descriptive nur für einfache Transformationen der Projectionsebenen aus, welche mit technischen Anforderungen nicht im Widerspruche stehen. S. dessen Traité de Géom. descr. I. pag. VI.)

[2]) S.: J. de la Gournerie, Discours sur l'art du trait et la Géométrie descriptive. Paris 1855.

Monge war es selbst, der schon vor hundert Jahren in diese neue Bahn einlenkte.

Wir verdanken Monge, welcher für die geometrische Wissenschaft den bis dahin unbekannten Begriff der geometrischen Allgemeinheit und der geometrischen Eleganz geschaffen hatte, eine stattliche Zahl von geometrischen Beziehungen, die aus der Gestalt und gegenseitigen Lage der räumlichen Gebilde entspringen. In seinen Werken, welche wahre Muster eleganter und fließender Darstellung sind, und bei denen der Stil der Darstellung immer mit dem Geiste der Methoden auf das innigste verbunden ist, erhob sich die Geometrie zu einer freieren und allgemeineren Anschauung der Lagenverhältnisse. [1]) Monge gab in seiner Géomètrie descriptive die ersten Beispiele von der Nützlichkeit der innigen und systematischen Vereinigung der Figuren dreier Dimensionen und der ebenen Figuren. Mit Hilfe dieser Betrachtungen bewies er mit einer seltenen Eleganz und vollkommener Klarheit die schönen Theoreme, welche die Theorie der Pole bei den Curven des zweiten Grades ausmachen; ferner die Eigenschaften sämmtlicher Ähnlichkeitspunkte bei drei Kreisen, dass je drei von ihnen in gerader Linie liegen, und verschiedene andere Sätze der Curven und Flächen zweiten Grades. Aber auch das in der Analysis und Algebra längst heimisch gewordene Imaginäre bildete kein Hindernis mehr für die geometrische Betrachtung. Monge sah es als eine „zufällige und überraschende Folge" der zufälligen Lagenverhältnisse an, welche auf die wesentlichen Eigenschaften solcher Gebilde, die durch bestimmte Eigenschaften definiert sind, keinen Einfluss haben kann.

Seitdem haben die Schüler Monges diese Geometrie mit Erfolg gepflegt und weiter ausgebildet, und zwar auf eine neue Art, welcher man mit Recht den Namen der Schule des Monge gegeben hat, und welche darin besteht, dass in die ebene Geometrie die Betrachtungen der Geometrie dreier Dimensionen eingeführt werden. Das Interesse der geometrischen Forschung an der räumlichen Gestalt, welches solange hinter dem Interesse an abstracten Größenbeziehungen zurückgetreten war, erwachte mit neuer Frische zu voller Kraft. Die auf diese Art gemachten Entdeckungen sind zahlreich, und ihre nähere Betrachtung bildet eine der interessantesten Partien in der Geschichte der Geometrie. [2]) Brianchon war der erste, welcher die ganze Wichtigkeit dieser Methode in seinem Mémoire [3]) erkannte und neue Betrachtungen über

[1]) S.: Chasles, Aperçu historique. IIe édit. Paris 1875, pag. 189, 355. — Dr. H. Hankel, Die Elemente der projectiven Geometrie. Leipzig 1875. S. 1—32.

[2]) S.: Chasles, Aperçu historique. Paris 1875, pag. 189.

[3]) S.: Journal de l'École polytechnique, cahier XIII, 1806, pag. 297.

diesen Gegenstand anstellte, von denen uns Poncelet sagt, dass er ihnen die erste Idee zu den schönen und zahlreichen Untersuchungen über das Princip der Continuität verdanke, welche in seinem Traité des propriétés projectives des figures enthalten sind. [1]) Ebenso nahmen Gaultier, [2]) und Gergonne [3]) an dem nun durch die Freiheit seiner Forschungen sich kennzeichnenden Aufschwung der Geometrie einen regen Antheil. [4]).

Die darstellende Geometrie besitzt eine Methode, welche ihr ganz eigen ist; sie besteht in der directen Vergleichung der Größenverhältnisse und in der Betrachtung der geometrischen Beziehungen, welche sich aus den Constructionen ergeben. Diese Methode genügt im allgemeinen in den graphischen Künsten, aber sie ist mitunter außer Stande, gewisse Theoreme, die zur Construction ihrer Risse nothwendig sind, mit der erwünschten, mathematischen Schärfe zu entwickeln. Deshalb hatten Monge und seine Nachfolger — J. de la Gournerie inbegriffen — bis über die Mitte dieses Jahrhundertes die darstellende Geometrie nicht bloß als eine graphische Kunst, sondern auch als einen besonderen Wissenzweig der Mathematik betrachtet, in welchem zur Begründung der Constructionen, die in verschiedenen Zweigen des Ingenieurwesens nöthig sind, ohne Widerspruch auch Lehrsätze der analytischen Geometrie benützt werden können. Dieser Auffassung der descriptiven Geometrie, welche die französischen Geometer mit ihrer vielfachen, praktischen Verwendung und ihrer großen Bedeutung in den technischen Wissenschaften als eine berechtigte betrachteten, traten nach den unvergänglichen Schöpfungen, welche die Geometrie der Lage Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles u. A. zu verdanken hatte, hervorragende deutsche Geometer frühzeitig entgegen und waren mit Erfolg bestrebt, die darstellende Geometrie mit der Geometrie der Lage in organische Verbindung zu bringen. So wurde aus der descriptiven Geometrie, die Monge hauptsächlich als eine Hilfswissenschaft

---

[1]) Paris 2822.

[2]) S.: Journal de l'École politechnique, année 1812.

[3]) S. a. Annalen von 1810—31.

[4]) S.: M. Chasles, Rapport sur les progrès de la Géométrie. Paris 1870, pag. 28, 41, 44, etc. — Vergl. auch in Hankels Elemente der projectiven Geometrie den Artikel „Historische Übersicht des Entwickelungsganges der neuen Geometrie". S. 1—32. — S. f.: Gino Loria, Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. (Memorie della Reale Academia delle Science di Torino. Ser. II, T. 38. Torino 1887.) Ins Deutsche übertragen von Fritz Schütte. Leipzig 1888. (Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwicklung.) S. 14—17 u. 46—50.

der Ingenieurwissenschaften geschaffen hatte, eine selbständige Wissenschaft. Ihre eigentliche geistige Aufgabe war nun neben der Unterstützung der Ingenieurwissenschaften die wissenschaftliche Entwickelung und Durchbildung des Vermögens der Raumanschauung, während die graphische Construction seit den letzten zwei Decennien nur so lange als Lehrziel betrachtet wird, bis der Geist ohne äußere Anschauung räumlich zu denken im Stande ist.

Die Methoden der neueren Geometrie hatten schon in der Mitte dieses Jahrhundertes eine solche Bedeutung erlangt, dass sie auf die darstellende Geometrie nicht ohne Einfluss bleiben konnten. Sehen wir von einigen unentbehrlichen Begriffen und Bestimmungs- oder Ausdrucksweisen analytischen Ursprunges wie Ordnung, Classe, Lehrsätzen aus der Gleichungstheorie, etc. ab, so trat in den letzten Decennien dieses Jahrhundertes eine vollständige Umgestaltung der darstellenden Geometrie im Sinne der neueren Geometrie ein. Diese Umgestaltung der descriptiven Geometrie von Monge im Sinne der neugeometrischen Forschungen von Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles, von Staudt, etc. war vom wissenschaftlichen Standpunkte eine Nothwendigkeit, weil die projective Geometrie so viele einfachere Entwickelungen und Auflösungen von Aufgaben gestattet, dass sie ohne Nachtheil in der darstellenden Geometrie als Wissenschaft nicht zu entbehren ist.

Diese Umgestaltung der darstellenden Geometrie im Sinne der neueren Geometrie gieng aber zuerst von Deutschland und Österreich aus.

Die erste deutsche Bearbeitung von Monges Géométrie descriptive und ihre Erweiterung im Sinne der neueren Geometrie verdanken wir dem ehemaligen Lieutenant in der großherzoglich-badischen Artillerie, Guido Schreiber, welcher vom Großherzog Ludwig von Baden als Lehrer der geometrischen und topographischen Zeichnung an die im Jahre 1825 errichtete polytechnische Schule zu Karlsruhe berufen wurde. Schreibers Lehrbuch der darstellenden Geometrie, welches 1828—29 in Karlsruhe und Freiburg in zwei Lieferungen (360 Seiten und 45 Tafeln mit 122 Figuren) erschien und dem Gründer der polytechnischen Schule in Karlsruhe, dem Großherzog Ludwig von Baden gewidmet ist, ist das erste umfassende Lehrbuch der darstellenden Geometrie in deutscher Sprache.[1])

[1]) Anmerkung. Das erste deutsche Lehrbuch der descriptiven Geometrie sind die „Anfangsgründe der darstellenden Geometrie oder der Projectionslehre für Schulen“ von M. Creizenach, welche (108 Seiten mit 53 Figuren auf 6 Steintafeln) mit Benützung französischer Werke im Jahre 1821 in Mainz erschienen. Das nächste deutsche Lehrbuch war die „Constructionslehre mit ihren Anwendungen auf Schattenconstruction, Perspective und Maschinenzeichnen“ als Vorbereitung zu

Es ist ein Verdienst des Verfassers dieses Werkes, welches nach Monges Ausgabe vom Jahre 1808, die durch Hachettes Supplemente bereichert worden war, dass die darstellende Geometrie in Deutschland große Verbreitung fand. In diesem Werke finden wir zuerst die allgemeine Theorie der fünf Arten der Flächen zweiter Ordnung nach Monge und Hachette bearbeitet.

Während in Frankreich die Untersuchung der verschiedenen Flächen und Curven, insbesondere ihrer Krümmungsverhältnisse vorwiegend mit analytisch-geometrischen Mitteln verfolgt wurde, war Guido Schreiber der erste darstellende Geometer, welcher auf Grund der Forschungen von Poncelet und Steiner die darstellende Geometrie von der analytischen Geometrie unabhängig zu machen und auf projectiver Grundlage aufzubauen suchte. Der selbständige Aufbau der darstellenden Geometrie auf projectiver Grundlage erfolgte in seinem „Geometrischen Port-Folio, Curs der darstellenden Geometrie in ihren Anwendungen, Karlsruhe 1839 und 1843“. Demselben Verfasser ver-

---

zu Monges und Hachettes Werken, das im Jahre 1824 in Wien erschien und Josef Arbesser, Assistenten am k. k. polytechnischen Institute zum Verfasser hat. Das Werkchen behandelt den Lehrstoff der darstellenden Geometrie den damaligen technischen Bedürfnissen entsprechend auf 114 Seiten, enthält 88 Figuren auf 7 Tafeln und ist Herrn Johannes Arzberger, Professor der Maschinenlehre gewidmet. Im folgenden Jahre 1825 erschienen in Wien die „Elemente der entworfenden Geometrie, nebst einem Anhange von der Bestimmung der Schattenumrisse“ von W. von Alemann, Unterlieutenant im k. k. Pionier-Corps. Das treffliche Werkchen, 180 Seiten und 71 Figuren auf 13 Tafeln umfassend und Seiner Excellenz dem Herrn Feldmarschall-Lieutenant von Faber, Director der Wiener-Neustädter Militär-Akademie gewidmet, behandelt in fünf Abschnitten und einem Anhang die Elemente der darstellenden Geometrie in streng theoretischer Weise und hatte zweifellos Monges descriptive Geometrie zum Vorbilde. Wir müssen den Wert von Alemanns Elementen um so höher schätzen, als es zu jener Zeit in ganz Deutschland mit Ausnahme der noch bescheidenen „Anfangsgründe von Creizenach“ kein deutsches Lehrbuch der darstellenden Geometrie gab, und diese mathematische Disciplin zu jener Zeit nur aus den französischen Originalwerken von Monge, Hachette, Lacroix und Potier bekannt war. Der Verfasser, welcher von dem Principe der Collineation und Affinität schon vielfache Anwendungen machte — ohne sich jedoch über dieses Princip näher auszusprechen — war auch bemüht bei gründlicher Darstellung des Lehrstoffes die bis dahin gebräuchliche französische Terminologie nach Möglichkeit durch eine Deutsche zu ersetzen.

Zwanzig Jahre später, 1845 erschien in Wien als erstes österreichisches Werk (513 Seiten und 26 Tafeln mit 376 Figuren) die bekannte „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie“ von Johann Hönig, o. ö. Professor der darstellenden Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien, den wir mit vollem Rechte als den Begründer der österreichischen Schule in der descriptiven Geometrie bezeichnen müssen.

danken wir nebst mehreren populären Abhandlungen auch das treffliche Werk „Malerische Perspective, Karlsruhe 1854".

Schon in Dr. B. Guglers „Lehrbuch der descriptiven Geometrie, Nürnberg 1841" war die darstellende Geometrie selbständig und von der analytischen Geometrie unabhängig aufgebaut. Auch Pohlke benützte in seiner „Darstellenden Geometrie, Berlin 1860" Sätze aus der neueren Geometrie, ohne jedoch deren Charakter seinen Untersuchungen in der orthogonalen Projection, Axonometrie und Perspective aufzuprägen.

Die volle Einführung der projectiven Geometrie in die darstellende Geometrie verdanken wir jedoch hauptsächlich Herrn Dr. Wilhelm Fiedler, derzeit Professor der descript. Geometrie am eidg. Polytechnikum in Zürich, vorher am deutschen Polytechnikum in Prag, der in seinen seit dem Jahre 1860 erschienenen Abhandlungen und Werken die Lehren der Geometrie der Lage mit jenen der darstellenden Geometrie auf das innigste verschmolzen hat. [1])

Selbstverständlich konnte Frankreich, welches in den Forschungen von Carnot, Dupin, Brianchon, Poncelet, Chasles etc. wertvolle, eigene Schöpfungen besaß, hinter Deutschland nicht zurückbleiben, und so kam es, dass einer seiner bedeutendsten Geometer J. de la Gournerie nach Veröffentlichung des ersten Bandes seines an vortrefflichen Einzelnheiten so reichen Werkes „Traité de Géométrie descriptive, III Parts, Paris 1860, 62 und 64" unter dem Eindrucke der großen Bedeutung neugeometrischer Methoden den Lehrgang seines in Angriff genommenen Werkes änderte und der Geometrie der Lage eine, wenn auch noch bescheidene Rolle zuwies. So ruht in diesem vorzüglichen Werke, welches in seiner Lehre von der Krümmung der Flächen, der abwickelbaren und windschiefen Flächen, ihrer Strictionslinien, der Schraubenflächen und ihrer Schattengrenzen, sowie deren Tangenten und den zwei Flächen oder Linien zweiter Ordnung um-

---

[1]) Dr. W. Fiedler, Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft. Chemnitz 1860. — „Über die Transformationen in der darstellenden Geometrie." Zeitschrift für Mathematik und Physik. 9. Bd. Jahrg. 1864. S. 331—355. — „Die Methodik der darstellenden Geometrie zugleich als Einleitung in die Geometrie der Lage". Sitzungsberichte der kais. Akademie d. Wissensch. in Wien. 55. Bd. II. Abth. 1867. S. 659. — Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Leipzig 1871. (II. Aufl. 1875, III. Aufl. 1883—85). — Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme. Leipzig 1882. — Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen. Leipzig 1862. — S. a. die italienische Übersetzung von Fiedlers Darstellender Geometrie von Prof. Padova (Pisa) und Sayno (Mailand). Firenze 1874.

schriebenen Developpabeln wertvolle Bereicherungen der Wissenschaft enthält, selbst die für die Schattenconstruction so wichtige developpable Fläche, welche zwei Kegelschnitten gemeinsam umschrieben ist, noch auf analytischer und nicht auf reingeometrischer Grundlage. [1])

In hervorragender Weise nahmen dann an der Neugestaltung der darstellenden Geometrie auf projectiver Grundlage die Herren Professoren R. Niemtschik [2]), Dr. R. Staudigl [3]), J. Schlesinger [4]), Dr. G. A. V. Peschka [5]), E. Koutny [6]), A. Mannheim [7]), Dr. Gino Loria [8]),

[1]) S.: „Observations sur la développable circonscrite à deux sections coniques situées dans de plans parallèles" et „Détermination générale des surfaces d'ombre et de pénombre. Développables circonscrite à deux surfaces du second degré." (Traité de Géométrie descriptive. Deuxième Partie. Paris 1862, pag. 71—104. Articles 501—544. — Vergl. a.: Dr. Wilhelm Fiedler, Die darstellende Geometrie. Leipzig 1875. Art. 101, S. 385: „Die gemeinsam umschriebene Developpable von zwei Flächen zweiten Grades." — Dr. G. A. V. Peschka, Darstellende und projective Geometrie. Wien 1884. III. Bd. S. 769. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig 1887. II. Bd. S. 381 und 385.

[2]) S.: Rudolf Niemtschiks Abhandlungen in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien. II. Abth. Bd. 36—73. Jahrg. 1859—1876. (S. a. d. VI. Absch. dieser math.-histor. Studie.)

[3]) Dr. R. Staudigls Abhandlungen in den Wiener Sitzungsberichten. II. Abth. Bd. 58—68. Jahrg. 1868—74. — Grundzüge der Reliefperspective. Wien 1868. — Lehrbuch der neueren Geometrie. Wien 1871. — Die axonometrische und schiefe Projection. (Parallel-Perspective. Wien 1875). (S. a. VI. Absch. d. math.-hist. Studie).

[4]) S.: J. Schlesingers Abhandlungen. Wiener Sitzungsber. 54.—59. Bd. Jahrg. 1868—70. — Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie. Wien 1870.

[5]) S.: Dr. G. A. V. Peschkas Abhandlungen in den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien. II. Abth. 78—85. Bd. Jahrg. 1877—82. S. a. Archiv der Math. u. Phys. 57. und 59. Bd. Jahrg. 1875—76; Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. Wien 1874. — Peschka-Koutny, Freie Perspective. Hannover 1868 und Peschka, Freie Perspective. (Centrale Projection) I. u. II. Bd. Leipzig 1888—89. — Kotierte Ebenen und deren Anwendung. Brünn 1877. — Darstellende und projective Geometrie. I.—IV. Bd. Wien 1883—85.

[6]) S.: E. Koutnys Abhandlungen in den Wiener Sitzungsberichten. II. Abth. 55.—75. Bd. Jahrg. 1867—77. S. a.: Archiv der Math. u. Physik. 46. Bd. Jahrg. 1866. — Zeitschrift für Math. u. Physik. 12. Bd. Jahrg. 1867. — Zeitschrift des Ingenieur- und Architekten-Vereines. Jahrg. 1866 und Verhandlungen des Naturforschenden Vereines in Brünn. Jahrg. 1865. — Peschka-Koutny, Freie Perspective. Hannover 1868.

[7]) A. Mannheim, Cours de Géométrie descriptive. Paris 1880 et 1886. S. a.: Comptes rendus, tom. LXVI. etc. — Journal de l'École polyt. 1858 etc. — Nouvelles Annales de Math. 1857 etc. — Annali di Matematica 1858 etc.

[8]) Dr. Gino Loria. S.: Bulletin de la Société mathématique de France. — Giornale di Matematica. — Atti dell'Accademie delle Scienze di Torino etc.

Dr. Th. Reye [1]), Dr. Chr. Wiener [2]), G. Hauck [3]), R. Sturm [4]), L. Burmester [5]), Fr. Schur [6]), Fr. Tilscher [7]), C. Küpper [8]), Dr. Emil Weyr [9]), Dr. Ed. Weyr [10]), K. Pelz [11]), A. Ameseder [12]),

---

[1]) Dr. Th. Reye, Geometrie der Lage. Hannover 1866—68. — Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme. Leipzig 1879 etc.

[2]) Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. I. u. II. Bd. Leipzig 1884 u. 87. — Über Vielecke und Vielflache. Leipzig 1864. — S. a.: Zeitschrift für Math. u. Physik. Bd. 12. — Math. Annalen. Bd. 3, 6, etc.

[3]) G. Hauck, Die subjective Perspective. Stuttgart 1875. — Grundzüge einer allg. axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective. Zeitschrift für Math. u. Physik. 1876. — Neue Constructionen der Perspective und Photogrammetrie. Journal f. d. reine und angew. Math. Bd. 95 - 108. 1884—91 etc.

[4]) Dr. R. Sturm, Elemente der darst. Geometrie. Leipzig 1874. — Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. Leipzig 1867. — Die Gebilde des ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie. Leipzig 1892. — S. a.: Math. Annalen, Journal für Math. etc.

[5]) Dr. L. Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen. Leipzig 1875. — Grundzüge der Reliefperspective. Leipzig 1883. — S. a. Zeitschrift für Math. u. Physik und dessen Lehrbuch der Kinematik. Leipzig 1888 etc.

[6]) Fr. Schur (Math. Annalen und Zeitschrift für Math. u. Physik etc.).

[7]) Fr. Tilscher, System der technisch-malerischen Perspective. Prag 1867 und 1883. — Die Lehre der geometrischen Beleuchtungsconstructionen. Wien 1862. — S. a. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. II. Abth. Bd. 45, Jahrg. 1862. — Kritische Bemerkungen zur Einführung in die Anfangsgründe der Géométrie descriptive. Wien 1883 etc.

[8]) C. Küpper. (S. die Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1872—95). — Math. Annalen. — S. a. W. Rulf, Elemente der projectiven Geometrie. Halle 1889 etc.

[9]) Dr. Emil Weyr. S. die Abhandlungen in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften. Bd. 57—103. Jahrg. 1868—1894, und Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissensch. Prag 1870—74. — Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde. Leipzig 1869. — Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein- zweideutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung. — Die Elemente der projectiven Geometrie. Wien 1883 u. 1887 etc.

[10]) Dr. Eduard Weyr. S.: Sitzungsberichte der Wiener Akademie. II. Abth. Bd. 58—82, Jahrg. 1868—80. — Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissensch. Prag 1873—1895. — (S. a. Dr. G. E. Weyer, Einführung in die neuere construierende Geometrie. Leipzig 1891).

[11]) K. Pelz. S. die Abhandlungen in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissensch. zu Wien. Bd. 66—100. Jahrg. 1872—1891 etc. — Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellsch. der Wissensch. Prag 1872, 80, 82, 85 etc. 1895. — S. a. Zeitschrift für das Realschulwesen in Wien.

[12]) A. Ameseder. S.: Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissensch. Bd. 79—100. Jahrg. 1879—91.

K. Klekler[1]), Fr. Ruth[2]), O. Rupp[3]), Dr. E. Waelsch[4]), C. Moshammer[5]), R. Morstadt[6]), J. Tesař[7]), H. Drasch[8]), Dr. M. Lazarski[9]), Machovec[10]) etc. theil und führten in ihren geschätzten Werken und Abhandlungen eine vollständige Verschmelzung dieser beiden Wissenszweige durch.

Diese Untersuchungen in der descriptiven und projectiven Geometrie stehen im innigsten Zusammenhange mit den bahnbrechenden Forschungen von Poncelet[11]), Möbius[12]), Jacob Steiner[13]), Plücker[14]), von Staudt[15]) und Chasles[16]), welchen bald die wertvollen Forschungen

---

[1]) K. Klekler, Die Methoden der darstellenden Geometrie. Leipzig 1877.

[2]) Fr. Ruth. S.: Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. Bd. 80, 95, 100 etc. Jahrg. 1879—1891 etc.

[3]) O. Rupp. S.: Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissensch. 86. u. 104. Bd. Jahrg. 1882 u. 1895. — Math. Annalen. Bd. 18, Jahrg. 1891. — S. a. Monatshefte für Math. und Physik. IV. Jahrg. Wien 1893.

[4]) Dr. E. Waelsch. S.: Sitzungsberichte der Wiener Akademie. II. Abth. Bd. 88—103. Jahrg. 1883—95 etc.

[5]) C. Moshammer. Ibid. Bd. 49, 51, 73, 74. Jahrg. 1864—77.

[6]) R. Morstadt. Ibid. Bd. 56. Jahrg. 1867 und Zeitschrift für Math. und Physik. Bd. 12.

[7]) J. Tesař. Wiener Sitzungsber. Bd. 81, 84, 86, 94, 101. Jahrg. 1880—1892. Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissensch. Jahrg. 1886—88 etc.

[8]) H. Drasch. Wiener Sitzungsber. Bd. 77, 81, 82, 87. 101. Jahrg. 1878—1893.

[9]) Dr. M. Lazarski. Sitzungsberichte der königl. polnischen Gesellschaft der Wissensch. in Krakau. Jahrg. 1882—95.

[10]) F. Machovec. Sitzungsber. der königl. böhm. Gesellschaft d. Wissensch. in Prag. Jahrg. 1884—94.

(Anmerkung: S. a. die Abhandlungen von M. Pelišek und J. S. Vaneček Ibid.) — S. f.: C. Th. Anger, Einfluss der Projectionslehre auf die neuere Geometrie. Danzig 1856.

[11]) Traité des propriétés projectives des figures. Paris 1822. (IIe édition 1865).

[12]) Der barycentrische Calcul. Leipzig 1827.

[13]) Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832.

[14]) Theorie der algebr. Curven. Bonn 1839. etc.

[15]) Geometrie der Lage, Nürnberg 1847 und Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1856 bis 1860.

[16]) Traité de Géométrie supérieure. Paris 1852.

von Brasseur[1]), Jonquières[2]), Salmon[3]), Maxwell[4]), Cayley[5]), Cremona[6]), Dunesme[7]), Seydewitz[8]), Paulus[9]), Pohlke[10]), Reye[11]), Clebsch[12]), Durège[13]), Schroeter[14]), Schubert[15]), Schoute[16]), Heger[17]), Kötter[18]), Voss[19]), Rohn, Papperitz[20]) und anderer bekannten Geometer folgten.

Eine sorgfältige, streng wissenschaftliche Pflege wurde besonders in den letzten drei Jahrzehnten allen Zweigen der darstellenden Geometrie zu theil, welche in diesem Zeitraume auch eine wesentliche Erweiterung erfuhren. An diesem erfreulichen Aufschwung unserer Wissenschaft nahmen insbesondere Frankreich, Belgien, Holland, Italien, Deutschland und Österreich einen hervorragenden Antheil. Die Perspective fand in den Werken von J. de la Gournerie (Traité de perspective linéaire. Paris 1859), Fr. Tilscher (System der technisch-

[1]) S. „Mémoire sur une nouvelle méthode d'application de la Géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendu." (Académie des sciences de Bruxelles 1853.) S. a. „Mémoire sur divers lieux géométriques du second degré déterminés par la géométrie descriptive."

[2]) Mélanges de géométrie pure etc. Paris 1856. — Essai sur la génération des courbes géométriques et en particulier sur celle de la courbe de quatrième ordre. Paris 1858. — S. a. Liouvilles Journal, Comptes rendus, Annali di Matematica, etc.

[3]) A Treatise on the analytic Geometry of three dimensions. 3. edit. Dublin 1874. Cambridge and Dublin Math. Jour.

[4]) Quarterly Journal.

[5]) Ibid. Transactions of the Cambridge philosoph. soc. — Crelles Journal. etc.

[6]) „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane". (Bologna Mem. 1862). Preliminari di una teoria geometrica delle superficie. (Bologna Mem. IIe ser. t. 6. e 7). (Deutsch von Curtze, Greifswald 1865 und Berlin 1870) etc.

[7]) Comptes rendus. 1857.

[8]) Archiv für Math. und Physik. Jahrg. 1847.

[9]) Grundlinien der neueren Geometrie. Stuttgart 1853.

[10]) Darstellende Geometrie. Berlin 1860 (4. Aufl. Berlin 1876).

[11]) Die Geometrie der Lage. Hannover 1866—68 etc.

[12]) Vorlesungen über Geometrie. Leipzig 1875. u. 1891 S. a. Crelles Journal.

[13]) Die ebenen Curven dritter Ordnung. Leipzig 1871. S. a. Wiener Sitzungsberichte. Bd. 72, 73, 81, 82, 83 etc. Math. Annalen Bd. 1, 5, etc.

[14]) Steiner-Schroeter, Die Theorie der Kegelschnitte. Leipzig 1867. — Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung. Leipzig 1880.

[15]) Kalkul der abzählenden Geometrie. Leipzig 1879.

[16]) Journal für Math. S. a. Wiener Sitzungsberichte. Bd. 60, 91, 98.

[17]) Die Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten. Leipzig 1881.

[18]) Berliner Abhandlungen 1887 etc.

[19]) Math. Annalen. Bd. 8, 9, 10, etc.

[20]) Lehrbuch der darstellenden Geometrie. I. u. II. Bd. Leipzig 1893—96. — Math. Annalen.

malerischen Perspective. Prag 1867), Peschka-Koutny (Freie Perspective. Hannover 1868, II. Aufl. Leipzig 1888—89), F. Bossuet (Traité de perspective linéaire. Bruxelles-Paris 1868), W. Fiedler (Die darst. Geometrie. Leipzig 1871 u. 75. III. Aufl. 1883—88), K. Pelz (Wiener Sitzungsberichte. Jahrg. 1877, 78, etc.), Guido Hauck (Die subjective Perspective. Stuttgart 1879), A. Mannheim (Cours de géométrie Paris 1880 et 86), Dr. Chr. Wiener (Lehrbuch der darst. Geometrie. Leipzig 1884 u. 87) etc., eine bedeutende Erweiterung und wissenschaftliche Vertiefung auf reingeometrischer Grundlage.

Die Geometrie der kotierten Projectionen und die Topographie fanden in den Werken von Leroy (Géométrie descriptive. Paris 1842), J. de la Gournerie (Géométrie descriptive. Paris 1860—64), Dr. G. A. V. Peschka (Kotierte Ebenen und deren Anwendung. Brünn 1877), A. Mannheim, Dr. Chr. Wiener, etc. nicht bloß einen Ausbau auf wissenschaftlicher Grundlage, sondern mannigfache praktische Anwendungen. Einer besonderen Pflege erfreute sich in diesem Zeitraume die schiefe Projection und fand besonders in Deutschland und Österreich in den Werken von J. Schlesinger (Die darstellende Geometrie. Wien 1870), Dr. G. A. V. Peschka (Freie schiefe Projection. Wiener Sitzungsberichte, 75. Bd. Jahrg. 1877. S. a. Darstellende und proj. Geom. Wien 1883), Dr. R. Staudigl (Die axonometrische und schiefe Projection. Wien 1875), Dr. L. Burmester (Grundzüge der schiefen Parallelprojection. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 16. Bd. Jahrg. 1871), H. Hertzer, (Grundprincipien der Parallelprojection. Berlin 1892), Dr. A. Weiler (Neue Behandlung der Parallelprojection und der Axonometrie. Leipzig 1889 u. 1896) etc. eine mehrfache Behandlung.

Die Axonometrie, welche in den wissenschaftlichen Arbeiten von Farish (Isometrical perspective. Transactions of the Cambridge philosophical society, 1820), Brandes (Isometrische Perspective. Leipzig 1833), Sopwith (A Treatise on isometrical drawing. London 1834) und J. Weisbach (Über die monodimetrische und anisometrische Projectionslehre. Tübingen 1844) ihre Grundlage fand, wurde vielfach in der Kristallographie — so in den Werken von Mohs (Grundzüge der Mineralogie, 1822—24), Breithaupt (1841—52), Naumann (1841) und Kopp (1849) etc. verwendet. Ihre theoretische Erweiterung und Ausbildung verdankt die Axonometrie den wissenschaftlich-wertvollen Untersuchungen von Möllinger [1]), R. Skuhersky [2]), C. Th. und

[1]) Isometrische Projectionslehre. Solothurn 1840.

[2]) „Die orthographische Parallelperspective." Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissensch. in Wien. Bd. Jahrg. 1850 und Sitzungsber. der königl. böhm. Gesellschaft der Wissensch. Prag 1858.

M. H. Meyer[1]), R. Schmidt[2]), Pohlke[3]), Fiedler[4]), G. Hauck[5]), Staudigl[6]), Peschka[7]), Pelz[8]), Tesař[9]), J. Mandl[10]), Tessari[11]), H. A. Schwarz[12]), Wiener[13]), Weiler[14]), etc.

Eine wesentliche Erweiterung erfuhr die darstellende Geometrie als Wissenschaft in den letzten Decennien durch die streng wissenschaftliche Begründung der Schatten- und Beleuchtungslehre, sowie durch die Aufnahme der kinematischen Geometrie und durch die wissenschaftliche Begründung der Reliefperspective und der Photogrammetrie.

Die auf geometrische Construction gestützte Beleuchtungslehre entwickelte sich gleichzeitig mit der wissenschaftlichen Perspective, blieb aber fast bis zum Beginne des neunzehnten Jahrhundertes nur auf die eigentliche Schattenlehre beschränkt. Der italienische Maler Leon Battista Alberti, bekannt durch sein vor 1446 geschriebenes Werk „De pictura" gab schon die ersten Andeutungen über die Linien gleicher Helligkeit. Albrecht Dürer construierte in seiner bereits genannten „Underweysung, Nürnberg 1525" die Perspective des Würfels mit seinem Schatten, während die folgenden Schriftsteller in der Perspective sich auf ebenflächige Körper beschränkten und höchstens noch

---

[1]) Lehrbuch der Axonometrie. Leipzig 1852.

[2]) Theor.-prakt. Lehrgang der Axonometrie. Leipzig 1859.

[3]) Darstellende Geometrie. Berlin 1870 und 76. S. 91.

[4]) Die darstellende Geometrie. Leipzig 1871 (75, III. Aufl. 1883—88). S. 196.

[5]) „Grundzüge der allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective." Zeitschrift für Math. u. Physik. 21. Bd. Jahrg. 1876.

[6]) Die axonometrische und schiefe Projection. Wien 1875.

[7]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. 78, Jahrg. 1878. — S. a. d. Werk „Darstellende und proj. Geometrie". I. Bd. S. 384.

[8]) Ibid. Bd. 76, 81 und 83, Jahrg. 1877, 80 und 84. Prager Sitzungsberichte. Jahrg. 1885.

[9]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. 81. Jahrg. 1880.

[10]) Ibid. Bd. 94, Jahrg. 1886.

[11]) „Projezione assonometriche ortogonali e oblique". Torino 1882.

[12]) Crelles Journal. Bd. 63. — (S. a. Th. Reye s, Abhandlung in der Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft. Zürich 1866).

[13]) Lehrbuch der darst. Geometrie. Leipzig 1884. S. 427.

[14]) Anmerkung. S. a.: „Perspectives axonométrique et cavalière" in J. de la Gournerie s Traité de Géométrie descriptive. Ie Partie. Paris 1860. Pag. 114 und 123. — „Perspective cavalière", „Perspective axonométrique" und „Perspective isométrique in A. Mannheim, Cours de Géométrie descriptive de l'École polytechnique. Paris 1880. S. 112—134 und S. 134—153. — Dr. G. A. V. Peschka, Darstellende und projective Geometrie. Wien 1883. I. Bd. S. 340—368 u. S. 368 bis 404. — Vergl. a.: F. A. Heissig, Grundzüge einer trimetrischen Projectionsmethode. Wien 1864 und 1885 und A. Weiler, Neue Behandlung der Parallelprojectionen und der Axonometrie. Leipzig 1889 (II. Aufl. 1896) etc.

für den Cylinder die Schattenconstruction durchführten. Monge benützte umschriebene Cylinder und Kegel, deren Berührungscurven die Selbstschattengrenze und deren Schnitte die Schlagschattengrenze gaben. Er benützte leuchtende Flächen, unterschied Voll- und Halbschattengrenzen, welche sich aus der Berührung der beleuchteten Fläche mit der abwickelbaren, einhüllenden Strahlenfläche ergaben und construierte die Glanzpunkte spiegelnder Flächen. Dupin fand in seinen „Développements de Géométrie, Paris 1813", dass die Tangente der Selbstschattengrenze und der Lichtstrahl conjugierte Durchmesser der Indicatrix der Fläche im betrachteten Punkte sind. Hachette setzte in seiner Géométrie descriptive, Paris 1822 diese Untersuchungen fort, fand die Grenzpunkte, in denen bei convex-concaven Flächen der Lichtstrahl die Selbstschattengrenze berührt und deren Schatten eine Spitze der Schlagschattengrenze bildet. In der Correspondance sur l'École polytechnique, Paris 1809, Tom. II., pag. 13 construierte Hachette die Selbstschattengrenze der scharfgängigen Schraube (Schraube mit Dreiecksgewinde) mittelst eines anschließenden, hyperbolischen Paraboloides. Poncelet vereinfachte in seinen Application de l'Analyse (Paris 1862, Tom. I., pag. 447) diese Construction mit Hilfe des Doppelpunktes der Selbstschattencurve, während J. de la Gournerie (S. Journal de l'École polytechnique. Tom. 20, Paris 1851. Pag. 1) und Burmester (S. Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 18. Jahrg. 1873. S. 188) ausgedehnte, analytische Untersuchungen und graphische Darstellungen über die Bestimmung der Selbstschattengrenze der Schraubenflächen durchführten. Nicht unerwähnt wollen wir lassen, dass schon Bordoni (S. Giornale di fisica. Pavia 1823 und Dunesme (Comptes rendus, Tom. 38 et 45. Paris 1854 und 57) interessante Untersuchungen bezüglich der Schattengrenze der Ring- oder Wulstfläche (Torus) durchführten.

Die ersten, physikalischen Grundlagen für die Beleuchtungslehre betreffend die Helligkeit der beleuchteten Flächen finden wir bei Lambert in seiner Photometria (Augsburg 1760) und bei Bouger in seinem Essai d'optique (Paris 1729), sowie in seinem Traité d'optique (Paris 1760). Insbesondere lieferte Lambert den bekannten Cosinussatz für die Beleuchtungslehre. Auch Monge beschäftigte sich in seiner „Théorie des ombres", die in seinem Nachlasse vorgefunden und von Brisson in die siebente Auflage der Géométrie descriptive (Paris 1847) aufgenommen wurde, mit der Menge der auffallenden Lichtstrahlen und fand die Helligkeit einer Fläche nicht bloß vom Einfallswinkel der Lichtstrahlen, sondern auch vom Sehwinkel des Beobachters abhängig. Monge fand, dass die Helligkeit einer krummen Fläche in einem

Punkte derselben auch proportional sei dem Cosinus des Winkels, den der Sehstrahl des Beobachters mit dem Einfallslothe in dem betrachteten Punkte der krummen Fläche bildet. Diese Untersuchungen setzten Dupuis [1]), Brisson [2]), Bordoni [3]), Leroy [4]), Cohen Stuart [5]), Breton [6]), Egle [7]) und andere hervorragende Geometer fort. Neuere, wissenschaftlich wertvolle Untersuchungen über die geometrischen und physikalischen Grundlagen der Beleuchtungstheorie der Flächen (wahre und scheinbare Intensität, Isophoten, Isophengen etc.) verdanken wir Kammerer [8]), Tilscher [9]), Zöllner [10]), H. Helmholtz [11]), Burmester [12]), Koutny [13]), Niemtschik [14]), Fiedler [15]) Tessari [16]), Mannheim [17]), Wiener [18]), Waelsch [19]), Göller [20]) etc.

---

[1]) „Mémoire sur la détermination géometrique des teintes dans les dessins." Journal de l'École polyt. Cah. I, an III (1795).

[2]) Monges Géométrie descriptive. V^e édit. par Brisson. Paris 1827.

[3]) Giornale di fisica. Pavia 1823.

[4]) Géométrie descriptive. Paris 1842.

[5]) „Solution d'un problème de photométrie. Liouvilles Journal. Tom. 13. 1848.

[6]) Ibid. Tom. 17. Paris 1852.

[7]) Festschrift der polyt. Schule in Stuttgart 1855.

[8]) „Die Lichtintensitäts-Curven auf krummen Flächen." Wiener Sitzungsberichte. 46. Bd. II. Abth. 1862.

[9]) Die Lehre der geometrischen Beleuchtungsconstructionen. Wien 1862.

[10]) Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865 und 1879.

[11]) Physiologische Optik. Leipzig 1867.

[12]) „Über die Isophoten." Göttingen 1865. — Zeitschrift für Math. u. Physik. Jahrg. 1868—69. — „Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen." Leipzig 1871.

[13]) „Theorie der Beleuchtung krummer Flächen vom zweiten Grade." Brünn 1866. (Verhandlungen des Naturforsch. Vereines).

[14]) „Directe Beleuchtungsconstructionen". Wiener Sitzungsberichte 67. Bd. II. Abth. Jahrg. 1868.

[15]) Darstellende Geometrie. Leipzig 1871 und 75. S. 476. (III. Aufl. II. Bd., S. 497).

[16]) „La teoria delle ombre e del chiaro-scuro." Torino 1878—1880.

[17]) Cours de Géométrie descriptive. Paris 1880. S. 237 u. 324. — S. a. J. de la Gournerie, Traité de Géométrie descr. II^e Partie. Paris 1862. Pag. 1—104.

[18]) Lehrbuch der darst. Geometrie. Leipzig 1884. I. Bd. S. 390. (Physikalische Grundlage der Beleuchtungslehre). — S. a. Verhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereines in Karlsruhe. Jahrg. 1881.

[19]) „Über Isophoten einer Fläche bei centraler Beleuchtung." Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissensch. in Wien. Bd. 101, II. Abth. Jahrg. 1892.

[20]) Adolf Göller, Lehrbuch der Schattenconstruction und Beleuchtungskunde. Stuttgart 1895.

Anmerkung: In A. Göllers Werke erscheint die Beleuchtungskunde oder die Lehre von den Lichtstufen mit scharfer Sonderung von der Schattenconstructionslehre ausschließlich als Lehre von der Normalkugel mit ihrer Verwertung für andere Flächen.

Was die Beleuchtungskunde oder die Lehre von den Lichtstufen (Intensitäten) beleuchteter Flächen anbelangt, so haben schon Monge in seiner „Théorie des ombres“ und seine Nachfolger Olivier (Développements de Géométrie descr. Paris 1843) und Leroy (Traité de Stéréotomie. Paris 1844) den Begriff der Linien gleicher Helle festgestellt und diese Lichtstufenlinien (Intensitätslinien) für die Kugel bestimmt. Eine praktische Verwertung dieser Intensitätslinien der Kugel für andere krumme Flächen erfolgte aber erst in der zweiten Hälfte dieses Jahrhundertes, da die darstellenden Geometer der ersten Hälfte desselben, wie Hachette (Traité de Géom. descr. Paris 1822), Bordoni („Sopra le linee uniformente illuminate“. Giornale di fisica etc. Pavia 1823), Adhémar (Traité de perspective linéaire. Paris 1838), S. Haindl (Darst. Geometrie. München 1835) und selbst J. de la Gournerie (Traité de Géom. descr. Paris 1860—64) sich hauptsächlich mit der Form des Schattens beleuchteter Objecte beschäftigten, ohne in das Wesen der Beleuchtung tiefer einzudringen. [1]) Der erste darstellende Geometer, der die Intensitätslinien der Kugel für ebenbegrenzte Körper verwendete, war J. Egle, Professor der polytechnischen Schule zu Stuttgart. Dies geschah in seiner „Abhandlung über das Schattieren der Oberflächen regelmäßiger Körper“, welche im Jahre 1855 in der Festsschrift der Stuttgarter polytechnischen Schule veröffentlicht wurde. Das nächste, umfassende Werk in der Beleuchtungskunde war „Die Lehre der geometrischen Beleuchtungsconstructionen und der Anwendung auf das technische Zeichnen, Wien 1862“ und hatte Herrn Fr. Tilscher, damals Hauptmann im k. k. Geniestabe und Professor der darstellenden Geometrie an der k. k. Genie-Akademie zu Klosterbruck zum Verfasser. Er bediente sich zur Construction der Lichtstufenlinien (Intensitätslinien) nicht der sogenannten Normalkugeln, sondern benützte Ebenenbüschel und ein coaxiales, gerades Kreiskegel-Büschel, welches

---

S. a.: J. R. v. Siegls, Schattenconstructionen, Wien 1886 und Jos. Bazala, Beleuchtungsconstructionen. (Archiv der Mathem. und Physik. II. Reihe. Theil I., V., XI.) und insbesondere der Abschnitt „Beleuchtungs-Intensitäten und Construction der Isophoten für krumme Flächen in Peschkas Darstellende und projective Geometrie. Wien 1885. IV. Bd. S. 543—605 etc.

[1]) Anmerkung: Doch hatte schon Bordoni in seiner auf analytischer Grundlage ausgeführten Abhandlung die Intensitätslinien der Normalkugel bestimmt und dieselben mit Hilfe der eingelegten Kugel auf die Ring- oder Wulstfläche (Torus) übertragen. Vergl. a.: J. Hönig, Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie. Wien 1845. S. 468—470, Fig. 360 und S. 470—472, Fig. 361. — In Dr. B. Guglers trefflichem „Lehrbuch der descriptiven Geometrie. Nürnberg 1841“ ist die Schattenlehre gar nicht vertreten.

einen Lichtstrahl zur Achse hat. In diesem verdienstvollen und geschätzten Werke finden wir bereits die Bestimmung der Intensitätslinien bei schiefen Cylinder- und Kegelflächen, ferner beim dreiachsigen Ellipsoid und hyperbolischen Paraboloid, bei einer gewundenen Säule, sowie bei einer schraubenförmigen Röhrenfläche durchgeführt. Herr Professor Tilscher, der seine Lehre der Beleuchtungsconstructionen auf die Construction von Berührungsebenen stützte, welche mit einer Geraden bestimmte Winkel bilden, sprach sich bei Bestimmung der Intensitätslinien mit Absicht gegen die Verwendung der von Egle eingeführten Normalkugel aus, mit der Begründung, dass die Benützung der auf der Kugelfläche — wenn auch leicht erkennbaren Intensitätslinien weder ein einfaches, noch ein allgemein anwendbares und für den Unterricht geeignetes Mittel sei.

Doch schon im Jahre 1871 erschien in Stuttgart ein Werk unter dem Titel „Schattierungskunde", welches C. Riess, Professor an der k. Baugewerkschule zu Stuttgart zum Verfasser hatte und welches die vom Prof. Egle gegebene Idee der Verwendung der sogenannten Normalkugel zur Bestimmung der Intensitätslinien für regelmäßige Körper, aber auch für schwierigere krumme Flächen — wie die schraubenförmige Wulstfläche und das hyperbolische Paraboloid als Regelfläche mit Erfolg zur Anwendung brachte. Doch legte Prof. Riess in seinem Werke den Hauptwert nicht auf die Constructionen, sondern auf die Bestimmung der Zahlwerte der einzelnen Lichtstufen beleuchteter Flächen. Während das noch in demselben Jahre erschienene Werk „Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen. Leipzig 1871" (II. Ausg. 1875) von Dr. L. Burmester, damals Privatdocent, später Professor an der tech. Hochschule in Dresden, jetzt in München, die Lichtstufen- oder Intensitätslinien für wahre Beleuchtung (Isophoten) und jene für scheinbare Beleuchtung (Isophengen) auf rechnerischem Wege mit Hilfe der höheren Analysis abgeleitet und die praktischen Constructionen der Resultate mit Hilfe der neueren Geometrie durchgeführt hatte, stützt das letzte, uns derzeit vorliegende, elegant ausgestattete Werk „Lehrbuch der Schattenconstruction und Beleuchtungskunde, Stuttgart 1895" von Herrn Adolf Göller, Professor an der k. technischen Hochschule zu Stuttgart — der von Egle angeregten und von C. Riess weiter ausgebildeten Richtung treu bleibend — die ganze Beleuchtungstheorie wieder auf die Lehre von der Normalkugel, deren Verwendung bei constanter Lichtstrahlenrichtung allgemein durchgeführt wird. Der Verfasser gibt nach einer sorgfältigen Bestimmung der Selbstschatten- und Schlagschattengrenzen aller möglichen Flächen auf S. 86—93 die Theorie der Normalkugel und führt auf S. 93—136 die Bestimmung der Lichtstufenlinien für Kegel-, Cylinder- und Umdrehungsflächen, ferner für die Flächen der zweiten Ordnung, nämlich das dreiachsige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid, eintheilige elliptische Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid, sowie für die abwickelbaren Schraubenflächen und für Wendelflächen, Röhren-, Rückungsflächen, schraubenförmige Röhren- und Wulstflächen, gewundene Säulen, conoidische Flächen — kurz für allgemeine Flächen — ohne nennenswerte Schwierigkeiten — consequent durch. —

Die geometrische Kinematik, nach Terquem „Géométrie cinématique" (S. Annales de Mathématique 1859), deren Grundgedanken und Fundamentaltheoreme wir schon Roberval (1668), Huygens (Horologium oscillatorium. Paris 1673), Newton (Phylosophia naturalis principia math. Londoni 1686), Cassini (Histoire de l'Académie. Paris 1703), de la Hire (Mémoire de l'Académie. Paris 1706) und Euler (Theoria motus corporum. Novi Comment. Petrop. 1765) verdanken, fand besonders in Frankreich ihre weitere Ausbildung. Monge war der erste Geometer, der die Erlangung einer Übersicht über die dynamischen Grundlagen der verschiedenartigen Maschinen angeregt hatte, welche Anregung auch von seinem Nachfolger im Lehramte Hachette (S. s. Traité élementaire des machines. Paris 1818) weiter ausgebildet wurde. Carnot (S. d. Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement. Paris 1803) und seine Nachfolger gründeten die Lehre von den geometrischen Bewegungen, welche durch geometrische Bedingungen bestimmt sind, auf die reine Anschauung und schufen so die geometrische Bewegungslehre, der Terquem im Jahre 1859 den Namen „Géométrie cinématique" gab.

Seit der Mitte dieses Jahrhundertes erhielt die Kinematik durch Transon [1]), Chasles [2]), Olivier [3]), Bresse [4]), Gilbert [5]), Terquem [6]), Somoff [7]), Bour [8]), Resal [9]), Rittershaus [10]), Schell [11]),

[1]) Journal de Math. Tom. X. 1845.

[2]) Bulletin de la Société Math. de France. Tom. VI. etc. Comptes rendus. Jour. de Math. 1842, 43, 45.

[3]) Application de Géométrie descript. Paris 1847.

[4]) Journal de l'École polyt. Paris 1853. Cah. 35.

[5]) Mémoires de l'Académie de Belgique. Bruxelles 1857—77.

[6]) Annales de Mathématiques. 1859.

[7]) Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg 1865 und Theoretische Mechanik (russisch 1871, deutsch 1878).

[8]) Cours de Mécanique et de machines. Paris 1865.

[9]) Traité de Cinématique pure Paris 1862.

[10]) Kinematisch-geometrische Theorie der Beschleunigung. (Civilingenieur Bd. 21.—26. Jahrg. 1875—80.)

[11]) Theorie der Bewegung der Kräfte. Leipzig 1879.

Rodenberg [1]), Burmester [2]), Bobillier [3]) und insbesondere durch A. Mannheim [4]) eine in das Gebiet der descriptiven Geometrie tief eingreifende Entwickelung. Seit dem Jahre 1867 bildet auch die Géométrie cinématique, zum erstenmale von Mannheim für den Unterricht didaktisch dargestellt, einen wesentlichen Bestandtheil der Vorlesungen über Géométrie descriptive an der École polytechnique in Paris.

Die Reliefperspective, welche — auf wissenschaftlicher Grundlage ruhend — die räumliche Abbildung der Raumgebilde zum Zwecke hat, reicht in ihren frühesten Leistungen in das fünfzehnte und sechzehnte Jahrhundert zurück. Italienischen und deutschen Künstlern verdanken wir die ersten Basreliefs. Lorenzo Ghiberti führte 1424—47 in Florenz kirchliche Broncereliefs aus, während Alexander Colin aus Mecheln im Jahre 1563 und den folgenden Jahren am Grabdenkmale Kaiser Maximilian I. in der Hofkirche zu Innsbruck prachtvolle Marmorreliefs ausgeführt hatte. Die Grundidee der Reliefperspective, den Raum räumlich abzubilden, verdanken wir Guido Ubaldi (S. d. Perspectiva. Pisauri 1600. S. 283). Bald darauf sprach A. Bosse in seinem Traité des pratiques géométrales et perspective (Paris 1665) die von seinem Lehrer Desargues erfundene Anschauung bezüglich der geringen Tiefe der Basreliefs dahin aus, dass diese nach dem perspectivischen Maßstabe behandelt werden müsse. Eine wissenschaftliche Behandlung der Reliefperspective führte aber erst der Magdeburger Theatermaler Breysig in seinem Werke: „Versuch einer Erläuterung der Reliefperspective“ im Jahre 1798 durch. Poncelet untersuchte in seiner Abhandlung „Théorie des figures homologiques, ou perspective-reliefs“ (Traité des propriétés projectives des figures Paris 1822, s. f. a. die Ausgabe von 1865 Bd. I. S. 357) die projectivische Verwandtschaft der Raumgebilde und ihrer Reliefabbildungen, während C. Anger in seiner „Analytische Darstellung der Basreliefs, Danzig 1834“ und späteren Abhandlungen die diesbezüglichen Formeln auf Flächen zweiter Ordnung anwendete. Diesen Untersuchungen folgten jene von Chasles

---

[1]) Zeitschrift für Math. und Physik etc.

[2]) Lehrbuch der Kinematik. Leipzig 1888.

[3]) Cours de Géométrie descript. Paris 1870.

[4]) Géométrie descriptive comprennant les éléments de la Géométrie cinématique. Paris 1880. — S. a. Comptes rendus 1867, 74, 79 etc. — Nouvelles Annales de Mathématiques 1857—95. — Journal de l'École polyt. 1858 etc. — Annali di Matematica. 1858, 59 etc.

S. insb.: M. d'Ocagne, Rapport sur l'ouvrage de Mr. Mannheim: „Princips et développements de Géométrie cinématique“. Mathesis, (Recueil mathématique. Paris 1894. Sér. II., tom. IV. Supplément).

(Comptes rendus 1853), Guido Schreiber (Malerische Perspective. Karlsruhe 1854), Poudra (Traité de perspective-relief. Paris 1862), von Staudt (Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1866), Reye (Geometrie der Lage. Hannover 1866), Morstadt (Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 12, Jahrg. 1867). Eine weitere wissenschaftliche Ausbildung erfuhr die Reliefperspective in den Werken von R. Staudigl (Grundzüge der Reliefperspective. Wien 1868), Dr. W. Fiedler (Die darstellende Geometrie. Leipzig 1871. S. 144—153), A. Schlesinger (Darst. Geom. Wien 1870), H. Hertzer, (Die Central-Raumprojection, Relief-Projection. Berlin 1875), Dr. G. A. V. Peschka (Darst. und proj. Geometrie. Wien 1883. I. Bd. S. 46), Dr. L. Burmester (Grundzüge der Reliefperspective. Leipzig 1883), Dr. Chr. Wiener (Lehrbuch der darst. Geometrie. Leipzig 1887. II. Bd. S. 645) etc. etc.

Ebenso fand auch die jüngste der mit der descriptiven Geometrie verwandte Wissenschaft, die im Jahre 1835 von Beautemps-Beaupré angeregte und 1851 von Laussedat[1]) begründete Photogrammetrie (Photometrographie oder Phototopographie) in den letzten Jahrzehnten eine stattliche Reihe geschätzter Fachschriftsteller, von welchen wir nur M. Meydenbauer[2]), A. Jouart[3]), M. Javary[4]), Jordan[5]), L. Mickiewicz[6]), Dörgens[7]), G. Le Bon[8]), C. Koppe[9]), P. Moessard[10]), L. P. Paganini[11]), C. Fabre[12]), V. Legros[13]),

---

[1]) „Mémoire sur l'emploi de la photographie dans le lévé des plans et spécialement dans les reconnaissances militaires". (Comptes rendus. Tom. 50 et 111. Paris 1860 u. 90. „Mémoire sur l'application de la photographie à lever des plans" (Mémorial de l'officier du génio. Nro. XVII., année 1864). S. a. A. Girard, Photogr. Archiv 1865.

[2]) Photographische Mittheilungen Berlin 1865. Zeitschrift für Bauwesen. Berlin 1867 und Photogr. Wochenblatt 1858.

[3]) „Application de la photographie aux levés militaires. Paris 1866."

[4]) Mémorial de l'officier du génie. Paris 1874.

[5]) „Verwerthung der Photographie zu geometrischen Aufnahmen". Zeitschrift für Vermessungskunde. Berlin 1876.

[6]) „Anwendung der Photographie zu militärischen Zwecken." Mittheilungen des k. k. Artillerie- und Genie-Comités. Wien 1876.

[7]) Photographische Mittheilungen. 1885 und 86.

[8]) „Les levers photographiques" etc. Paris 1889.

[9]) Die Photogrammetrie oder Bildmesskunst. Weimar 1889.

[10]) „Le cylindrograph". Paris 1889

[11]) La fotografia in Italia". Rivista marittima. 1889.

[12]) Traité encyclopédique de photographie". Paris 1890.

[13]) „Sommaire de Photogrammétrie". Paris 1891.

F. Schiffner[1]), F. Wang[2]), V. Pollack[3]) und Guido Hauck[4]) nennen wollen. Insbesondere war es der letztgenannte Schriftsteller, Herr Guido Hauck, o. ö. Professor an der königl. tech. Hochschule in Berlin, der in seiner bisher veröffentlichten Theorie der trilinearen Verwandtschaft unter Hinweis auf die analytisch-synthetischen Entwickelungen von Rosanes[5]), Schubert[6]) und Benno Klein[7]) weit ausgedehnte descriptive Untersuchungen über die dreibündig-eindeutige Verwandtschaft ebener Gebilde und ihre Beziehungen zur quadratischen und projectivisch-trilinearen Verwandtschaft anstellte, welche als neue Constructionen der Perspective und Photogrammetrie mit vollem Rechte als eine Weiterbildung der Géométrie descriptive im Geiste Monges betrachtet werden müssen.

Mit dem Ausbau der darstellenden Geometrie als selbständige Wissenschaft wurden auch jene Grenzen überschritten, welche ihr Monge vor hundert Jahren als Hilfswissenschaft der Ingenieur-Wissenschaften angewiesen hatte. Fast siebzig Jahre nach der Begründung der darstellenden Geometrie als Wissenschaft durch Monge hat sie in der Form eine unbedingte Nachahmung im Geiste ihres Begründers erfahren. Wenn auch Monge diese Bewunderung vollauf verdient hat, so muss diese Nachahmung seiner Lehrmethode in der darstellenden Geometrie, die vor hundert Jahren bei einer Hilfswissenschaft der Ingenieur-Wissenschaften an der École polytechnique wohl kaum anders gedacht werden kann, als eine der bescheidensten Huldigungen angesehen werden, die dem großen Reformator der französischen Unterrichts-Politik dargebracht wurde.

Schon Poncelet und Jakob Steiner waren in ihren Forschungen bahnbrechende Reformatoren in den Methoden der synthetischen Geometrie und vom wissenschaftlichen Standpunkte aus muss es als eine der schönsten Errungenschaften der Neuzeit betrachtet werden,

---

1) Die photographische Messkunst oder Photogrammetrie. Halle 1892.

2) Die Photogrammetrie oder Bildmesskunst im Dienste des Forsttechnikers. Wien 1893.

3) „Über photographische Messkunst". Mittheilungen der k. k. geogr. Gesellschaft. Wien 1891. (S. a. die Monatsblätter des wiss. Clubs. Wien 1891 und die Schweizerische Bauzeitung. 1892. — „Photographische Arbeiten in Österreich." (Dr. Eders Jahrbuch für Photographie. Jahrg. 1891).

4) S.: Crelle-Fuchs Journal f. d. reine und angew. Math. Bde. 95, 97, 98 und 108. Berlin 1883—5 und 1891. (S. a. d. Festschrift der k. tech. Hochschule in Berlin 1884).

5) Crelles Journal. Bd. 88

6) Mathematische Annalen. Bd. 17.

7) „Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde. Marburg 1881.

dass auch die berühmten Forschungen der zweiten Hälfte dieses Jahrhundertes auf dem interessanten Gebiete der Theorie von beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeiten von Riemann[1]), Grassmann[2]), Plücker[3]), Klein[4]), Clebsch[5]), Jordan[6]), d'Ovidio[7]), Clifford[8]), Newcomb[9]), Craig[10]), Cayley[11]), Stringham[12]), Halphen[13]), Darboux[14]), Kronecker[15]), Weierstrass[16]), Lipschitz[17]), Lie[18]), Schur[19]), Biermann[20]), Beltrami[21]), Bianchi[22]), Cremona[23]) und insbesondere Veronese[24]) auf den weiteren Ausbau der darstellenden Geometrie als Wissenschaft nicht ohne Einfluss blieben.

Riemanns berühmte Abhandlung „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ war der geistige Ausgangspunkt einer stattlichen Reihe geistreicher Forschungen auf dem Gebiete der n-dimensionalen Geometrie, die sich aber zumeist nach der analytischen Methode mit der Krümmungstheorie der Räume beschäftigten. Im Jahre 1882 erschien im 19. Bande der Mathematischen Annalen (S. 161—234) eine schon 1881 verfasste größere Abhandlung „Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicierens und Schneidens“ von Giuseppe Veronese, jetzt Professor der höheren Geometrie an der Universität zu Padua, der sich an der Universität zu Leipzig unter Prof. Klein eingehenden Studien über die Theorie beliebig ausgedehnter Mannigfaltigkeiten gewidmet hatte. Diese interessante Abhandlung von Veronese muss als

[1]) „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.“ 1854 (Göttinger Abhandlungen. 13. Bd. Jahrg. 1867. S. a. Riemanns Werke. Leipzig 1876. S. 254). — [2]) Die Ausdehnungslehre. Leipzig 1844. S. 13. — [3]) Theorie der algebraischen Curven. Bonn 1839. etc. — [4]) Math. Annalen Bd. V u. XVII, Leipzig 1872 u. 1880. — [5]) Math. Annalen Bd. I. Leipzig 1869. — [6]) Essai sur la géométrie à n dimensions.“ Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1875. — [7]) R. Accademia dei Lincei 1877 u. Math. Ann. Bd. XII. — [8]) Philosophical Transactions 1878. Mathematical Papers S. 305. — [9]) Journal für Math. Bd. 83 — [10]) American Journal. Vol. IV. 1881 — [11]) „On the superlines of a Quadric surface in five-dimensional space.“ Quarterly Journal. Vol. XII. 1873. — [12]) American Journal. Vol. III. 1880. — [13]) Bulletin Soc. math. Vol. II. 1875. — [14]) „Mémoires de Bordeaux. 1873. — [15]) Berichte der Berliner Akademie 1869. — [16]) Ibid. Berlin 1858. u. 1868. — [17]) Journal für Math. Bd. 70. u. 72. — [18]) Göttinger Nachrichten 1871. — [19]) Math. Annal. Bd. 27. Leipzig 1886. — [20]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. 90. Jahrg. 1884. (Über die regelmäßigen Körper höherer Dimensionen). S. 144. — [21]) Bulletin des sciences math. 1876. — [22]) Math. Annalen Bd. XVII Leipzig 1880. — [23]) Teoria geom. delle curve piane. Bologna 1862. etc. — [24]) Math. Annalen. Bd. 19. S. 161. Leipzig 1882. Atti della R. Accademia dei Lincei 1871 e. R. Istituto Veneto 1882.

die erste Erweiterung der darstellenden Geometrie auf den n-dimensionalen Raum betrachtet werden. Der geistige Wert dieser schönen Abhandlung des geschätzten Verfassers, der fast ausschließlich die synthetische Methode benützt, besteht darin, dass er die Eigenschaften und gewisse Singularitäten von Configurationen oder Gebilden zuerst im n-dimensionalen Raume einer eingehenden Untersuchung unterzieht und aus diesen mittelst eindeutigen Projicierens oder Schneidens die projectiven Eigenschaften und Singularitäten von verwandten Configurationen in den niederen Räumen und speciell auch in dem gewöhnlichen oder dreidimensionalen Raume ableitet. Es werden hier Punkte, Gerade, Ebenen, ebenflächige Gebilde, Configurationen aus einer endlichen Anzahl von linearen Räumen, Grundgebilde, ihre Classification und projectivische Zuordnung, ferner in einander liegende collineare Räume, n-dimensionale Flächen des zweiten Grades, die Charaktere der rationalen Curven mittelst der erweiterten Formeln von Plücker und Cayley, sowie die Erzeugnisse der collinearen Grundgebilde, ihre Doppelerzeugung und schließlich die zwei- und dreidimensionalen Flächen der 3., 6. und 4. Ordnung im vierdimensionalen Raume einer scharfsinnigen geometrischen Betrachtung unterzogen, und ihre projectiven Eigenschaften mittelst des in der Einleitung synthetisch entwickelten Princips des Projicierens und Schneidens abgeleitet.

In dieser Abhandlung lässt der berühmte Verfasser, Riemann folgend, einen Raum von n Dimensionen entstehen, indem er von demselben einen solchen, der eine Dimension weniger hat, von einem außerhalb gelegenen Punkte projiciert und, indem er sich dieser Erzeugungsweise bedient, gelangt er zur Erweiterung des größeren Theiles der Theorien der gewöhnlichen Geometrie der Lage. Veronese machte hier auch von der von Klein [1]) verallgemeinerten stereographischen Projection Gebrauch. Die in dieser bahnbrechenden Abhandlung zugrundegelegten Principien benützte der um den wissenschaftlichen Ausbau der darstellenden Geometrie so hochverdiente Professor am eidg. Polytechnikum in Zürich, Herr Dr. Wilhelm Fiedler, und dehnte noch in demselben Jahre (1882) seine Vorlesungen über darstellende Geometrie auf den vierdimensionalen Raum aus. [2]) Noch im April desselben Jahres veröffentlichte auch Herr Prof. Veronese in den Sitzungsberichten des R. Istituto Veneto vom Jahre 1882 seine Abhandlung „Geometria descrittiva a quatro dimensioni,“ in welcher die darstellende Geometrie

---

[1]) S. Mathematische Annalen Bd. V. S. 263. Leipzig 1872.

[2]) Vergl.: Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 1882.

auf den Raum von vier Dimensionen ausgedehnt ist — ein Gedanke — den schon Sylvester im Jahre 1869 in seiner Rede vor der British Association angedeutet hat.

J. G. Veronese ist auch der Verfasser des bekannten großen Werkes „Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare." (Padova, Tipographia del seminario 1891), dessen deutsche Bearbeitung „Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt" Premierlieutenant Adolf Schepp in Leipzig 1894 herausgab. Das Originalwerk wurde im Jahre 1889 der R. Accademia dei Lincei vorgelegt.

Diese und die folgenden Ausführungen (S. a. Abschnitt VI.) werden genügen, um uns in gedrängter Übersicht ein sprechendes Bild von dem mächtigen Ausbau zu geben, den die darstellende Geometrie als Wissenschaft seit ihrer Begründung durch Monge bis zur Gegenwart erfahren hat. An diesem, in die exacten Wissenschaften tief eingreifenden, geistigen Bestrebungen nahmen fast alle Culturstaaten, aber insbesondere Frankreich, Deutschland und Österreich einen regen Antheil. Konnte noch im Jahre 1830 mit einer gewissen Berechtigung der bekannte, französische Philosoph Auguste Compte in seinem großen Werke „Cours de Philosophie positive" Monges Schöpfung als eine neue, auf dem Gebiete der Geometrie epochemachende Schöpfung bezeichnen, indem er sagte: „La Géométrie descriptive est une science nouvelle: elle ne date que de Monge", so besitzen wir heute in der descriptiven Geometrie eine Achtung gebietende Wissenschaft, die nicht bloß den technischen Wissenschaften als eine unerschütterliche Grundlage dient, sondern in allen ihren Zweigen auf philosophischen Forschungen ruht, welche den rein mathematischen Forschungen dieses Jahrhundertes ebenbürtig an die Seite gestellt werden müssen. Diesen ganz eigenthümlichen, psychologischen Charakter der darstellenden Geometrie, der ihr auch die Pforten der technischen Hochschulen aller Culturstaaten und bereits auch mehrerer ausländischer Universitäten geöffnet hat, haben schon frühzeitig hervorragende Männer des Geistes und culturellen Fortschrittes zu würdigen verstanden. So äußerte sich der bereits genannte, französische Philosoph Auguste Comte, der es als ein geistiges Bedürfnis empfand, sich an der École polytechnique in die Theorie der epochemachenden Géométrie descriptive einweihen zu lassen, in seinem „Cours de Philosophie positive" über diese Wissenschaft: „Cette importante création mérite singulièrement de fixer l'attention de tous les philosophes qui considèrent l'ensemble des opérations de l'espèce humaine, comme étant un premier pas, et jusqu' ici le seul réelment complet, vers cette renovation générale des travaux humains qui doit imprimer à tous nos arts un caractère de précision et de rationalité si nécessaire à leurs progrès futures." [1] — — —

Kehren wir nach diesem historischen Rückblick auf die Entwickelung der descriptiven Geometrie von ihrer Begründung als Wissenschaft bis zur Gegenwart noch einmal zu ihrer ersten Pflegestätte der „École polytechnique" auf kurze Zeit zurück, um die spätere, sociale Stellung der ersten polytechnischen Schule der Welt in dem interessanten Staatsleben Frankreichs noch näher kennen zu lernen.

Die politischen Leidenschaften, welche am Ende des achtzehnten Jahrhundertes Frankreich nicht zur Ruhe kommen ließen, drangen auch mehr als einmal in die Hörsäle der polytechnischen Schule und störten ihre wissenschaftliche Thätigkeit. Schon im ersten Jahre ihres Bestandes hatten die Zöglinge mit Nahrungssorgen zu kämpfen, da die Assignaten und späteren Mandaten keinen Wert mehr hatten, infolge dessen ein Drittel der Zöglinge aus Mangel an Subsistenzmitteln aus der Anstalt scheiden musste, trotzdem die Lehrer die große Anstalt durch zehn Tage hindurch auf eigene Kosten unterhielten. Im vierten Jahre der Republik (September 1795) hatte sich eine Zahl hochbegabter Zöglinge der École polytechnique den Pariser Sectionen angeschlossen, um den Kampf mit den Streitkräften der Regierung aufzunehmen. Der erzürnte Convent befahl den Ausschluss dieser Zöglinge. Monge nahm sie in Schutz und erklärte vor dem versammelten Unterrichtsrathe, dass er sofort sein Lehramt niederlege, wenn er seine begabtesten Schüler verlieren sollte. Seinem ebenso wohlwollenden als energischen Auftreten verdankten die später so berühmt gewordenen Gelehrten, wie Malus, Biot u. a. ihre wissenschaftliche Laufbahn.

Mit der ganzen Herzensgüte eines edlen Stifters wachte Monge über die polytechnische Schule, sowie über das Wohl ihrer Zöglinge und fühlte sich tief verletzt, als sein Freund Bonaparte nach der Thronbesteigung aus eigener Machtvollkommenheit die Freiheit der Schule einzuschränken begann und ihr ein Privilegium nach dem anderen entzog, trotzdem er die École polytechnique seine Henne nannte, die ihm Goldeier — nämlich seine schneidigsten Gardeofficiere — lege. Die Zöglinge der polytechnischen Schule hatten mit ausnehmender Kälte und einigemale selbst mit deutlich und öffentlich kundgegebenen Zeichen der Missbilligung die Schritte aufgenommen, welche Bonaparte nach und nach zur Errichtung der kaiserlichen Herrschaft unternommen hatte. Als Napoleon am 2. December 1804 den Kaiserthron

[1] S. a.: Jules Rig, „La Philosophie positive par Auguste Comte. Paris 1880.

bestieg, weigerten sich die meisten Zöglinge, ihre Glückwünsche mit den von fast allen Körperschaften im Staate dargebrachten zu vereinen, und von diesem Augenblicke befand sich die École polytechnique in großer Ungnade. Napoleon plante eine abermalige Verschärfung des Statutes, und eine größere Zahl der eifrigsten Zöglinge sollte wieder relegiert werden. Monge zögerte nicht, als Vertheidiger derjenigen aufzutreten, die er mit herzlichster Güte seine Söhne nannte. Als Monge wie ein liebender Vater vor Napoleon erschien, um seine Zöglinge mit bewundernswertem Freimuthe vor dem Zorn des beleidigten Kaisers zu schützen, empfieng ihn dieser mit den Worten: „Eh bien, Monge, vos élèves sont presque tous en révolte contre moi; ils se déclarent décidément mes ennemis!“ — *(„Nun Monge, Ihre Schüler sind im offenen Aufruhr gegen mich; sie erklären sich entschieden als meine Feinde!“)* „Sire, nous avons eu bien de la peine à en faire des republicains; laissez-leur le temps de devenir impéralistes. D'ailleurs, permettez-moi, de vous le dire, vouz avez tourné un peu court!“ *(„Sire, entgegnete Monge, es hat uns Mühe gekostet, sie zu Republikanern zu machen, lassen Sie ihnen Zeit, Anhänger des Kaiserthums zu werden. Und — wenn Sie mir noch ein Wort erlauben wollen — Sie selbst haben eine etwas rasche Wendung gemacht!“)*

Auf Monges Antwort drehte sich Kaiser Napoleon auch diesmal mit einer raschen Wendung um — aber kein Zögling wurde ausgeschlossen.

Doch schon im folgenden Jahre (1805) hob Kaiser Napoleon, mit Ausnahme von fünfzig Freiplätzen, die den Zöglingen bisher bewilligte volksthümliche Remuneration auf und bestimmte, dass jeder Zögling eine Pension von achthundert Francs zu bezahlen habe, welche später — unter der Restauration — auf tausend Francs erhöht wurde. Mit einem Schlage wurde die École polytechnique, diese Wiege der französischen Gelehrten, welche bis zu diesem Zeitpunkte eine moderne Schule des Pythagoras und Platon war, in eine Kaserne für prätorianische Söldner umgewandelt. Die Zöglinge wurden im Compagnien eingetheilt und formierten ein Bataillon. Sie wurden nicht mehr durch wissenschaftlich gebildete Genie- oder Artillerieofficiere commandiert, sondern durch Infantericofficiere, welche mit den exacten Wissenschaften wenig oder gar nicht vertraut waren.

Monge war — trotz aller Verehrung, die er Napoleon entgegenbrachte — auf das tiefste erschüttert und erschien fünfmal vor dem Kaiser, um diesen für die polytechnische Schule niederschmetternden Schlag abzuwenden. Doch blieben alle seine Bemühungen bei dem der École polytechnique wenig geneigten, wenn auch Monge hochschätzenden Kaiser ohne Erfolg:

„Il faut m'enrégimenter l'instruction publique!" war Napoleons kurze und entscheidende Antwort. [1])

[1]) *Anmerkung:* Auch unter Napoleon III. hatte sich die École polytechnique in Paris noch eines ziemlich strengen Kasernensystemes zu erfreuen. Die Anstalt, welche die Ausbildung für die Artillerie, das Geniewesen, die Marine und andererseits für den Strassen- und Brückenbau, Bergbau, Staatsmanufacturen und das Telegraphenwesen zum Zwecke hat, untersteht noch jetzt dem Ressort des Kriegsministers. Als Leiter (Commandant) derselben fungiert ein Brigadegeneral. Die Professoren gehören theils dem Militär-, theils dem Civilstande an und sind Capacitäten ersten Ranges, zumeist Mitglieder der Akademie der Wissenschaften. Die spätere Organisation der École polytechnique wurde durch das ministerielle Reglement vom 5. März 1857 und durch das Decret vom 30. September 1863 geregelt. Bis zum Jahre 1867 war an der polytechnischen Schule in Paris keine Lehrfreiheit. Die Anstalt bestand aus zwei Jahrgängen zu je 120 Studierenden. Die Aufnahme in den ersten Jahrgang erfolgt auf Grund einer sehr strengen, von fünf Examinatoren durchgeführten Prüfung, welche im August und September eines jeden Jahres in Paris und mehreren großen Städten vorgenommen wird. In Paris selbst hat man zwei Grade von Prüfungen, zuerst einen leichteren, und für jene, welche diesen bestehen, einen zweiten strengeren Grad, so dass mitunter kaum der zehnte Theil der angemeldeten Zöglinge in die École polytechnique Aufnahme findet. Der Lehrplan der École polytechnique wurde bis zum Jahre 1867 als Dienstgeheimnis strenge gewahrt. Seit diesem Jahre besteht an der École polytechnique die Lehrfreiheit. Nach Absolvierung des zweiten Jahrganges treten die Zöglinge dann gewöhnlich in eine der technischen Civil- oder Militärschulen (École des ponts et chaussées, École des mines, École centrale des arts et manufactures etc.) und finden später bei Besetzung der höchsten Stellen im technischen Staatsdienste eine besondere Berücksichtigung, da solche Stellen in Frankreich fast ausschließlich nur mit absolvierten Zöglingen der École polytechnique und der technischen Specialschulen besetzt werden. Die Géométrie descriptive, welche zuerst von Monge, dann von Hachette (1797—1816), C. F. A. Leroy (1814—49), J. de la Gournerie (1849—64) und seit 1864 von Professor A. Mannheim, derzeit Oberst in der französischen Artillerie vorgetragen wird, umfasste nach dem Lehrplane vom Jahre 1861 im ersten Jahrgange 32 Vorträge, während der Stereotomie im zweiten Jahrgange 30 Vorträge zu je einer und einer halben Stunde zugetheilt sind. Ein noch größerer Zeitraum ist den Wiederholungen und Constructionsübungen gewidmet, welche unter der Leitung von Répétiteurs abgehalten werden. Diese sind auch verpflichtet, die schwierigeren Partien in den Vorträgen des Professors mit den Zöglingen zu wiederholen und die vom Professor nur angedeuteten zeitraubenden praktischen Anwendungen weiter auszuführen. Das bis zum Jahre 1868 geheimgehaltene Unterrichts-Reglement schrieb dem Professor den Lehrstoff für jeden einzelnen Vortrag strikte vor. (S. d. n. C. Kořistka, Der höhere polytechnische Unterricht. Gotha 1863. S. 89. — Vergl. M. Chasles, Rapport sur les progrès de la Géométrie. Paris 1870, pag. 379—381. — S. a.: Mortimer d'Ocagne, Les grandes Écoles de France. Pag. 104. Paris 1887).

Seit dem Jahre 1867 erfreut sich die École polytechnique der Lehrfreiheit. In diesem Jahre gestattete der „Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique" über Antrag ihres hochgebildeten und liberalen Commandanten, General Favé, den

Erst im Jahre 1814 trat der militärische Drill an der Anstalt in den Hintergrund und die wissenschaftliche Ausbildung in den Vordergrund. Als Monge sah, dass seine Bemühungen bei Napoleon wirkungslos blieben, so widmete er — nachdem er mit Lagrange und Berthollet zum Senator ernannt worden war — die sechstausend Francs, welche ihm seine Professur eintrug, dazu, um begabten Jünglingen den Besuch der polytechnischen Schule zu ermöglichen.

Monge hielt an der École polytechnique zahllose Vorträge über Analysis, Geometrie und Physik. Seine Vorträge zeichneten sich durch Klarheit, Einfachheit und Schönheit ihrer Entwickelungen aus, welche wir um so höher schätzen müssen, als sie stets wissenschaftlich gehalten wurden. Insbesondere war Monges descriptive Geometrie so einfach und schön, dass sich Lagrange, der wiederholt seinen geschätzten Collegen in den Vorlesungen besuchte, beim Herausgehen aus einer Vorlesung des berühmten Geometers mit gewohnter Feinheit über diese neue Wissenschaft mit folgenden Worten äußerte: „Avant d'avoir entendu Monge, je ne savais pas que je savais la géométrie descriptive.“ Monge hielt auch an der polytechnischen Schule nichtobligate Vorlesungen über die Theorie der Krümmungslinien und ihrer Anwendung auf das Ellipsoid, welche bei seinen ersten Zöglingen den Eifer für die mathematischen Wissenschaften heben sollten. Es war damals Sitte, dass sich die Professoren der École polytechnique durch gegenseitige Besuche in den Vorträgen Beweise ihrer Achtung gaben. Als Lagrange aus Monges Vorlesung kam, beglückwünschte er ihn zur Krümmungstheorie mit den Worten: „Vous venez, mon cher confrère, d'exposer des choses très-élégantes: je voudrais les avoir faites!“ Dieser Lobspruch des grössten Mathematikers des achtzehnten Jahrhundertes, welcher sich schon früher über Monges in den Turiner Mémoiren veröffentlichten Forschungen mit folgenden, — vielleicht einen leisen Zug von Eifersucht enthaltenden Worten geäußert hatte: „Avec son application de l'analyse à la représentation des surfaces ce diable d'homme sera immortel!“ war Monge sehr zu Herzen gegangen.

Als die im Jahre 1793 aufgehobene Akademie der Wissenschaften im folgenden Jahre als Institut de France wiederhergestellt wurde, gehörte Monge zum ersten Kerne dieser großen Vereinigung französischer Gelehrten. Im Jahre 1799 wurde Monge in Anerkennung seiner großen Verdienste in die Zahl der ersten Senatoren aufgenommen.

Professoren den Inhalt ihrer Vorträge selbst festzustellen. Auf Grund dieser Bewilligung nahm Herr Oberst A. Mannheim — der Nachfolger von J. de la Gournerie — im Studienjahre 1878—79 die Géométrie cinématique in ausgedehntem Umfange in den Lehrplan der descriptiven Geometrie auf.

Napoleon, der Monge durch viele Beweise von Hochachtung wiederholt ausgezeichnet hatte, ernannte ihn im Jahre 1804 zum Grafen von Pelusium und verlieh ihm den Großcordon der Ehrenlegion.

Monge nahm seine Entlassung als Professor der angewandten Analysis im Laufe des Jahres 1809. Tiefe Wehmuth und ein aufrichtiger Schmerz um den Verlust des verehrten Lehrers bemächtigten sich seiner Zuhörer, als Monge seine letzte Vorlesung mit den Worten eröffnete: „Je suis, mes amis, obligé de prendre congé de vous, et de renoncer pour toujours au professorat; mes bras engourdis, mes mains débiles, ne m'obéissent plus avec la promptitude nécessaire."

Die erschlafften Arme und kraftlosen Hände des großen Gelehrten, welcher das 63. Lebensjahr überschritten hatte, waren nicht mehr im Stande, mit der für den Unterricht nothwendigen Raschheit die zur räumlichen Vorstellung erforderlichen Raumgebilde hinzuzaubern und sie sammt den auszuführenden Constructionen mit gewohnter Eleganz graphisch darzustellen.

Schon früher waren für die Bedürfnisse seiner Vorträge die in den akademischen Schriften von Turin und Paris zerstreuten Abhandlungen in eine größere Sammlung vereinigt worden. Der Verfasser fügte noch wesentliche Zusätze über seine Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen hinzu, die sich bekanntlich auf die Betrachtung der charakteristischen Curven gründet. Dieses Hauptwerk Monges von bedeutendem Umfange — 504 Quartseiten enthaltend — trägt den Titel: „Application de l'Analyse à la Géomètrie" und fordert uns noch heute, nach hundert Jahren, durch Einfachheit, Eleganz und Strenge seiner tief in die Wissenschaft eingreifenden Entwickelungen und Anwendungen der Differential- und Integralrechnung zu unbegrenzter Bewunderung heraus. Dieses kostbare Kleinod der von Monge begründeten polytechnischen Schule war sein Hauptwerk, welches in wissenschaftlicher Beziehung hoch über dem weniger umfangreichen Werke „Géométrie descriptive" steht. Schon die Zöglinge der École polytechnique nannten zum Unterschiede von der Géométrie descriptive dieses Werk, durch dessen wertvollen Inhalt Monge zum Begründer der neuen analytischen Geometrie wurde, den großen Monge (Gros-Monge). Dieses Werk, dessen Stil der Darstellung immer auf das innigste mit dem Geiste der angewandten Methoden verbunden ist, und welches ein Jahrhundert lang ein Muster für alle geometrischen Schriftsteller geblieben ist, erlebte bis zum Ende des Jahres 1819 schon vier Auflagen. Die fünfte Ausgabe, welche im Anhange (pag. 505—546) die Krümmungstheorie „Disquisitiones generales circa superficies curvas" von Gauss und (pag. 547—638) Abhandlungen über die geodätischen Linien etc. von Liouville enthält, gab der letztgenannte Gelehrte in Paris im Jahre 1850 heraus.

Mit seinem Rücktritte vom Lehramte hatte aber Monge seine wissenschaftliche Thätigkeit noch nicht abgeschlossen. Den bereits angeführten wissenschaftlichen Abhandlungen folgten in der Correspondance polytechnique: „Sur les équations différentielles des courbes du second degré; tome II, Nr. II, 1810, pag. 51—54. — Du parallélopipède et de la pyramide triangulaire; ibid. Nr. III, 1811, pag. 261—266. — Des surfaces du second degré de révolution, et propriétés generales de ces surfaces; ibid. Nro. IV, 1812, pag. 313—323. — Sur les diamètres principaux des surfaces du second degré, de la grandeur de ces diamètres; ibid. Nro. V, 1813, pag. 415—417." —

„Note de M. Monge sur la solution de M. Georgini, et sur les quadrilatères gauches; ibid. pag. 445. — Du centre de similitude de deux courbes semblabes; tome III, Nro. I, pag. 4—5. — Démonstration d'un théorème de géométrie analytique; ibid Nro. II, pag. 152—153. — Solution graphique des équations du troisième degré; pag. 201—203. — Théorème de géométrie; ibid. Nro. III, 1816, pag. 299—302." —

IV.

Monge als Begründer der Infinitesimal-Geometrie.

Hatte Monge durch die Begründung der descriptiven Geometrie als Wissenschaft und ihre hervorragende Pflege an der von ihm ins Leben gerufenen École polytechnique, sowie durch die von ihm angeregte Errichtung von Realschulen (Écoles secondaires) in allen Städten sich den Ruf des größten Reformators im Unterrichtswesen erworben[1]) und trotz der Wirren und Drangsale der französischen Revolution in seinem Vaterlande eine Unterrichtspolitik geschaffen, welche als bahnbrechende und die Wohlfahrt des Bürgerstandes begründete Institution bald in allen Culturstaaten Europas Eingang fand, so hat er sich durch die Begründung der höheren analytischen Geometrie im Raume als Gelehrter den Ruf der Unsterblichkeit erworben. Es war eben ein Hauptverdienst von Monge, dass er durch seine wissenschaftlichen Publicationen und besonders durch seine geradezu glänzende Lehrthätigkeit an der École polytechnique eine neue Schule der höheren Geometrie [2]) geschaffen hatte, für deren gediegenen literarischen Leistungen bald der Raum in den Mémoiren der Pariser Akademie der Wissenschaften nicht mehr genügte. Es wurden, um eine rasche Publication der Forschungen dieser Schule zu ermöglichen, neue

---

[1]) S.: Armand Freiherr von Dumreicher, Über den französischen Nationalwohlstand als Werk der Erziehung. Wien 1879.

[2]) S.: M. Chasles, Rapport sur les progrès de la géométrie. Paris 1870, pag. 7—80.

Anmerkung: Die Forschungen der Mongeschen Schule in der descriptiven, projectiven und Infinitesimalgeometrie, sowie ihr Einfluss auf die Entwicklung dieser exacten Wissenszweige im 19. Jahrhundert sollen den Gegenstand einer nächsten, diese math.-historische Studie ergänzenden Abhandlung des Verfassers bilden.

S. a.: Über Carnot das biographische Werk „Carnot, par M. N. Riouat, Gand 1817;" Körte, „Das Leben L. N. M. Carnots," Leipzig 1820; „Mémoires sur Carnot par son fils," Paris 1861; Dr. K. Fink, „Lazare-Nicolas-Marguerit Carnot, sein Leben und seine Werke," Tübingen 1894.

S. a.: Oeuvres complètes de Francois Arago, publiés par Barral. Paris 1854—62, deutsch von Dr. W. G. Hankel Leipzig 1854—60. Siehe auch in dem letztgenannten Werke die Biographien u. Gedenkreden über Monge, Carnot, Fresnel, Malus, Fourier, etc. etc.

wissenschaftliche Zeitschriften, wie das Journal de l'École polytechnique (1794) — das erste mathematische Journal des Continentes — die Annalen von Gergonne (1810—1831) und das Liouville-sche Journal (1836) ins Leben gerufen, welche mit dem von Crelle im Jahre 1826 in Berlin gegründeten Journal für die reine und angewandte Mathematik das Gebiet der exacten Wissenschaften bald von ganz Europa beherrschten. Blicken wir auf die stattliche Reihe von Monges berühmten Schülern, von denen wir nur Carnot, Lacroix, Hachette, Lancret, Ampère, Poisson, Dupin, Poncelet, Livet, Brianchon, Binet, Malus, Biot, Gay-Vernon, Gaultier, Français, Petit, Bourdon, Bret, Berthot, Rodrigues, Cauchy, Fourier, Fresnel, Brisson und Chasles nennen wollen, so können wir mit vollem Rechte behaupten, Monge war nicht bloß ein ausgezeichneter Lehrer, sondern er verstand es, in seinen geistreichen und anregenden Vorträgen eine große Zahl von Schülern zu Gelehrten heranzubilden. Monge — im Besitze einer vollen Lehrfreiheit — war eben in der glücklichen Lage, seinen Schülern nicht bloß zeigen zu können, was er auf dem Gebiete der angewandten Analysis geschaffen, sondern er verstand es auch, in glänzender Weise ihnen zu zeigen, wie er es geschaffen hatte und so führte er sie mit Geist und sicherer Hand gleich als Forscher in das weite Gebiet der angewandten, höheren Mathematik ein. Durch die Verwendung der Erzeugungsart der krummen Flächen als Eintheilungsprincip und die weitere Ausbildung der von Euler und d'Alembert[1]) begründeten Theorie der partiellen Differentialgleichungen und ihre Anwendung auf die Geometrie des Raumes schuf Monge zwei mächtige Motoren für die höhere analytische Geometrie, welche in seiner Theorie der Krümmung der Flächen eine hohe, uns noch heute imponierende Entwickelungsstufe erreichte. Monge war es insbesondere gelungen, die bei der Integration partieller Differentialgleichungen auftretenden, willkürlichen Functionen geometrisch zu deuten und mit seinem Scharfblick jenes Dunkel in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu erhellen, welches weder d'Alembert noch Euler durchbrechen konnten. Diese Forschungen von Monge auf dem Gebiete der Differentialgeometrie, welche besonders sein genialer Schüler Dupin in seinen Développements de Géométrie[2]) — einem Adler gleich — bald im kühnen Fluge

---

[1]) Euler, Nova methodus innumerabiles aequat. differentiales secundi gradus. Comm. Acad. Petrop. Tom. III. 1732, tom. VII. 1761 et tom. VIII. 1763.

d'Alembert, Réflexions sur la cause générale des vents. Paris 1746 und Opuscules mathém. Tome I., 1761 et IV. 1767 (S. a.: Traité de Dynamique. Paris 1743).

[2]) Paris 1813, u. Applications de géométrie et de mechanique. Paris 1822.

beherrschte und in den höchsten Sphären durch analytische Untersuchungen im Geiste seines verehrten Meisters erweiterte, bilden mit den Forschungen auf dem Gebiete der höheren, partiellen Differentialgleichungen von Euler, d'Alembert, Condorcet, Laplace, Lagrange und Legendre den ersten unerschütterlichen Grundpfeiler des gewaltig-schönen Baues der Infinitesimalgeometrie, zu welchem bald die hervorragendsten Gelehrten der ersten Hälfte unseres Jahrhundertes, Professor Pfaff, sein berühmter Schüler Gauss, ferner Abel, Jacobi und Mainardi einen zweiten, noch mächtigeren Pfeiler schufen, auf welchen beiden die ganze moderne, höhere Geometrie, Geodäsie, analytische Physik und Dynamik aufgebaut erscheinen.[1]) Eine stattliche

---

[1]) Johann Karl Friedrich Gauss wurde am 30. April 1777 in Braunschweig als der Sohn eines wenig bemittelten Maurers und Wasserkunstmeisters geboren. Nach Absolvierung des Collegiums Carolinum seiner Vaterstadt, studierte er von 1795—98 an der Universität zu Göttingen und hörte dann bei dem berühmten Analytiker J. F. Pfaff in Helmstadt Vorlesungen über Differentialgleichungen. Schon im Jahre 1801 erschienen seine berühmten „Disquisitiones arithmeticae" und 1807 erhielt er die Berufung als Professor der Mathematik an die Universität zu Göttingen und als Director der Sternwarte, wo er bis zu seinem am 23. Februar 1855 erfolgten Tode wirkte. Hier überreichte er am 8. October 1827 der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen seine bahnbrechende Abhandlung „Disquisitiones generales circa superficies curvas," welche im VI. Bande der Commentationes recentiores societatis Gottingensis veröffentlicht wurde und einen großen Einfluss auf die Entwickelung der Infinitesimalgeometrie in den folgenden Decennien ausübte, da sie die Theorien der conformen, sphärischen Abbildung, der superficiellen Coordinaten und der geodätischen Krümmung begründete. Nicht so glücklich war Gauss in den ersten Jahren seiner akademischen Lehrthätigkeit. Dieser große deutsche Gelehrte, der in der Strenge der Beweisführungen sich stets ein Beispiel an den griechischen Mathematikern des Alterthums, insbesondere an seinem ihm stets leuchtenden Vorbilde Archimedes, nahm und die Mathematik neben der classischen Literatur als Königin der Wissenschaften als die Hauptbildnerin des menschlichen Geistes betrachtete, brachte in Göttingen kaum ein halbes Dutzend von Zuhörern zu Stande, während sein ganz unbedeutender Universitäts-College Thibaut die Elemente der Mathematik vor hundert Zuhörern aus allen Facultäten lehrte. (S.: Gauss Werke I.—VI. Bd. Göttingen 1863 - 77. — Vergl.: Dr. Hermann Hankel, Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Tübingen 1869 (II. Aufl 1885). — S. a.: G. Winnecke, „Gauss." Ein Umriss seines Lebens und Wirkens. Braunschweig 1877 u. Sartorius von Waltershausen, Gauss zum Gedächtnis. Leipzig 1877).

C. G. J. Jacobi, der größte Mathematiker, welcher seit Lagrange der Berliner Akademie der Wissenschaften als ständiges Mitglied angehört hatte, wurde am 10. December 1804 in Potsdam geboren und machte sich schon im jugendlichen Alter an das Studium der großen Arbeiten von Euler, Lagrange und Laplace, so dass er sich mit 21 Jahren als Docent an der Berliner Universität habilitieren konnte. Bald darauf wurde Jacobi an die Universität in Königsberg berufen und griff nun mit seinem schöpferischen Geist in fast alle Gebiete einer durch zwei-

Zahl von trefflichen Meistern, wie Chasles, A. Serret, Lamé-Liouville, Bertrand, Bonnet, Dini, Bobillier, Bour, Mac Cullagh, Cayley, S. Smith, Salmon, Tortolini, Catalan,

---

tausendjährige Arbeit zu unermesslichem Umfange angewachsenen Wissenschaft. Insbesondere wurde Abels und Jacobis Begründung der Theorie der elliptischen Functionen, als der wichtigsten Entdeckung der Zeit, ohne Preisausschreibung einer der großen mathematischen Preise der Pariser Akademie der Wissenschaften zuerkannt und zwischen Jacobi und Abels Erben getheilt.

(S.: C. G. J. Jacobi, „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum." Regiomonti 1829). Er war der erste Mathematiker, der in Crelles Journal, Bd. 19, S. 404, Jahrg. 1839 die Differentialgleichung zweiter Ordnung der geodätischen Linie auf dem dreiachsigen Ellipsoide durch Einführung elliptischer Coordinaten zuerst integrierte.

Jacobi, welcher in den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin S. a.: Crelles Journal, Bd. XIX, pag. 309) und in seiner berühmten Inaugural-Dissertation: „Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus, Berolini 1825" eine interessante Substition für drei Variable aufstellte und in seiner „Dynamik (Königsberg 1842–3), Berlin 1866, pag. 198." die elliptischen Coordinaten auf eine beliebige Anzahl von Variabeln erweiterte, machte von diesen in der analytischen Geometrie, der Theorie der Differentialgleichungen und der Dynamik vielfache Anwendungen.

„Die erste Mittheilung über die Erweiterung der elliptischen Coordinaten auf n Variable erstattete Jacobi in der Sitzung der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 18. April 1839, nachdem er kurz vorher — am 28. December 1838 — der Pariser Akademie der Wissenschaften mitgetheilt hatte, dass ihm die vollständige Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung der geodätischen Linie auf dem dreiachsigen Ellipsoid mittelst elliptischer Coordinaten, beziehungsweise Abelscher Integrale gelungen sei." (Siehe: „Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution." Jacobis gesammelte Werke, Bd. II, pag. 57–63).

Jacobi starb am 18. Februar 1851 in Berlin. (S.: Gedächtnisrede auf C. G. J. Jacobi, gehalten von Lejeune Dirichlet in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 1. Juli 1852. — S.: C. G. J. Jacobis „Gesammelte Werke" Bd. I, pag. 3—28. (herausgegeben von C. W. Borchardt, E. Lottner u. K. Weierstrass Berlin 1881–91, Bde. I.—VII.).

Niels Henrik Abel, geb. am 5. August 1802 im Kirchspiel Findöe im norwegischen Stift Christianasand, bezog 1821 die Universität in Christiana, trat 1825—27 in Paris und Berlin mit Legendre, Cauchy, Crelle, Jacobi und anderen berühmten Gelehrten in persönlichen Verkehr und starb nach einer kurzen, aber glänzenden Laufbahn als Professor der Universität in Christiania am 6. April 1829 auf dem Eisenwerke Froland bei Arendal. Die unsterblichen Abhandlungen Abels, in welchen er die nach ihm benannten Transcendenten in die höhere Analysis einführte, die Theorie der elliptischen Functionen mit den schönsten Entdeckungen bereicherte, und so mit Jacobi zu ihrem zweiten Schöpfer wurde, erschienen in: Magazin for Naturvidenskaberne Aargang I–III, 1823–5; Mémoires de la société royale des sciences à Throndhjem, 1824–7; Crelles Journal für die reine und

Steiner, Plücker, Magnus, Crelle, Borchardt, Grunert, Grassmann, Joachimsthal, Hesse, Riemann, Kummer, Clebsch, Richelot, Ennepper, Schroeter, Kronecker etc., nahmen dann an dem Ausbau dieses stolzen Prachtwerkes der Infinitesimalgeometrie den regsten Antheil. In rascher Aufeinanderfolge erschienen bis zur Gegenwart zahllose, systematische Untersuchungen der hervorragendsten Forscher des ganzen Continentes, welche die analytischen Untersuchungen auf den Gebieten der Krümmungstheorie, der Theorie der ebenen und der Raumcurven, der abwickelbaren und windschiefen Flächen, der Rotations- und Translationsflächen, der Minimal- und der Biegungs- beziehungsweise Deformationsflächen, etc. zum Gegenstande hatten.

Ein ganz besonderes Interesse erweckten die jüngsten, wissenschaftlich-wertvollen Untersuchungen von Sylvester, Beltrami, Bianchi, Painvain, Christoffel, Jonquières, Laguerre, Halphen, Darboux, Mannheim, Montard, Koenigs, Picard, Poincaré, Ribaucour, Gino Loria, Weierstrass, Geiser, Schwarz, Fuchs, Hoppe, Weingarten, Wiener, Weyr, Mayer, Mehmke, Rodenberg, Wallenberg, Meyer, Klein, Study, Schur, Lie, Scheffers, Engel, Frischauf, Biermann, Czuber, von Escherich, Hočevar, Stolz, Waelsch und anderer bekannter Forscher wie Askwith, Booth, Clifford, Dixon, Edwards, Elliots, Forsyth, Greenhill, Hart, Hirst, Bruce-Halsted, Th. Craig, H. Jacobi, Newcomp, Moor, Page, Stringham, Tanner, Aschieri, Caporali, Cesaro, Codazzi, Cremona, d'Ovidio, E. Pascal, E. Padova, Peano, Pirondini, Vivanti, etc. etc.

---

angewandte Mathematik, Bde. I—IV, Berlin 1826—9; Gergonne: Annales de mathém. t. XVII, Paris 1827; Schuhmacher Astron. Nachr. Bde. VI—VII, Altona 1823—9, und Mém. prés. par div. savants, t. VII., Paris 1841.

S: Niels Henrik Abel, Oeuvres complètes Christiania 1839; Nouvelle édition publiée aux frais de l'État Norvégiens par M. M. L. Sylow et S. Lie. Tom. I—II. Christiania 1881. — S. a.: C. A. Bjerknes, Niels-Henrik Abel, sa vie et son action scientifique. Mém. de Bordeaux. 1884.

S.: G. Mainardi, Transformazioni di alcune funzioni algebraiche e loro uso nella geometria e nella meccanica. Pavia 1832. S. a.: Giornale dell' Istituto Lombardo. Tom. IX. pag 395. 1856.

Vergl. a.: Codazzi, Annali di Matematica pura ed applicata. Tom. II, pag. 273 Roma 1868. — S. a.: Luigi Bianchi, Lezioni di geometria differenziale. Pisa 1886 e 1894. (Formole fondamentali della teoria delle superficie) Pag. 84. — E. Padova, Sulla teoria generale delle superficie. Atti del' Accademia di Bologna. Ser. IV, tomo X. 1890.

Wir würden die Grenzen dieser mathematisch - historischen Studie weit überschreiten, wenn wir in historischer Treue den Entwickelungsgang der Infinitesimalgeometrie in diesem Jahrhundert auch nur flüchtig skizzieren wollten, und wir erlauben uns an dieser Stelle auf die wertvolle, im Jahre 1887 im 38. Bande, Serie II, der Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino erschienene Monographie „Il passato e il presente delle principali teorie geometriche“ (ins Deutsche übertragen von Fritz Schütte, Leipzig 1888) hinzuweisen, welche Herrn Dr. Gino Loria, Professor der höheren Geometrie an der Universität zu Genua, zum Verfasser hat, der unter Zusendung geschätzter Publicationen auch unserer Studie über „Monge“ Interesse entgegengebracht hat. [1])

Einen überaus erfreulichen, geradezu ungeahnten Aufschwung erfuhr aber die Infinitesimalgeometrie und die mit ihr im innigsten Zusammenhange stehende Integrationstheorie der Differentialgleichungen in den letzten Jahren durch Herrn Professor Sophus Lies geniale Forschungen in der Theorie der continuierlichen, endlichen und unendlichen Transformationsgruppen, der infinitesimalen Berührungstransformationen, sowie durch die Anwendung und Erweiterung des Begriffes der von Laguerre (1879), Brioschi und Halphen (1880) begründeten Theorie der Differentialinvarianten. In einem innigen Zusammenhange mit den berühmten Forschungen von Lie, der in der denkbar-interessantesten Weise Plückers Liniengeometrie in eine Kugelgeometrie verwandelte, stehen auch die in den letzten Jahren auf dem Gebiete der Gruppentheorie ausgeführten Untersuchungen.[2])

[1]) S. a.: Dr. Felix Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872. (Mathematische Annalen, 43. Bd. Leipzig 1893, S. 63—100, Annali di Matematica, ser. II, t. XVII, 1890 u. Annales de l'École Normale supérieure. III. F. VIII, Paris 1891 u. Bulletin of the New York mathematical Society. Vol. II. 1892. Ferner F. Klein, Einleitung in die höhere Geometrie. I. u. II. Th., Vorlesung, gehalten an der Universität in Göttingen 1892—93. — Riemannsche Flächen von demselben Verfasser, Göttingen 1894, etc.

S. f.: Gaston Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. (Cours de Géométrie de la Faculté des Sciences faites à la Sorbonne pendant les hivers de 1882 à 1885). Première Partie, Paris 1887; deuxième partie, Paris 1889; troisième partie, Paris 1894. — Mémorie sur la théorie générale des surfaces courbes par A. Ribaucour. Journal de Mathématiques Ser. IV., tom. VII, Paris 1891, pag. 5 – 108 et 219 – 270. etc.

Vergl. a. d. Literaturangaben in Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes. III. Aufl. Leipzig 1879—80; — Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie. Leipzig 1875 und 1891. etc.

[2]) S.: S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen. III. Abschnitt S. 753—815, und s. a. das sogenannte Riemann-Helmholtzsche Problem (Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie), Lie, III. Abschnitt S. 393—513. Leipzig 1893.

S. a.: Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen. Leipzig 1896.

Hieher gehören auch die durch Riemanns berühmte, am 10. Juni des Jahres 1854 in der philosophischen Facultät der Universität zu Göttingen gehaltene Habilitationsrede „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" angeregten und in der jüngsten Zeit auf gruppentheoretischer Grundlage ausgeführten Untersuchungen über das sogenannte Riemann-Helmholtzsche [1]) Problem von Lie[2]), Poincaré[3]), Werner[4]), F. Klein[5]), Lindemann[6]), Killing[7]), de Tilly[8]), Story[9]), etc.

Wir haben bereits im ersten Abschnitte dieser mathematisch-historischen Studie (S. 11—25) den Entwickelungsgang gekennzeichnet, welchen die analytische Geometrie seit ihrer Begründung durch Descartes Géométrie (Leyden 1637) bis zu Eulers „Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748" genommen hatte. Monges großes Werk „Application de l'Analyse à la Géométrie", welches im Jahre 1809 bereits in der vierten Auflage erschien, und dessen fünfte Auflage Liouville im Jahre 1850 in Paris herausgab, kann heute noch als ein auf moderner Grundlage geschaffenes Werk der Analysis betrachtet werden, da Monge es war, der zuerst die geistvollen und rasch zum Ziele führenden Methoden des Infinitesimalcalculs auf die Theorie der Curven und Flächen zur Anwendung brachte und Resultate erzielte, die einen Lagrange zu unbegrenzter Bewunderung hingerissen hatten. Jedes geometrische Problem dieses gediegenen Werkes zeigt uns Monge als scharfsinnigen Mathematiker, tiefen Denker und genialen Forscher im Raume. Monge leitet seine Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie mit der Entwickelung der Gleichungen der Tangentialebene und der Normalen in einem Punkte der durch ihre Gleichung bestimmten krummen Fläche ein (§ I, S. 1—6). Der gelehrte Verfasser behandelt nun in der Theorie der Flächenfamilien die cylindrischen Flächen (§ II, S. 6—11), die conischen

---

[1]) S.: Riemanns Gesammelte Werke von Weber, Leipzig 1876, S. 254, Göttinger Nachrichten Bd. XIII. 1867 u. Lies Theorie der Transformationsgruppen Bd. III., S. 485, Leipzig 1893 u. Göttinger Nachrichten vom Jahre 1868. — [2]) Leipziger Berichte 1886, 90 u. 92. — Comptes Rendus, Tom. CXIV, Paris 1892. — Archiv for Mathematik. Christiania 1878. — Math. Annalen, Bd. 16. — [3]) Bulletin de la Société Mathématiques. 1887. Tom. XV. [4]) Math. Ann. Bd. 35. Leipzig 1890. — [5]) Leipziger Berichte 1886. — [6]) S. Clebsch-Lindemann Vorlesungen. Leipzig 1891 u. Math. Ann. Bd. 2. — [7]) Braunsberger Progr. 1884. — Math. Ann. Bd. 35, 1890 u. Crelles Journ. Bd. 109. Berlin 1892. — [8]) Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux. Ser. 2, Tom. III, 1878—79. — [9]) American Journal of Mathematics. Baltimore 1879, 80 u. 1882. — Anm. Vergl. a. H. Burkhardt, Beiträge zu den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Göttinger Nachrichten. 1895. S. 114

Flächen (§ III, S. 11—17) und die Rotationsflächen (§ IV, S. 17—24), deren partielle Differentialgleichungen zumeist unter Zugrundelegung mehrerer Erzeugungsweisen abgeleitet werden, aus welchen sich dann durch Integration die allgemeinen Gleichungen dieser Flächenfamilien ergeben.

Nach den Rotationsflächen werden (V, 24 — 29) nach zwei Methoden, die partiellen Differentialgleichungen und die Integralgleichungen, jener Flächenfamilien aufgestellt, welche durch die Bewegung einer horizontalen Geraden längs einer verticalen Leitlinie entstehen. Es sind dies die Kreis-, Ellipsen- und Raumcurven-Conoide und die windschiefe Schraubenfläche — also Regelflächen, welche nach der neueren Bezeichnungsweise in einer linearen Congruenz mit einer unendlich fernen Leitgeraden enthalten sind. — Monge macht schon hier (S. 29) auf die interessante Eigenschaft der windschiefen Schraubenfläche (la surface supérieure de la courbe rampante circulaire ou l'hélice d'une vis) als Minimalfläche aufmerksam. Die windschiefe Schraubenfläche hat nämlich die Eigenschaft, dass jedes Flächenstück auf derselben, das von einer beliebigen continuierlichen oder discontinuierlichen Curve begrenzt wird, von allen Flächenstücken das kleinste ist, welche durch die auf der Schraubenfläche verzeichnete Contourcurve hindurchgehen. Den nächsten Gegenstand bilden (VI, 29—36) die Flächen (les enveloppes), welche eine unendliche Zahl anderer Flächen einhüllen. Der Schnitt zweier aufeinander folgenden Flächen der unendlichen Flächenschar wird die Charakteristik der Hülle (l'enveloppe) genannt. Zwei aufeinander folgende Schnittcurven (caractéristiques) schneiden sich in den Rückkehrpunkten, welche die Rückkehrkante (l'arête de rebroussement) der Fläche bilden, und die Hülle (l'enveloppe) in zwei Mäntel (deux nappes) trennen. Schneiden sich drei aufeinanderfolgende Schnittcurven (trois caractéristiques consécutives) in einem Punkte, so besitzt die Rückkehrkante Rückkehr- oder Inflexionspunkte (Wende- oder Cuspidalpunkte, points d'inflexion ou points de rebroussement). Der Parameter dieser Inflexionspunkte muss vier Gleichungen, nämlich der Gleichung der Fläche mit dem variablen Parameter und den auf Null reducierten ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten Genüge leisten. Durch Elimination der variablen Coordinaten erhält man die Differentialgleichung des Parameters der Inflexionspunkte. Das Integral dieser Gleichung liefert ihren Parameter selbst. Im nächsten Capitel (VII, 36 — 51) werden die Differentialgleichungen der Canal- oder Röhrenflächen (les surfaces des canaux), deren Achse eine beliebige ebene Curve ist, und deren Normalschnitte zur Achse Kreise von constantem Halbmesser sind, bestimmt.

Hierauf (VIII, 51—58) werden Flächen untersucht, bei welchen die Linien des größten Falles Gerade von constanter Neigung sind. Die Fläche, welche eine längs einer doppeltgekrümmten Curve sich bewegende krumme Fläche von constanter Gestalt einhüllt, bildet den Gegenstand der nächsten analytischen Untersuchungen. (IX, 58—70.) Diese Untersuchungen werden hierauf (X, 70 — 83) auf windschiefe Regelflächen, deren Erzeugenden zu einer gegebenen Ebene parallel sind und entweder zwei Curven zu Leitcurven oder zwei krumme Flächen zu Leitflächen haben, und im nächsten Capitel (IX, 83—89) auf windschiefe Regelflächen ausgedehnt, welche drei Leitcurven besitzen.

Monge gieng auch bei den windschiefen Regelflächen unter Zugrundelegung des von ihm aufgestellten Eintheilungsprincipes der Flächenfamilien von allgemeinen Leitcurven oder Leitflächen aus und führt (S. 89) als besondere Beispiele die Wölbfläche des schiefen Einganges (la surface du biais passé) und das sogenannte Kernbogen-Gewölbe (la surface de l'arrière-voussure de Marseille) an, also windschiefe Regelflächen, welche nach Plücker in einem speciellen linearen Complexe enthalten sind und eine unendlich ferne oder eine endliche Achse besitzen.[1]) Sind die Leitcurven von der ersten Ordnung, also gerade Linien, so erhalten wir bekanntlich als die einfachsten Typen dieser windschiefen Flächenfamilien die windschiefen Flächen der zweiten Ordnung, das hyperbolische Paraboloid und das einmantelige Hyperboloid. Die Erzeugungsart des letzteren, dessen Erzeugenden gleichzeitig drei linearen Complexen angehören, hatte Monge in seiner Géométrie descriptive (Additions, II, Des surfaces gauches, pag. 130—131) besprochen und darauf hingewiesen, dass diese windschiefe Fläche eine Fläche des zweiten Grades sein müsse, da sie von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden könne. Die weiteren analytischen Untersuchungen über diese beiden Flächen, sowie über die Flächen der zweiten Ordnung verdanken wir seinem Schüler und

---

[1]) Vergl.: J. Plücker, „On a new Geometry of Space." Philosophical Transactions. Vol. 155. London 1865 und Neue Geometrie des Raumes." Leipzig 1868—69. — S. a.: J. de la Gournerie, Traité de géométrie descriptive. Paris 1862 II[e] Partie. „Surface du biais passé." Pag. 205—218, (II[e] édition Paris 1873). — Dr. W. Fiedler, Die Darstellende Geometrie. Leipzig 1875. S. 407. (III. Aufl. II. Bd. S. 409. Leipzig 1885). — A. Mannheim, Cours de géométrie descriptive. Paris 1880. Pag. 426. (II[e] édition Paris 1886). — Dr. G. A. V. Peschka, Darstellende und projective Geometrie. Wien 1885. IV. Bd. S. 137. — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie. Leipzig 1887. II. Bd. S. 475. — S. a.: A. Voss, Zur Theorie der windschiefen Flächen. Mathematische Annalen. Bd. VIII S. 54. Leipzig 1875.

Nachfolger im Lehramte Hachette [1]), der den einzelnen Species die noch heute üblichen Namen gab.

---

[1]) Hachette, Traité des surfaces du second degré. Paris 1813. (De la génération des surfaces du second degré, pag. 186).

Anmerkung: Die verschiedenen Typen der Flächen zweiten Grades sind zuerst von Euler in seiner „Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748“ aufgestellt worden. Euler unterschied: 1.) das Ellipsoid (jetzt reelles Ellipsoid), 2.) die elliptisch-hyperbolische Fläche (jetzt eintheiliges Hyperboloid), 3.) die hyperbolisch-hyperbolische Fläche (jetzt zweitheiliges Hyperboloid), 4.) die elliptisch-parabolische Fläche (jetzt elliptisches Paraboloid) und 5.) die parabolisch-hyperbolische Fläche (jetzt hyperbolisches Paraboloid).

Die heute gebräuchlichen Namen für die Flächen zweiten Grades sind von Monges Schülern an der École politechnique eingeführt worden. Die Existenz der drei zu einander rechtwinkeligen conjugierten Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung wurde zuerst von Monge u. Hachette (Journal de l'École polyt. Cah. 11. Paris 1803) gefunden. Hachette und Poisson (Ibid. Cah. 11) fanden die zu einem gegebenen Durchmesser conjugierte Ebene einer Fläche der zweiten Ordnung. Die weitere Ausbildung der Theorie der conjugierten Durchmesser einer Fläche der zweiten Ordnung verdanken wir Livet (Ibid. Cah. 13. Paris 1806), Chasles (Correspondance sur l'École polyt. Paris 1814—16, u. Aperçu historique. Bruxelles 1837) und Plücker (System der Geometrie des Raumes. Leipzig 1868—69); ferner Kummer (Crelles Journal Band 26 u. „Über die algebraischen Strahlensysteme,“ Berlin 1868), Jacobi (Ibid. Bd. 30, etc.) Borchardt (Ibid. 1846 u. Liouvilles Journal, Bd. 12), Hesse (Crelles Journ. u. Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Leipzig 1872.) und Clebsch (Crelles Journ. Bd 62 und Vorlesungen über Geometrie. Leipzig 1875 u. 1891). Die ersten Sätze der Polarentheorie für Flächen zweiter Ordnung verdanken wir Monge, Livet und Brianchon; die allgemeinen Begriffe dieser Theorie wurden ausgebildet von Encontre, de Steinville, Servois, Gergonne und Poncelet. (Vergl. diesbezügl. Chasles Aperçu historique, S. 232 u. Note XXVII, sowie dessen Rapport sur le progrès de la Géométrie. Paris 1870). Die Eintheilung der Flächen zweiten Grades nach ihren Beziehungen zur unendlichfernen Ebene gab Poncelet in seinem „Traité des propriétés projectives,“ Paris 1822), während die Classification der Flächen zweiten Grades im Anschluss an die Transformation von Plücker in seinem „System der Geometrie des Raumes“ im Jahre 1846 (II. Aufl. 1868 u. 69) durchgeführt wurde.

Die Theorie der Tangenten und der Erzeugenden der Flächen, sowie der conjugierten Polaren haben Jacobi, Hermite, Sylvester, Plücker, Steiner Bobillier, Chasles, F. Klein weiter ausgebildet und insbesondere interessante Analoga zum Pascalschen Satze geliefert. Die geraden Linien auf dem Rotationshyperboloide (damals hyperbolisches Cylindroid genannt) wurde von Wren (Philosophical Transactions 1669, pag. 961) und von Parent (Essai et recherches de mathématique et de physique. 1698, tom. II et III) entdeckt. Bei den geradlinigen, allgemeinen Flächen entdeckten die geraden Linien und Erzeugenden Monge und seine Schüler, insbesondere Chasles. Die beiden Rotationsellipsoide

Der Theorie der windschiefen Flächen (les surfaces gauches) folgt jene der abwickelbaren Flächen (les surfaces développables). (XII, 89 — 105.) Sie werden durch den Schnitt der aufeinander folgenden Normalebenen einer Raumcurve oder durch den Schnitt der aufeinander folgenden Tangentialebenen zweier krummen Flächen oder von den aufeinander folgenden Tangenten einer Raumcurve, ferner von Geraden erzeugt, welche zwei gegebene Raumcurven schneiden, oder zwei gegebene, krumme Flächen gleichzeitig berühren. Auch hier bildet die Charakteristik und die Rückkehrkante dieser Flächen, sowie ihre ersten und zweiten, partiellen Differentialquotienten einen wesentlichen Gegenstand dieser analytischen Untersuchungen. Als darstellender Geometer weist Monge auf S. 104 insbesondere darauf hin, dass die abwickelbaren Flächen, von denen die Cylinder- und Kegelflächen nur die einfachsten Beispiele sind, bei den Schattenconstructionen von Körpern, welche durch Lichtkörper beleuchtet sind, vielfache Anwendung finden.

Den Schluss des ersten Abschnittes der Flächentheorie bildet die einhüllende Fläche (la surface de l'enveloppe) einer krummen Fläche von constanter Gestalt, welche sich längs einer beliebigen, doppeltgekrümmten Curve fortbewegt (XIII, 105—111), und die Fläche, welche durch die Bewegung einer doppeltgekrümmten Curve von constanter Gestalt längs einer beliebigen Curve entsteht. (XIV, 111—124).

Der geistige Kern dieses gediegenen Werkes, für welches die früher genannten Abhandlungen Monges aus den Memoiren der Akademien der Wissenschaften von Turin und Paris, sowie aus dem Journal de l'École polytechnique und aus der Correspondance polytechnique die Grundlage bildeten, ist die Krümmungstheorie der Flächen (Des deux courbures d'une surface courbe), welche den umfangreichen zweiten Hauptabschnitt (XV — XXXV, 124 — 420) der „Application de l'Analyse à la Géométrie" bildet. Noch schärfer und geistvoller als im ersten Abschnitte des Werkes tritt in der Theorie der Krümmungslinien die geometrische Bedeutung der Differentialquotienten einer eine krumme

---

(Sphaeroides longum et latum), das Rotationsparaboloid (Conoides parabolicum), sowie das zweitheilige Hyperboloid (Conoides hyperbolicum) als solche hat schon Archimedes in seinem „libro de Conoidibus et Sphaeroidibus" betrachtet.

Poncelet hat in seinem Traité des propr. proj. das Problem der drei Hauptachsen einer Fläche zweiter Ordnung auf das ebene Problem, das gemeinsame Polardreieck zweier Kugelschnitte zu finden, zurückgeführt. Er begründete auch die Theorie des imaginären Kugelkreises.

(Vergl. a. die schöne Abhandlung von A. Voss, Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades. Math. Annalen. Bd. X, S. 143. Leipzig 1876).

Fläche darstellenden Function in den Vordergrund.[1]) Betrachten wir einen Punkt der durch ihre Gleichung bestimmten krummen Fläche, so gibt es immer zwei Richtungen auf derselben, bei welchen sich zwei unendlich nahe Normalen schneiden. Diese beiden Richtungen stehen aufeinander senkrecht und entsprechen den beiden Scharen von Krümmungslinien (lignes de courbure), welche auf der krummen Fläche zwei sich rechtwinkelig schneidende Curvensysteme von variabler Zonenbreite bilden. (S. 130.) Die beiden Systeme von Normalen einer jeden Schar von Krümmungslinien erzeugen somit zwei Systeme von abwickelbaren Flächen, welche die gegebene Fläche nach den beiden Scharen von Krümmungslinien schneiden, diese krumme Fläche in unendlich viele Rechteckchen von variabler Breite zerlegen und ein orthogonales Curvensystem auf derselben bilden. (S. 131.) Ist die gegebene krumme Fläche eine Umdrehungsfläche, so sind die Krümmungslinien der einen Art die Meridiane, jene der andern Art die Parallelkreise der Fläche. Die developpablen Regelflächen, welche durch die Krümmungslinien einer krummen Fläche hindurchgehen und auf derselben normal stehen, können somit als Fugen eines Gewölbes (les joints réglées d'une voûte) praktische Verwendung finden. (S. 133.) Die Schnitte zweier aufeinander folgenden Normalen längs einer Krümmungslinie geben die Rückkehrkante der developpablen Normalenfläche.

Jede der beiden developpablen Normalflächen der Krümmungslinien der ersten und zweiten Art hat ihre eigene Rückkehrkante, die sich aus dem Schnitt der aufeinander folgenden Normalen ergibt, und welche der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte der Fläche für diese Krümmungslinie ist. Alle diese Rückkehrkanten der Krümmungslinien der ersten Art bilden eine krumme Fläche, die Centrafläche (la surface des centres de courbure), welche der geometrische Ort aller

---

[1]) Vergl. insb.: Dr. J. Knoblauch, „Die Fundamentalgrößen in der Flächentheorie." Crelles Journal Bd. 103. Berlin 1888.

S. a.: Dr. Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Leipzig 1888, und „Über die geometrische Bedeutung der flächentheoretischen Fundamentalgleichungen." Acta Math. Bd. XV, S. 249, Jahrg. 1891. — E. Czuber, Über Curvensysteme und die zugehörigen Differentialgleichungen. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Jahrg. 1893, 102. Band, S. 1141.

L. Bianchi, „Lezioni di geometria differenziale." Pisa 1886 e 1894. (Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von Lukat. Leipzig 1895).

Dr. H. Stahl u. Dr. V. Kommerell, „Die Grundzüge der allgemeinen Flächentheorie." Leipzig 1893.

S. f. die Werke von Schlömilch, Joachimsthal, Salmon, Hesse, Hoppe, Clebsch, Böklen, Cremona, Darboux, Koenigs, etc. etc.

Krümmungsmittelpunkte dieser Krümmungslinien ist. Ebenso bilden die Rückkehrkanten der Krümmungslinien der zweiten Art eine krumme Fläche, die Centrafläche der Krümmungslinien der zweiten Art.[1]) Diese beiden Centraflächen einer krummen Fläche, welche in einigen besonderen Fällen ihre eigene Gleichung besitzen können, aber im allgemeinen die beiden von einander verschiedenen Mäntel (les deux nappes différentes) derselben Fläche sein werden, werden auch nur eine Gleichung zum analytischen Ausdruck besitzen. Jede Normale der krummen Fläche ist zugleich Tangente der Rückkehrcurve der beiden developpablen Normalflächen, aus deren Schnitt sie sich ergibt; sie ist mithin auch eine Tangente an die beiden Mäntel der Centrafläche. Jeder dieser Mäntel ist die Hülle (l'enveloppe) aller abwickelbaren Normalflächen derselben Art, und jede Tangentialebene an eine dieser abwickelbaren Flächen wird auch die Tangentialebene des Mantels der Centrafläche sein, welcher diese abwickelbare Fläche berührt. Führt man also durch eine Normale die beiden Tangentialebenen an die abwickelbaren Flächen, durch deren Schnitt sie sich ergibt, so stehen diese beiden Tangentialebenen aufeinander normal, und jede von ihnen berührt den zu ihr gehörigen Mantel der Centrafläche. Mithin haben die beiden Mäntel einer Centrafläche die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie sich gegenseitig rechtwinkelig durchschneiden, von welcher Seite aus man auch ihre sichtbaren Contouren betrachtet. Hieraus folgt, dass nicht jede Fläche die Fähigkeit besitzen könne, die Centrafläche einer krummen Fläche zu sein. Es ist nothwendig, dass es eine Fläche von gerader Ordnung sei, bei welcher sich die sichtbaren Contouren ihrer beiden Mäntel orthogonal durchschneiden. Betrachtet man ferner auf einem der beiden Mäntel der Centrafläche irgend eine Rückkehrcurve, deren geometrischer Ort sie ist, so wird sie die kürzeste Linie sein, welche man auf der Mantelfläche zwischen zwei beliebigen Punkten derselben ziehen kann. Denn die Osculationsebene (le plan osculateur) dieser Rückkehrkante, welche durch zwei aufeinander folgende Tangenten derselben

---

[1]) S.: A. Voss, Zur Untersuchung der Fläche der Centra. Math. Annalen. Bd. 16, S. 560. Leipzig 1880. — R. von Lilienthal, Zur Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen. Ibid Bd. 30, S. 1—14. Leipzig 1887. — E. Waelsch, Über das Normalsystem und die Centrafläche der Flächen zweiter Ordnung. Sitzungsber. der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. II. Abth. Jahrg. 1887, 98. Bd. S. 549—578 und Jahrg. 1889, 97. Bd. S. 583—590. — Über Flächen constanter Krümmung. Ibid. Jahrg. 1893, 102. Bd. S. 1317—1333. — Gaston Darboux, Leçons sur la théorie général des surface etc. III[e] partie, pag. 334. (La surface des centres de courbure). Paris 1894. — S. a. die Abhandlungen von Lie im Darboux Bulletin II[e] série, tome IV, pag. 300 Paris 1880 u. jene von Weingarten in Crelles Journal, Bd. 59, S. 352 Berlin 1861 u. Bd. 103, S. 184. Berlin 1888.

geht, ist nämlich eine Tangentialebene an die abwickelbare Normalfläche, zu welcher die Rückkehrkante gehört; sie ist zugleich Tangentialebene an den Mantel der Centrafläche der zweiten Krümmung und normal auf dem Mantel der ersten Krümmung im Osculationspunkte. (point d'osculation). (S. 137.) Es sind dies jene kürzesten Linien auf krummen Flächen, welchen Legendre in seinem „Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultate dépendent de la figure de la terre, Paris 1787" den Namen „geodätische Linien" (lignes géodésiques) gab. Monge veranschaulicht diese kürzesten Linien zwischen zwei beliebigen Punkten der Centrafläche durch das gleichmäßige Anspannen eines vollkommen biegsamen Fadens zwischen denselben, welcher sich an die Centrafläche längs der Rückkehrcurve dieser Punkte anschmiegen wird.

Schneiden sich die beiden Mäntel der Centrafläche, so ist die durch diesen orthogonalen Schnitt entstandene Curve der geometrische Ort der sphärischen Punkte (le lieu des centres de courbures sphériques) der in Rede stehenden krummen Fläche. Jeder Punkt der sphärischen Krümmungslinie hat die Eigenschaft, dass er sich zugleich auf den beiden Mänteln der Centrafläche befindet, mithin der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Krümmungen ist, welche in diesem Punkte — wie bei der Kugel — gleich sind. Die Linie der Punkte gleicher Krümmung (la ligne des courbures sphériques) ist eine bemerkenswerte, von den Krümmungslinien verschiedene Linie einer krummen Fläche. Sie schneidet beide Arten von Krümmungslinien, und man erhält ihre Gleichung, wenn man die Ausdrücke für die beiden Krümmungsradien gleichsetzt.

Es ist klar, dass die Linie der sphärischen Krümmung einer krummen Fläche der Evolvente der Schnittcurve der beiden Mäntel der Centrafläche ist. Befestigt man also einen vollkommen biegsamen Faden längs der Schnittcurve der beiden Mäntel der Centrafläche und bewegt das Ende des Fadens so, dass dessen gerader Theil immer Tangente an diese Schnittcurve bleiben soll, so wird ein Punkt des Fadens auf der gegebenen krummen Fläche die Linie sphärischer Krümmung beschreiben. Schmiegt sich hingegen der Faden an die Schnittcurve der beiden Mäntel der Centrafläche, zugleich aber an eine beliebige Rückkehrcurve derselben an und bleibt sein gerades Stück tangential an die Rückkehrcurve und normal zur krummen Fläche, so bewegt sich der auf der krummen Fläche befindliche Endpunkt des Fadens auf dieser Fläche, welche also in ähnlicher Weise aus der Centrafläche durch Abwicklung erzeugt werden kann, wie eine beliebige Curve als Evolvente aus ihrer Evolute entsteht. (S. 139.)

Die allgemeine Theorie der Krümmung der Flächen wird nun im folgenden Capitel (XVI, 139—160) an dem dreiachsigen Ellipsoide erläutert, indem seine Krümmungslinien und seine vier Kreispunkte (les ombilics, S. 147) analytisch bestimmt werden. [1]) Es sind dies jene bemerkenswerte Punkte des Ellipsoides, in welchem das System der Krümmungslinien der einen Art in jenes der andern Art übergeht. (Les ombilics sont les points dans lesquels les lignes des deux espèces de courbure se change l'une à l'autre. (S. 152.)[2]) Die Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoides sind Raumcurven vierter Ordnung, welche sich auf die Ebene der großen und der mittleren Achse als concentrische Curven zweiter Ordnung projicieren, und zwar ist die Projection der Krümmungslinien der ersten Art eine Ellipsenschar, jene der zweiten Art eine Hyperbelschar, bei welcher die Richtungen der Hauptachsen mit jenen der Ellipsenschar zusammenfallen. Das Analoge gilt von der Projection der Krümmungslinien auf die Ebene der kleinsten und der mittleren Achse. Sowohl die Ellipsenschar als auch die Hyperbelschar wenden den Projectionen der Kreispunkte (ombilics) ihre concave Seite zu. Hingegen projicieren sich die Krümmungslinien der beiden Arten auf die Ebene der größten und der kleinsten Achse als zwei concentrische Ellipsenscharen mit normalen Richtungen der Haupt- und Nebenachsen. Schließlich wird auf die optischen, akustischen und ästetischen Vortheile von ellipsoidisch geformten Sälen hingewiesen und die Anwendung des Ellipsoides als Gewölbefläche für die in Paris zu erbauenden Säle der beiden Conseils de la législature empfohlen. (S. 155 — 157.)

---

[1]) Vergl.: A. Voss, Über die Zahl der Kreispunkte einer allgemeinen Fläche n ter Ordnung. Mathematische Annalen. Bd. 9, S. 241. Leipzig 1876.

[2]) Anmerkung: Für jeden Kreispunkt des Ellipsoides haben die beiden Mäntel der Centrafläche einen gemeinschaftlichen Punkt, oder mit anderen Worten, die Centrafläche besitzt einen Doppelpunkt. Besitzt also eine Fläche eine Linie sphärischer Krümmung, so besitzt ihre Centrafläche eine Doppellinie, längs welcher sich die beiden Mäntel der Centrafläche orthognal durchschneiden. Clebsch und Kummer entdeckten später bei ihren analytischen Untersuchungen der Centrafläche des dreiachsigen Ellipsoides auf dieser Fläche noch Doppellinien der zweiten Art, längs welcher sich die beiden Mäntel der Centrafläche — jedoch nicht rechtwinkelig — durchschneiden. (S.: Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1862, pag. 426). Die zur Tangentialebene im Kreispunkte (ombilics) einer Fläche zweiter Ordnung parallel geführten Schnitte sind Kreise. Die Kreisschnitte auf dem Ellipsoide wurden zuerst von d'Alembert gefunden (Opuscules mathématiques, tome VII, Paris 1780, pag. 163), jene auf den anderen Flächen von Monge und Hachette (Journal de l'École polytechnique, cahier II, pag. 161. Paris 1802). Poncelet benützte zur Bestimmung der Kreisschnitte den imaginären Kugelkreis (Traité des propriétes projectives, Paris 1822, Nr. 621). Die auf dem allgemeinen Kegel gelegenen Kreise fand schon Apollonius von Pergae (Conica I, 5) in der Mitte des dritten Jahrhundertes vor Chr.

Die vollständige Ausbildung der Theorie der Krümmung der Linien und Flächen, insbesondere jene der Flächen zweiter Ordnung verdanken wir Monges berühmten Schüler Charles Dupin.[1])

[1]) Vergl.: Ch. Dupin, Développements de Géométrie. Paris 1813. (De l'osculation des surfaces, pag. 10—18; de la courbure des surfaces et de celle de leurs sections, pag. 19—40 et théorie des surfaces trajectoires orthogonales, appliquée à la détermination des lignes de courbure, pag. 298—321.

Dupin ist der Begründer der conjugierten Tangenten und der Theorie der Indicatrix, des dreifach-orthogonalen Flächensystemes (Développ. de Géom. Pag. 41—58 und 305); er fand auch die Focalkegelschnitte als Grenzcurven. In seinen Applications de Géométrie et de Mécanique (Paris 1822) bewies Dupin, dass die einzigen Oberflächen, bei denen sämmtliche Krümmungslinien Kreise sind, die Kugel, der Rotationskegel und Rotationscylinder und die Cyklide sind, welch' letztere Fläche er als die Enveloppe einer Kugel erkannt hatte, die sich so bewegt, dass sie immer drei feste Kugeln berührt. (Vergl. a.: K. Finks „Dupin" im Correspondenzblatt — f. d. Gelehrten- u. Realschulen Württembergs. Tübingen 1893. 1. u. 2. Heft).

Das von Dupin begründete dreifachorthogonale Flächensystem fand seine weitere Ausbildung durch Binet (Journal de l'École polyt. Paris 1811. Cah. 16 u. Liouvilles Journal, tome 2). Chasles (Aperçu historique. Bruxelles 1837. Note 31) u. Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles. (Tome V 1829); ferner Mac-Cullagh (Proceedings of the Jrish Academy. Vol. II 1836), Lamé (Liouvilles Journal. t. II 1837), Plücker (System der analyt. Geometrie des Raumes. 1846), Hesse (Vorlesungen über analyt. Geom. des Raumes. 1861), etc.

Es ist nicht uninteressant, an dieser Stelle auf die Prioritätsansprüche von Mac Cullagh und Chasles (S.: Journ. de math., t. XI., pag. 120) bezüglich der ersten Entdeckungen der Theoreme über confocale Oberflächen zweiter Ordnung hinzuweisen. Mac Cullagh veröffentlichte seine ersten Untersuchungen in den „Proceedings of the Royal Academie of Irland, Dublin 1836," während Chasles, welcher jedoch in demselben Jahre der Akademie der Wissenschaften in Brüssel von seinen Entdeckungen Mittheilung gemacht, diese erst in seinem „Aperçu historique, Bruxelles 1837. Note XXXI, pag. 384" veröffentlicht hatte. Die ersten Entdeckungen der Focaltheoreme über Oberflächen zweiter Ordnung hat aber Jacobi schon in einem an J. Steiner gerichteten und in „Crelles Journal, 1834. Bd. XII, pag. 137—140" im Auszuge veröffentlichten Schreiben seinem Freunde mitgetheilt. Mit Recht konnte also Jacobi als erster Entdecker der Focaltheoreme in seiner „Dynamik, pag. 209" seine Prioritätsansprüche Chasles gegenüber zur Geltung bringen.

S. a.: C. Küpper, Über die Projection der Krümmungslinien des Ellipsoides, Zeitschrift für Math. und Phys. Jahrgang 1857, S. 222. — E. Weyr, Über die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades und confocale System solcher Flächen. Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften in Wien. 58. Bd. 1878, S. 60—83. —

F. J. Obenrauch, Zur Complanation des dreiachsigen Ellipsoides mittelst elliptischer Coordinaten. Archiv der Math. u. Phys. 2. Reihe, XII. Theil, S. 155—167. Leipzig 1894.

Anmerkung: Eine gründliche Discussion der Centrafläche des Ellipsoides gab der berühmte, am 16. August 1821 in Richmond geborene und am 26. Jänner 1895 in London verstorbene englische Mathematiker und Begründer der nach ihm benannten Invariantentheorie Arthur Cayley im 12. Bande der Cambridge

Die Erzeugung der krummen Flächen, deren Krümmungslinien der einen Art in einer zu einer gegebenen Ebene parallelen Ebene liegen, bildet den nächsten Gegenstand (XVII, 161—186), auf welchen die Untersuchung der Fläche folgt, bei welcher einer der beiden Krümmungshalbmesser gleich sind und dieselbe Richtung besitzen. (XIX, 196—211.)

Den Höhepunkt in den Forschungen über die Theorie der Flächen und ihre Krümmung, aber zugleich auch die Grenze der Forschungen der Mathematiker in der Infinitesimalgeometrie fast bis zur Mitte des neunzehnten Jahrhundertes erreichte Monge in der durch ihn und Lagrange begründeten Theorie der Minimalflächen. Es sind dies jene interessanten Flächen, bei welchen das zwischen einer beliebigen, auf dieser Fläche liegenden Curve als Contour befindliche Flächenstück ein Minimum ist. Das analytische Kennzeichen dieser Flächenart besteht darin, dass in jedem Punkte einer Minimalfläche die beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleich sind, jedoch entgegengesetzte Richtungen besitzen. Diese analytischen Entdeckungen von Monge in der Integral- und Variationsrechnung waren und sind noch immer theils der Gegenstand, theils der Ausgangspunkt der scharfsinnigsten und elegantesten Untersuchungen der größten Mathematiker unseres Jahrhundertes. Bekanntlich hat Lagrange in dem „Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies," in welchem er die Principien der Variationsrechnung niedergelegt hatte, zuerst die partielle Differentialgleichung für eine Minimalfläche aufgestellt.[1]) Monge und Meusnier interpretierten diesen analytischen Ausdruck geometrisch und fanden als die ersten Minimalflächen die windschiefe Schraubenfläche (l'héliçoïde gauche à plan directeur) und das sogenannte Elassoid oder Catenoid (l'élassoïde l'alysséide ou caténoïd, c'est la surface engendrée par la rotation d'une chainette autour de sa base), welches durch Umdrehung einer Kettenlinie um ihre Achse (Directrix) entsteht. Je berühmter Monge wurde, um so größer war sein Widerwille gegen die Veröffentlichung seiner hervorragenden Entdeckungen, und so kam es, dass Meusnier (lieutenant en premier au corps royal du Génie) schon vor Monge in der Sitzung der Akademie der Wissenschaften in Paris am 14. und 21. Februar 1776 sein diesbezügliches

---

Philosophical Transactions (1878) pag. 319—365. — Die Centrafläche des elliptischen Paraboloides untersuchte F. Caspari in Crelles Journal Bd. 81, pag. 143 (1876) u. Bd. 83, pag. 72 (1877) in eingehender Weise. S. d. n.: Gino Loria-Schütte, Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie etc., S. 31, etc.

[1]) Miscellanea Taurinensia, tome II., années 1760—61, (Oeuvres de Lagrange, t. I., pag. 335).

Memoire, welches insbesondere die Erweiterung des Eulerschen Krümmungstheoremes [1]) zum Gegenstande hatte, zum Vortrage brachte.[2])

Meusnier stellte sich bei der geometrischen Interpretation der Lagrangeschen Differentialgleichung für eine Minimalfläche die Aufgabe — wenn auch nicht das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung — so doch besondere Integrale des allgemeinen Mongeschen Integrales dadurch zu finden, dass er eine krumme Fläche suchte, welche aus lauter Kreispunkten (ombilics) besteht. Zu diesem Zwecke dachte er sich das Flächenelement in dem betrachteten Punkte durch Rotation eines Bogenelementes des Krümmungskreises entstanden, um eine durch den anderen Krümmungsmittelpunkt gehende und zur Tangentialebene parallele Achse rotiert und eine osculierende Ringfläche (tore osculateur) erzeugt — ein Verfahren, welches später Herr Professor A. Mannheim in den „Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences à Paris 1872 u. 1874" durch die Benützung der beiden osculierenden Ringflächen (tores osculateur), deren Achsen durch die Mittelpunkte der beiden Hauptkrümmungen parallel zur Tangentialebene gehen, erweiterte und mit Erfolg in der allgemeinen Krümmungstheorie der Flächen zur Anwendung brachte.

Meusnier fand als erste Minimalfläche die bereits von Monge durch Rotation einer horizontalen Geraden erzeugte windschiefe Schraubenfläche (hélicoïde gauche à plan directeur) und als zweite Minimalfläche die durch Rotation einer Kettenlinie um ihre Directrix entstandene Rotationsfläche, das Catenoid oder Elassoid. Diese beiden Minimalflächen, die windschiefe Schraubenfläche und das Catenoid, von denen — wie später Ossian Bonnet und E. Bour bewiesen — die eine leicht in die andere deformiert werden kann, blieben die einzigen reellen Minimalflächen, welche den Mathematikern bis zum Jahre 1831 bekannt waren. Mit der letztgenannten Minimalfläche, dem Catenoid — der einzigen Rotations-Minimalfläche — beschäftigte sich auch C. Goldschmidt in seiner von der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen preisgekrönten Abhandlung.[3])

Die Integralgleichung einer Minimalfläche hatte weder Lagrange noch Meusnier gefunden. Monge war der Erste, der in seinem

---

[1]) Recherches sur la courbure des surfaces. (Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1760, pag. 119.)

[2]) Mémoire sur la courbure des surfaces, lu à l'Académie des Sciences le 14 et le 21 février 1776, ins. aux Mémoires des Savants étrangers, t. X, 1785, pag. 477—510.

[3]) S. a. Die preisgekrönte Schrift: C. Goldschmidt, Determinatio superficie minimae, rotatione curvae data duo puncta jugentis circa datum axem ortae. Goettingae 1831.

„Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différence partielles" (Mémoires de l'Académie royale des sciences pour 1784, pag. 118 et Supplément pag. 536) das Integral einer allgemeinen Minimalfläche aufstellte. Monge gieng (s. § XX, S. 211—222) von der von Lagrange für eine Minimalfläche aufgestellten, partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung aus und benützte behufs Integration derselben die Charakteristik der Fläche, deren Gleichung er in zwei verschiedenen Formen aufstellte. Die leichter durchführbare Integration der zweiten Differentialgleichung zweiten Grades der Charakteristik zeigt, dass die gesuchte Minimalfläche zwei verschiedene Charakteristiken besitzt, welche sich beide auf einen Punkt reducieren. Es entstehen somit die Minimalflächen geometrisch durch die Bewegung oder Verschiebung (Translation) von Curven von der Länge Null, den Null- oder Minimalcurven, und analytisch durch die Variation von zwei Constanten, welche in jedem Augenblicke die Lage ihres erzeugenden Punktes bestimmen. (S. 214.) Diese Minimalcurven, durch deren Translation eine Minimalfläche erzeugt wird, haben bekanntlich nach Lie die Eigenschaft, dass ihre Tangenten den imaginären Kreis aller Kugeln im Unendlichen schneiden.[1]) Die allgemeine Minimalfläche kann auch als die Einhüllende einer sich bewegenden, krummen Fläche von variabler Gestalt, die sich nach zwei verschiedenen Richtungen bewegt, erzeugt werden. Zwei aufeinander folgende Flächen der beiden eingehüllten Flächenscharen geben die Charakteristiken der gesuchten Minimalfläche, in deren Schnitt der erzeugende Punkt liegt und eine bestimmte Bewegungsrichtung haben muss. Nach dieser geometrischen Betrachtung setzt Monge die Integration der partiellen Differentialgleichung einer Minimalfläche fort und gelangt (S. 220) durch Integration der Differentialgleichungen der beiden Charakteristiken zu dem nur von Quadraturen abhängigen Integral der allgemeinen Minimalfläche. Im Anschlusse an seine infinitesimalgeometrischen Betrachtungen erwähnt Monge, dass die Wertbestimmung des Integrales der allgemeinen Minimalfläche auf die Erzeugung dieser Fläche zurückkommt und gibt (S. 220—222) eine auf der Eigenschaft der Krümmungshalbmesser der Minimalfläche beruhende descriptive Construction der zu einer gegebenen Raumcurve gehörigen Minimalfläche aus ihren unendlichnahen Krümmungslinien an, welche Construction zugleich den Beweis liefert, dass die Oberfläche der Minimalfläche nicht Null sein könne. Die erzeugenden Krümmungslinien der

---

[1]) S.: S. Lie, Über eine Darstellung der Imaginären in der Geometrie. Crelles Journal, Bd. 70, S. 346, Berlin 1869 und Forhandlingar i Videnskab. Christiania 1869.

Vergl. a.: Laguerres diesbezügliche Abhandlung in den Nouvelles Annales de Mathématiques vom Jahre 1870.

Minimalfläche sind Evolventen der Rückkehrcurven zweier orthogonalen Tangentendeveloppabeln, von denen die erstere zur gegebenen Raumcurve gehört und die letztere auf der aus den Kreisen des zweiten Krümmungshalbmessers gebildeten cyclischen Fläche normal steht.

Legendre führte im Jahre 1787, nachdem er die von Monge aufgestellte Integralgleichung einer Minimalfläche entwickelt hatte, in eleganter Weise in die Lagrangesche Differentialgleichung neue Variable ein, deren geometrische Bedeutung nach Chasles (Comptes rendus, Paris 1846) darin besteht, dass an Stelle der betrachteten Fläche ihre reciproke Polare in Beziehung auf ein Paraboloid in Betrachtung tritt und gelangte zu integralfreien Formeln, welche die Grundlage für spätere Untersuchungen in der Theorie der Minimalflächen bildeten. Dies gilt insbesondere von den Integrationsmethoden, welche von Laplace und Lacroix gefunden wurden. (S. d. n. P. S. Laplace, Traité de Mécanique céleste, Paris 1798—1825 u. S. Lacroix, Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris 1810—19, V^e édit. 1837, pag. 622. Vergl. a. Gauss, „Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. Gottingae 1829).

Das zuerst von Monge in den Memoiren der Pariser Academie der Wissenschaften vom Jahre 1784 aufgestellte Integral der allgemeinen Minimalfläche bildet — von einem Irrthum Monges bezüglich der Integrabilität der beiden Differentialfunctionen, in welchen die rechtwinkeligen Coordinaten durch zwei Parameter ausgedrückt erscheinen, und welchen Irrthum Legendre in seinem Memoire [1]) leicht richtigstellen konnte — die Grundlage unserer ganzen, modernen Theorie der Minimalflächen. Wohl blieb fast ein halbes Jahrhundert das von Monge aufgestellte Integral, für dessen Entwickelung Ampère [2]) eine neue Methode gab, wegen der in demselben vorkommenden, imaginären Größen ein geheimnisvolles Problem, dessen Auflösung für unmöglich gehalten wurde. Selbst Poisson [3]), dem es nur gelang, einige imaginäre Minimalflächen aufzufinden, erklärte noch im Jahre 1832, dass man unglücklicherweise von dem Mongeschen Integral keinen Gebrauch machen könne — eine Behauptung, die keinesfalls geeignet schien, die Geometer zu neuen Forschungen zu ermuthigen. Aber schon im Jahre

[1]) Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux dérivées partielles. (Mémoires de l'Académie des Sciences, 1787, pag. 309).

[2]) Journal de l'École polytechnique, cahier XVIII, Paris 1820.

[3]) Correspondence sur l'École polyt., Tom. II, pag. 410, Paris 1813. — Crelles (Journal f. die reine u. angew. Math. Band VIII., pag. 361—362 Berlin 1832).

Note sur la surface dont l'aire est un minimum entre des limites donneés. Journal f. die reine u. angew. Math. Band VIII., pag. 361—362 Berlin 1832).

1834 veröffentlichte ein deutscher Gelehrter, H. F. Scherk, Professor der Mathematik an der Universität zu Halle, dann zu Kiel, seine von der Fürst Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig im Jahre 1831 preisgekrönte und erweiterte Abhandlung, welche Monges Theorie der Minimalflächen durch wichtige Resultate ergänzte und besonders in den imaginären Theil dieser Theorie Licht und Klarheit brachte. Prof. Scherk war es, der zuerst aus dem Integrale von Monge und Legendre die ersten Beispiele von allgemeinen Minimalflächen entwickelte; er fand auch alle Minimalflächen, darunter fünf neue Minimalflächen, welche durch eine Gerade als Schraubenflächen erzeugt werden.[1]) Die Schwierigkeit, aus den Mongeschen Integral-Minimalflächen durch continuierliche Bewegung zu erzeugen, bestand eben darin, dass sich die Charakteristiken der Eingehüllten als Linien von der Länge Null, also als Punkte ergaben, so dass die gesuchte Fläche nicht als Einhüllungsfläche durch continuierliche Bewegung einer anderen Curve oder Fläche erzeugt werden konnte.

Dieser Umstand war es auch, der die Fürst Jablonowskische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veranlasst hatte, eine diesbezügliche Untersuchung zum Gegenstande einer Preisaufgabe für das Jahr 1831 zu machen. Professor Scherk (1798—1885) fand in seiner im November 1830 vorgelegten und preisgekrönten Abhandlung alle in sich verschiebbaren Minimalflächen — also die erste Minimalflächenschar — welche aus einer Geraden erzeugt werden können. Diese Minimalflächenschar bestand außer der bereits bekannten windschiefen Schraubenfläche und der Rotationsfläche der Kettenlinie (Catenoid) noch aus fünf neuen Minimalflächen, von denen zwei die Eigenschaft haben, dass sie durch Specialisierung ihrer Constanten in die beiden bereits bekannten und aufeinander abwickelbaren Minimalflächen übergehen.

Der geistreichen Entdeckung von Scherk folgten in dem Zeitraume vom Jahre 1840 bis zur Gegenwart rasch die bekannten Forschungen von Jacob Steiner, E. Catalan, J. Bertrand, E. G. Björling, M. Roberts, J. A. Serret, M. Chasles, F. Minding,

---

[1]) „De proprietatibus superficiei, quae hac continetur aequatione:

$$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0$$

disquisitiones analyticae." (Actis Societ. Jablonovianae 1832. Vol. IV. Fasc. II, pag. 204—280.

S. a.: „Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen." Von Prof. H. F. Scherk in Kiel. (Crelles Journal, Bd. 13, pag. 185—208. Berlin 1835).

Anmerkung: Der Inhalt dieser Abhandlung, in Crelles Journal mit dem Datum „Juli 1834" veröffentlicht, wurde vom Verfasser im September des Jahres 1833 auch der königl. Akademie der Wissenschaften zu Kopenhagen vorgelegt).

Ossian Bonnet, F. Joachimsthal, J. Todhunter, Moigno-Lindelöf, E. Bour, A. Weiler, Mathet, E. Lamarle, A. Enneper, E. Beltrami, U. Dini, L. Bianchi, G. Darboux, B. Riemann, K. Weierstrass, H. A. Schwarz, E. B. Christoffel, K. Peterson, A. Schondorff, C. F. Geiser, Harwitz, Gromen, R. Lipschitz, J. Plateau, S. Lewänen, L. Henneberg, A. Herzog, Lebrecht, A. Cayley, R. Hoppe, S. Pincherle, Sophus Lie, J. van der Mensbrugghe, L. Kiepert, J. A. Becker, Bockwoldt, C. Schilling, George Salmon - W. Fiedler, E. Laguerre, Ribaucour, E. R. Neovius, O. von Lichtenfels, R. von Lilienthal, J. Weingarten, F. Bohnert, J. Vivanti, J. Knoblauch, B. Niewinglowski, R. Sturm, H. Tallqvist, E. Picard, L. Raffy, A. Schoenflies, G. Kobb, F. Klein, H. Stahl - V. Kommerell, A. Voss und Luigi Bianchi.

Es sind dies folgende, in ihrem analytischen und synthetischen Wesen zumeist eng verwandte und oft auf ihre gemeinsame, durch Lagrange und Monge erschlossene geistige Quelle hinweisenden mathematischen Forschungen der letzten Decennien in der Krümmungs- und Deformationstheorie der Flächen:

J. Steiner, „Über parallele Flächen." Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften. Jahrgang 1840, S. 118. — „Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général." Crelles Journal, Bd. 24, S. 93 u. 189. Jahrg. 1842. — S. a. Liouvilles Journal Tom. VI u. J. Steiner, Gesammelte Werke. Berlin 1881—82. II. Bd. S. 173.

E. Catalan, „Sur la surface reglées dont l'aire est minimum." Journal de Liouville. Ie série, tom. VII, pag. 203, Paris 1842. — „Mémoire sur les surfaces dont les rayons de courbure en chaque point sont égaux et de signe contraires." Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Tom. 41, pag. 1019, Paris 1855 u. Journal de l'École polytechnique. Cahier 37, pag. 130. Paris 1858.

J. Bertrand, „Mémoire sur la théorie des surfaces." Journal de Liouville. Tom. 16, pag. 133. Paris 1844.

E. G. Björling, „In integrationem aequationis Derivatarum partialium superficiei, cuius in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sunt signoque contrario." Archiv der Mathematik und Physik. Bd. 4, S. 290. Greifswald 1844.

M. Roberts, „Mémoire sur la surface dont les rayons de courbure sont égaux, mais dirigés en sens opposés." Journal de Liouville. Ie série, tom. XI, pag. 296. Paris 1846.

J. A. Serret „Note sur la surface réglée dont les rayons de courbure principaux sont égaux et dirigés en sens contraires." Liouvilles Journal. Tom. XI pag. 451. Paris 1846.

M. Chasles, „Théorème général sur la description des lignes de courbure de surface du second degré." Comptes rendus. Tome XXII. Paris 1846 u. „Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré." Journal de Liouville. Tom. XI, pag. 5. Paris 1846.

F. Minding, Crelles Journal Bd. 44, Jahrg. 1852. S. 66 u. Bd. 86, S. 279.

Ossian Bonnet, „Note sur la théorie générale des surfaces." Comptes rendus. Tom. 37, pag. 529. Paris 1853. „Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation intégrale des surfaces minima." Comptes rendus. Tom. 40, pag. 1107. Paris 1855. — „Observations sur les surfaces minima." Ibid. Tom. 41, pag. 1057. Paris 1855. — „Nouvelles remarques sur les surfaces à aire minima." Ibid. Tom. 42, pag 532. Paris 1856. — S. a.: „Mémoire sur la théorie générales des surfaces." Journal de l'École polytechnique. Tom. 19, pag. 17 und Journal de Liouville. Tom. XII, pag. 294. Paris 1847; ferner Tom. V, IIe série 1860, pag. 174, 227, 228. — Die Preisschrift: „Mémoire sur la théorie des surfaces applicables à une surface donnée" (1860). Journal de l'École polytechnique. Cah. 42, pag. 7—15. Paris 1867. — „Sur la surface réglée minima." Bulletin des Sciences mathématiques, redigié par M. G. Darboux, J. Hoüel et J. Tannery. Paris 1885. — Vergl. a.: J. H. Jellet, „Sur la surface dont la courbure moyenne est constante." Journal de Liouville. Tom. 18, pag. 163.

F. Joachimsthal, „Demonstratio theorematum ad superficies curvas spectantium." Crelles Journal, Bd. 30. S. 347. Berlin 1846. — „Wenn irgend eine beliebige Begrenzung gegeben ist, die Fläche durchzulegen, welche den kleinsten Flächeninhalt hat." Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung. (Vorlesungen an der Universität zu Breslau, gehalten im Wintersemester 1856—57). III. Auflage von L. Natani. Leipzig 1890. S. 205. — S. a.: „Sur les surfaces courbes." Progr. des Collège Royal Français. Berlin 1848.

Todhunter, History of the Progress of the Calculus of Variations. Cambridge and London, 1861.

Lindelöf et Moigno, Calcul des variations. Paris 1861, pag. 209—212. — L. Lindelöf, Leçons de calcul des variations. Paris 1861, pag. 204—214. — „Sur les limites entre lesquelles le caténoide est une surface minima," par L. Lindelöf. Acta societatis scientiarum Fenicae, tomus IX. Helsingfors 1871. (S. a. Math. Annalen, Bd. II, S. 160. Leipzig 1870).

E. Bour, „Théorie de la déformation des surfaces." Mémoire couronné par l'Académie des Sciences. Paris 1860. Journal de l'École polytechnique. Cah. 39, pag. 97, 114. Paris 1862.

Dr. A. Weiler, Die allgemeine Gleichung der Minimumsflächen. Archiv der Mathematik und Physik. 38. Theil, S. 356. Greifswald 1862.

Mathet, „Étude sur une certain mode de génération des surfaces d'étendue minimum." Journal de Liouville. Tom. 8, pag. 323. Paris 1863.

E. Lamarle, „Exposition géométrique du calcul différentiel et intégral." (Mémoires couronnées et autres mémoires publiés par l'Académie de Belgique. Tome XV, pag. 576. Bruxelles 1863.

A. Enneper, „Analytisch-geometrische Untersuchungen." Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. 9, S. 96 u. 377. Leipzig 1864. — „Die cyclischen Flächen." Ibid. Bd. 14, S. 393, Jahrg. 1869 u. Göttinger Nachrichten. Jahrg. 1866—68, S. 243, 232, 277, 258 u. 423 und Jahrg. 1871. S. 14—23. — „Über Flächen mit besonderen Meridiancurven." Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 29, S. 49—50. Jahrg. 1883.

E. Beltrami, „Risoluzione di una problema relativo alla teoria delle superficie gobbe." Annali di Matematica pura ed applicata da Tortolini. Tomo VII, pag.

105. Roma 1865. — „Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima." Memorie dell' Academia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Tom. VII, Serie II, 1868.

U. Dini, „Sulle superficie gobbe etc." Annali di Matematica da Tortolini. Tomo VII, pag. 205. Roma 1865. S. f. Annali di Mat. II. Serie, Tom. I—IV, Roma 1867—71 u. Atti della Società Italiana delle Scienze. 1868—69, sowie Annali dell' Università di Pisa. 1869.

L. Bianchi, „Ricerche sulle superficie elicoidali." Battaglini Giornale. Tom. 17, pag. 9—40. Napoli 1870. — „Lezioni di geometria differenziale." Pisa 1886. S. a.: Annali di Mat. u. Rendiconti dell' Accademia delle Scienze di Napoli. — Mathem. Annalen, etc.

Gaston Darboux, „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires." Mémoire de la Société des Sciences de Bordeaux. Tom. VIII, pag. 291—350 et tome IX, pag. 1—280. Paris—Bordeaux 1870—73. S. a.: Annales de l'École normale, Paris 1866, Pag. 110 und Bulletin des Sciences mathématiques, redigiés par M. G. Darboux, J. Hoüel et J. Tannery. — S. insb. „Les surfaces minima." Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Cours de Géométrie de la Faculté des Sciences faites à la Sorbonne pendant les hiver de 1882 à 1885 par Gaston Darboux. Ie Partie, pag. 267—506. Paris 1887.

B. Riemann, „Über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung." Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 13, S. 6, Jahrg. 1867 (Manuscript 1860 u. 1861). S. a. B. Riemanns Gesammelte Werke, herausg. von H. Weber. S. 283 u. 417. Leipzig 1876.

K. Weierstrass, „Über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist." Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1866. S. 612—625. (Mitgetheilt im mathem. Seminar der Universität Berlin 1865). — „Über eine besondere Gattung von Minimalflächen." Ibid. Jahrg. 1867. S. 511.

H. A. Schwarz, „Über die Minimalfläche, deren Begrenzung als ein von vier Kanten gebildetes räumliches Vierseit gegeben ist." Monatsberichte der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1865, S. 149-153. — „Bestimmung einer speciellen Minimalfläche." Eine von der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 4. Juli 1867 gekrönte Preisschrift. (Abdruck, Berlin 1871). — „Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen." Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1872, S. 3—27. — „Über ein Modell eines Minimalflächenstückes, welches längs seiner Begrenzung vier gegebene Ebenen rechtwinkelig trifft." Ibid. Jahrg. 1872, S. 122—123. — „Beitrag zur Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhalts von Minimalflächenstücken im allgemeinen und von Theilen der Schraubenfläche im besonderen." Ibid. Jahrg. 1872, S. 718—735. — „Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen." Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. XIX. Jahrg. S. 243—271. S. a. Crelles-Borchardts Journal, 80. Bd. S. 280—300. Berlin 1875. — „Über diejenigen Minimalflächen, welche von einer Schar von Kegeln zweiten Grades eingehüllt werden." Ibid. Bd. 80, S. 301—314. — „Über einige nicht algebraische Minimalflächen, welche eine Schar algebraischer Curven enthalten." Crelle-Borchardts Journal. Bd. 87, S. 146—160. Berlin 1879. — „Sur les surfaces à courbure moyenne nulle sur lesquelles on peut limiter une portion finie de la surface par quatre droites situées sur la surface." Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome 96, pag. 1011. Paris 1883. — „Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhaltes betreffendes Problem der Variationsrechnung." Festschrift zum 70. Geburtstage des Herrn Karl Weierstrass.

(Acta societatis scientiarum Fennicae. Tomus XV, pag. 315—362. Helsingfors 1885. — „Über specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen, als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke." Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 34. Vorgelegt am 2. Juli 1887. — S. a.: H. A. Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen. Herrn Geheimen Regierungsrath, Prof. Ernst Eduard Kummer zum 80. Geburtstag (29. Jänner 1890) in Verehrung und Dankbarkeit zugeeignet. II Bde., I. Bd. S. 1—338. Berlin 1890.

E. B. Christoffel, „Über einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen." Crelles Journal. Bd. 67, S. 218 - 228. Berlin 1867.

K. Peterson, „Über Curven und Flächen." Moskau und Leipzig 1868. S. 66. u. 72.

A. Schondorf, „Über die Minimalfläche, deren Begrenzung von einem doppeltgleichschenkligen räumlichen Viereck gebildet wird." Ein von der philosophischen Facultät der Georgia Augusta am 4. Juni 1867 gekrönte Preisschrift. Göttingen 1868. S. 8. — (Vergl. Die Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle. 1869 S. 12).

C. F. Geiser, „Notitz über die algebraischen Minimalflächen." Mathem. Annalen. Bd. III, S. 530—534. Leipzig 1871.

Harwitz, „Bestimmung einer speciellen Minimalfläche." Berlin 1871.

Gromen, Ibid. Berlin 1871.

R. Lipschitz, „Über eine Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen." Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissensch. Jahrg. 1871, S. 361 und Crelles Journal. Bd. 78, S. 1—45. Berlin 1874.

J. Plateau, „Statique expérimentale et théorique des Liquides soumis aux seules forces moléculaires." Gand, Leipzig 1873. Tom. I, pag. 229. — „Recherches expérimentales et théorique sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur." Mémoires de l'Académie royale de Belgique. Tome 33—37. Bruxelles 1860—68. (S. a. Correspondance math. et physique).

S. Lewänen, „Über die von einer Geraden erzeugte Minimalfläche." Zeitschrift für Mathematik und Physik. 18. Jahrg. S. 423. Leipzig 1873.

L. Henneberg, „Über solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben." Inaugural-Dissertation. Zürich 1875. — „Über diejenige Minimalfläche, welche die Neilsche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat." Wolfs Zeitschrift (Vierteljahrsschrift d. Naturforsch. Gesellschaft), Bd. 21, S. 17 - 21. Zürich 1876. — S. a. die Bestimmung der niedrigsten Classenzahl der Minimalflächen in den Annali di Matematica pura ed applicata. II^a Serie, tomo 9, pag. 54.

A. Herzog, „Bestimmung einiger speciellen Minimalflächen." Inaugural-Dissertation Zürich 1875. — S. a. Vierteljahrsschrift (Wolfs Zeitschrift) der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 20. Bd. Jahrg. 1875.

Lebrecht, Ibid. Zürich 1875.

A. Cayley, „On a special surface of minimum area." The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Vol. 14, pag. 190—196. London 1876. — „Sur les surfaces minima et le théorème de Joachimsthal." Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris. Tome 106, pag. 995. 1888.

R. Hoppe, „Kleinste Flächen" und „Kleinste Flächen bei constantem Volumen." Principien der Flächentheorie. S. 62 und 69. Leipzig 1890. — S. a. Archiv der Math. u. Physik. Bde. 59 u. 60.

S. Pincherle, „Sopra alcuni problemi relative alle superficie d'area minima." Rendiconti dell' Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Tomo 9, pag. 444—456. Milano 1876. „Nota sulle superficie d'area minima." Battaglini Giornale matematiche. Tomo 14, pag. 75. Napoli 1876.

Sophus Lie, „Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen." Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Christiania 1877—79 und 1882. Bd. I—IV u. VII. — Forhandlingar i Videnskab-Selskabet i Christiania. Jahrg. 1877—78. Mathem. Annalen, Bde. 14, 15 u. 20 Leipzig 1879 u. 1882. — S. a. Lie-Scheffers, Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig 1891. S. 156—162, 169—181. S. a. d. Sitzungsberichte der königl. Gesellschaft der Wissensch. zu Leipzig 1892, etc. u. „Geometrie der Berührungstransformationen." Leipzig 1896.

Van der Mensbrugghe, „Discussion et réalisation experimentale d'une surface particulière à courbure moyenne nulle." Bulletins de l'Académie royale de Belgique. Bruxelles, 35e année, IIe série, tome 21, pag. 552—566.

L. Kiepert, „Über Minimalflächen." Crelle-Borchardts Journal, Bd. 81, S. 337. Berlin 1876 u. Bd. 85, S. 171. Berlin 1878. S. a d. Bericht der Naturforsch. Gesellschaft zu Freiburg. VII. Bd.

J. A. Becker, „Untersuchungen aus dem Gebiete der Minimalflächen." Zwickau 1877.

Bockwoldt, Inaugural-Dissertation. Göttingen 1878.

C. Schilling, „Die Minimalfläche fünfter Classe." Inaugural-Dissertation. Göttingen 1880.

George Salmon, Analytische Geometrie des Raumes, Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. II. Theil, III. Auflage. — Leipzig 1880: „Über Minimalflächen." Literatur-Nachweisungen und Zusätze. S. XIX—XXXIV. (I. Capitel. II. Abschnitt), und S. 43—90. — S. a. das Capitel „Minimalflächen" in dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann, herausgegeben von E. Lampe. Bd. I—XXIV. Berlin 1868—1895.

E. Laguerre, „Géométrie de position." Paris 1880 u. Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1881.

A. Ribaucour, „Études des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle." Mémoire couronnée par l'Académie de Belgique. Mémoires des Savants étrangers. Tome 44. Bruxelles 1881.

Ed. Neovius, „Détermination de deux surfaces spéciales périodiques à courbure moyenne nulle, qui contiennent un nombre infini de lignes droites et en même temps un nombre infini de courbes géodésiques plans." Akademiens Afhandlingar. Helsingfors 1883. — Vergl. a. Comptes rendus. Tome 96, pag. 1011. Paris 1883.

O. von Lichtenfels, „Notiz über eine transcendente Minimalfläche." — Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. II. Abth. 94. Bd. S. 41, Jahrg. 1886.

R. von Lilienthal, „Über Minimalflächen, welche durch elliptische Integrale darstellbar sind." Kronecker-Weierstrass Journal. Bd. 99, S. 179. Berlin 1886. — S. a.: „Zur Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen." Mathem. Annalen. Bd. 30, S. 1—14. Leipzig 1887.

J. Weingarten, „Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des andern ist." Crelles Journal. Bd. 62, S. 160. Berlin 1863. — „Über die durch eine Gleichung von der Form $X + Y + Z = 0$

darstellbaren Minimalflächen." Nachrichten der königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. Jahrg. 1887. S. 272—275. — S. a.: „Über die Differentialgleichung der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden können." Sitzungsberichte der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1883. — „Über die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen." Festschrift der königl. tech. Hochschule zu Berlin 1884. — Über particuläre Integrale der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ und eine mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängende Gattung von Flüssigkeitsbewegungen." Göttinger Nachrichten. Jahrg. 1890, S. 313—335. — S. a. Fuchs-Weierstrass Journal. Bd. 103, S. 184. Berlin 1888.

F. Bohnert, „Bestimmung einer speciellen periodischen Minimalfläche, auf welcher unendlich viele gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische Linien liegen." Inaugural-Dissertation. Göttingen 1888.

J. Vivanti, „Über Minimalflächen." Zeitschrift für Mathematik und Physik XXXIII. Jahrg., S. 137—153. — Leipzig 1888.

J. Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Leipzig 1888. „Minimalflächen." S. 182 und 234.

B. Niewinglowski, „Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima de contour donné." Annales de l'École normale. IIe Série, Tome 9, pag. 227. Paris 1880. — „Sur une surface minima réelle." Nouvelles Annales mathém. IIIe Série. Tome 7, pag. 391. Paris 1888.

R. Sturm, „Reingeometrische Untersuchungen über Minimalflächen." Crelle-Fuchs Journal. Bd. 105, S. 101. Berlin 1889.

Hjalmar Tallqvist, „Construction eines Modelles einer speciellen Minimalfläche." Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. Bd. 31.

E. Picard, „Sur la détermination des intégrales de certain équations aux dérivées partielles par leurs valeurs sur un contour". Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris. Pag. 499. 1889. — Vergl. a. „Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre." Acta mathematica. Tome XII, pag. 323-338. Stockholm 1889.

L. Raffy, Sur la rectification des cubiques planes unicursales." Annales de l'École Normale. Paris 1889.

A. Schoenflies, „Sur les surfaces minima limitées par quatre crêtes d'un quadrilatère gauche." Comptes rendus. Tome 112, pag. 478. Paris 1891. — „Sur les équations de deux surfaces minima périodiques possédant la symmetrie de l'octaèdre." Ibid. pag. 515. Paris 1891.

G. Kopp, „Sur les maxima et les minima des intégrales doubles." Acta mathematica. Vol. XVI, pag. 65. Stockholm 1892.

F. Klein, „Minimalcurven und conforme Abbildung" und „Lies Theorie der Minimalflächen." Einleitung in die höhere Geometrie. (Vorlesung gehalten im Wintersemester 1892—93 an der Universität zu Göttingen.) Göttingen 1893. I. Th. S. 362 und 369. — „Riemannsche Flächen." (Vorlesung gehalten während des Sommersemesters 1891—92 an der Universität zu Göttingen.) Göttingen 1894. S. 188—200.

H. Stahl und V. Kommerell, Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie: „Anwendung auf Minimalflächen." S. 60-79. Leipzig 1893.

A. Voss, „Über isometrische Flächen." Mathematische Annalen. Bd. 46, S. 97-132. Leipzig 1895. — S. a. „Über ein neues Princip der Abbildung krummer Flächen." Ibid. Bd. 19, S. 1—27, Leipzig 1882 u. „Über conforme Abbildung." Ibid. Bd. 46, S. 138—143. Leipzig 1895.

Luigi Bianchi, Lezioni di Geometria differenziale. (Superficie d'area minima). Pag. 337—395. Pisa 1894. (Deutsch von Lukat, Leipzig 1895).

Diese fast ausschließlich wertvollen Abhandlungen und Werke zeigen uns in glänzender Weise, was Monges genialer Geist in seinen bahnbrechenden Forschungen schon vor hundert Jahren für die Begründung der Infinitesimalgeometrie geschaffen hatte. Schon im Jahre 1816 hatte Gergonne in seinen Annalen (Tom. VII, pag. 68) die Aufmerksamkeit der Geometer auf die Aufgabe gelenkt, durch eine geschlossene Linie eine Minimalfläche zu legen, auf welcher dieselbe ein in seinem Inneren von singulären Stellen freies, einfach zusammenhängendes Flächenstück begrenzt. Diese Frage kann — von den ebenen Curven abgesehen — bis zur Gegenwart als noch nicht gelöst betrachtet werden, und es ist bisher noch nicht entschieden worden, ob es für eine Grenzlinie nur ein oder mehrere Flächenstücke gibt, welche — in ihrem Inneren von singulären Stellen frei — unter allen unendlich benachbarten Flächenstücken den kleinsten Inhalt besitzen. Jacob Steiner hat im Jahre 1840 seine diesbezüglichen und zusammenhängenden Untersuchungen der Berliner Akademie der Wissenschaften (S. diese Monatsberichte S. 118) und im Jahre 1841 der Pariser Akademie der Wissenschaften vorgelegt und in diesen auch in Crelles Journal, Bd. 24, S. 111, Jahrg. 1842 veröffentlichten Arbeiten gefunden, dass bei passender Wahl des rechtwinkeligen Coordinatensystemes die eine Coordinate eine Function der beiden anderen ist. Seine gründlichen Untersuchungen führten zu dem interessanten Satze: „Unter allen zu einem Minimalflächenstücke aequidistanten Flächenstücken besitzt das Minimalflächenstück selbst nicht den kleinsten, sondern den größten Flächeninhalt."

E. Catalan bewies im Journal von Liouville (Paris 1842), dass die einzige reelle Minimalfläche, welche durch die rotierende Bewegung einer Geraden erzeugt wird, die windschiefe Schraubenfläche (l'hélicoïde à plan directeur) ist; er veröffentlichte im Jahre 1855 in den Comptes rendus eine Transformation des Mongeschen Integrales, welche ganz frei von imaginären Größen war und construierte (s. Journal de l'École polytechnique. Cah. 37, pag. 160. Paris 1858) eine Minimalfläche, deren geodätische Linie eine Parabel ist.

Bertrand (1844), M. Serret (1846), M. Chasles (1846) und M. Roberts setzten diese Untersuchungen fort, lieferten Beweise für die windschiefe Schraubenfläche als Minimalfläche und untersuchten in eingehender Weise ihre Krümmungsverhältnisse. Insbesondere führte (1846) der letztgenannte Geometer seine Untersuchungen für die allgemeinsten Regelflächen als Minimalflächen mit asymptotischen Coordinaten durch. Der schwedische Mathematiker E. G. Björling gelangte in seiner

Abhandlung: „In integrationem aequationis Derivatarum partialium superficiei, cuius in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sunt signoque contrario (Archiv der Mathematik und Physik, Band IV, S. 290, Greifswald 1844) durch Einführung neuer Variabeln zu einer einfacheren Differentialgleichung der allgemeinen Minimalfläche als der von Legendre aufgestellten, die er nach der Laplaceschen Methode integrierte. F. Minding verfolgte in seinen Entwickelungen (1852) specielle, geodätische Zwecke.

Von großer wissenschaftlicher Tragweite für die Theorie der Minimalflächen waren Ossian Bonnets Forschungen. Der hervorragende Geometer führte in seinen analytischen Untersuchungen (Comptes rendus, Paris 1853 und Liouvilles Journal) statt der gewöhnlichen Punktcoordinaten ein System von Tangentialcoordinaten ein, indem er die sphärische Abbildung der Tangentialebene auf der Kugel benützte und gab durch Einführung dieser Tangentialcoordinaten seiner analytischen Untersuchungen in der Krümmungstheorie Einfachheit und Eleganz. Indem O. Bonnet dieses neue Coordinatensystem auf die Theorie der Minimalflächen anwendete, führte er seine geistreichen Untersuchungen in den Comptes rendus vom Jahre 1855 u. 56 direct und von dem Mongeschen Integrale unabhängig durch, bewies, dass jede Minimalfläche durch ihre beiden Scharen von Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden kann und zeigte, dass bei der conformen Abbildung der Minimalfläche auf eine Ebene den beiden Scharen von Krümmungslinien zwei Scharen von parallelen Geraden und jeder isogonalen Trajectorie der Minimalfläche gerade Linien entsprechen. Er bewies ferner, dass wenn eine Minimalfläche ein System von ebenen Krümmungslinien besitze, das zweite System der Krümmungslinien auch ein ebenes sein müsse.

Professor O. Bonnet in Paris (geb. 1819, gest. 1892) bewies (S. Comptes rendus. Tome 37 pag. 532, Paris 1853 u. Journal de l'École polytechnique Cah. 42, pag. 7—15. Paris (1860) 1867), dass es möglich sei, Theile einer Minimalfläche auf stetige Weise mit einem variabeln Parameter so zu biegen, dass dieselben während der Biegung beständig Minimalflächen bleiben. Jede Schar von Curven, welche die Krümmungslinien der ursprünglichen Fläche unter demselben constanten Winkel schneiden (isogonale Trajectorien), wird bei dieser Biegung einmal zu einer Schar von Krümmungslinien. Es ist daher möglich, mit Ausnahme der Ebene, jede Minimalfläche auf stetige Weise so zu biegen, dass sie während der Biegung Minimalfläche bleibt.

Jeder Punkt der Minimalfläche beschreibt während der Biegung eine Ellipse, wenn ein Punkt der Fläche festgehalten wird. Dieser festgehaltene Punkt ist der Mittelpunkt aller von den verschiedenen Punkten während der Biegung beschriebenen Ellipsen. Diese Biegung ist die einzige, bei welcher die Minimalflächen Minimalflächen bleiben.

Ossian Bonnet begründete die Theorie der nach ihm benannten adjungierten Biegungsflächen, bei welchen die Krümmungslinien der Minimalflächen in Asymptotenlinien übergehen und umgekehrt; er war auch der erste Mathematiker, der mit Erfolg complexe Variable bei seinen Forschungen in der Theorie der Minimalflächen verwendete.

Nach diesen für die allgemeine Krümmungstheorie der Flächen bahnbrechenden Forschungen O. Bonnets war das Bestreben der Mathematiker in der Theorie der Minimalflächen dahin gerichtet, die Minimalflächen aus der Bedingung analytisch zu bestimmen, dass eine vorgeschriebene ebene Curve eine Krümmungslinie derselben sein solle. E. Catalan (1855), E. Beltrami (1868), U. Dini (1865—71) u. Bianchi (1870) führten Bonnets Untersuchungen unter Anwendung von Parametern, welche den Scharen der Haupttangenten- oder conjugierten Curven und orthogonalen Trajectorien entsprechen, weiter und schufen eine Reihe von wertvollen Theoremen in der Krümmungstheorie der Flächen. Insbesondere dehnte Dini seine Untersuchungen auf Regelflächen aus und bewies (1867) im Anschluss an O. Bonnets Untersuchungen, dass die einfachen Rotationshyperboloide die einzigen Regelflächen mit ebenen Krümmungslinien sind; er untersuchte ferner mit Hilfe orthogonaler Curvensysteme auf der Kugel krumme Flächen, die ein System sphärischer Krümmungslinien enthalten.

Im Jahre 1861 wurde die für die Theorie der Minimalflächen wichtige „Théorie de la déformation des surfaces", welche den berühmten französischen, leider vom Tode so bald entrissenen Mathematiker E. Bour zum Begründer hatte, von der Akademie der Wissenschaften in Paris preisgekrönt. (S. a. Journal de l'École polytechnique, tome XXII, cah. 39, pag. 99—109. Paris 1862). In derselben untersuchte Bour (1832—1866) die auf Rotationsflächen abwickelbaren, also auch stetig in sich selbst verbiegbaren Minimalflächen.

Höchst schätzenswerte Untersuchungen auf dem Gebiete der Minimalflächen verdanken wir deutschen Mathematikern. Unter den genannten Forschungen über Minimalflächen erlauben wir uns auf die durch ihre Eleganz berühmten Entwickelungen von B. Riemann[1]),

[1]) Göttinger Nachrichten XIII. Bd. 1867 u. Gesam. Werke S. 283 u. 417. (Anmerkung: Riemanns Manuscript stammt aber aus den Jahren 1860 u. 61).

K. Weierstrass[1]), A. Schwarz[2]) und Sophus Lie[3]) besonders hinzuweisen. Riemann und Weierstrass erweiterten Bonnets Verfahren durch ihre erschöpfenden und eleganten Methoden, bei welchen sie Minimalcurven, die zugleich ein System von Isothermen bilden und durch Translation die Minimalfläche erzeugen, zugrunde legten; ihre berühmten Forschungen fanden darin ihren Abschluss, dass sie alle algebraischen Minimalflächen von gegebener Classe bestimmten.[4])

---

[1]) Monatsberichte der Berliner Akademie dor Wissenschaften, S. 612, 855, 1866; ibid S. 511, 1867.

[2]) Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften. S. 149, 1865. — Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. (Monogr.) Berlin 1871. — Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen. — Ferner Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1872, S. 3 u. 718 und Crelle-Borchardts Journal für die reine und angewandte Math. Bd. 80, S. 301, 1875 und Bd. 87, S. 146, 1879. S. a.: Sur les surfaces à courbure moyenne nulle sur lesquelles on peut limiter une portion finie de la surface par quatre droites situées sur la surface. Comptes rendus. Tom. 96, pag. 10, 11. Paris 1883.

[3]) S.: Lies Abhandlungen in der Fortsetzung dieses Werkes.

[4]) Dr. G. F. B. Riemann, der Begründer der Theorie der Abelschen Functionen, wurde am 17. September 1826 zu Breselenz in Hannover geboren. Sein Vater, Friedrich Bernhard Riemann, war Prediger auf der Pfarre Quickborn und hatte als Lieutenant unter Wallmoden an den Befreiungskriegen theilgenommen. Sein berühmter Sohn Bernhard, der sich schon als fünfjähriges Kind lebhaft für Geschichte interessierte, besuchte 1840—42 das Lyceum in Hannover, 1842—46 das Johanneum in Lüneburg und bezog im Jahre 1846 die Universität Göttingen, wo er sich dem Wunsche seines Vaters entsprechend zuerst als Studiosus der Philologie und Theologie inscribieren liess. Seiner Vorliebe für Mathematik entsprechend, besuchte er zugleich die mathematischen Vorlesungen bei Gauss, Stern und Goldschmidt. Seine grenzenlose Liebe zu diesen Studien erwirkte ihm bald von seinem Vater die Erlaubnis, sich ganz den mathematischen Wissenschaften widmen zu dürfen.

Da stud. Bernhard Riemann seinen Wissensdurst in Göttingen nicht mehr zu befriedigen glaubte, so bezog er zu Ostern des Jahres 1847 die Universität zu Berlin, wo Jacobi, Lejeune Dirichlet und Steiner durch den Glanz ihrer Entdeckungen, welche sie zugleich zum Gegenstande ihrer Vorlesungen machten und eine große Zahl von Studierenden in ihren Collegien vereinten. Hier widmete er sich durch zwei Jahre seinen Studien über Zahlentheorie, Theorie der bestimmten Integrale und der partiellen Differentialgleichungen bei Dirichlet, analytische Mechanik und höhere Algebra bei Jacobi, neuere Geometrie bei Jacob Steiner und Theorie der elliptischen Functionen bei Eisenstein. Die politischen Ereignisse des Jahres 1848 ergriffen auch unseren genialen Mathematiker mit Macht und führten ihn bei der März-Revolution als Mitglied des akademischen Studentencorps am 24. März als Wachposten vor das königliche Schloss. Zu Ostern 1849 kehrte Riemann wieder nach Göttingen zurück, besuchte bei Prof. Wilh. Weber Vorlesungen über Experimental-Physik, legte daselbst 1851 der philosophischen Facultät seine Doctor-Dissertation über die „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe" vor, die besonders bei Gauss eine sehr

Die beiden letztgenannten Forscher projicierten die Linienelemente der Minimalcurven stereometrisch auf die Kugel und transformierten die

---

anerkennende Beurtheilung fand. Im Jahre 1853 wurde Riemann Assistent bei Prof. W. Weber, habilitierte sich im folgenden Jahre (1854) als Privatdocent, las 1855—56 vor einem dreigliederigen Collegium (Schering, Bjerknes und Dedekind) über die Theorie der Abelschen Functionen, wurde 1857 zum außerordentlichen und 1859, nach Dirichlets Tode (5. Mai 1859) zum ordentlichen Professor der höheren Mathematik an der Universität zu Göttingen ernannt. Nur wenige Jahre sollte es diesem berühmten Gelehrten, der sich nach Gauss Tode (23. Februar 1855) mit einer Remuneration von 200 Thalern und als außerordentlicher Professor mit 300 Thalern begnügen musste, gegönnt sein, die Früchte seines rastlosen Fleißes zu genießen. Professor Bernhard Riemann, den die Akademien der Wissenschaften von München, Paris und London zu ihrem Mitgliede erwählt hatten, starb auf seiner Erholungsreise am 20. Juli 1866 in Selasca bei Intra am Lago Maggiore, bevor er noch sein vierzigstes Lebensjahr erreicht hatte. (S. „Bernhard Riemanns Lebenslauf" in seinen „Gesammelte mathematische Werke", herausgegeben von H. Weber. Leipzig 1876. S. 507—526). —

Der größte Mathematiker der Gegenwart und Begründer unserer modernen Functionen-Theorie, Herr Prof. Dr. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, Ehrenmitglied der Akademien der Wissenschaften zu Berlin, Wien, etc., wurde am 31. October 1815 zu Ostenfelde im Regierungsbezirk Münster in Westphalen geboren. Er besuchte 1829 — 34 das Gymnasium zu Paderborn, studierte dann an der Universität Bonn Cameralwissenschaften, betrieb aber in seinen Mußestunden ausgedehnte mathematische und physikalische Studien, denen er sich von 1839—40 an unter der Leitung Prof. Gudermanns an der Akademie zu Münster ganz widmete. Nachdem er dort im Sommer 1841 seine Prüfung pro facultae docendis abgelegt hatte, wurde er 1842 als Lehrer an das ehemalige Progymnasium zu Deutsch-Crone berufen, in welcher Stellung er bis 1848 verblieb. Schon im Jahre 1840 verfasste Weierstrass eine größere, auf die Theorie der elliptischen Functionen sich beziehende Abhandlung, in welcher er die von Abel und Jacobi gefundenen Resultate auf strengere Weise und doch mittelst einfacherer Mittel zu begründen suchte — eine wissenschaftliche Arbeit, die die vollste Anerkennung seines Lehrers Gudermann fand — aber erst vor einem Jahre vollständig herausgegeben worden ist. Von Deutsch-Crone wurde Weierstrass als Lehrer der Mathematik und Physik an das Gymnasium zu Braunsberg versetzt, wo er bis zum Jahre 1856 verblieb. Hier fieng er an sich eingehend mit der Theorie der Abelschen Functionen zu beschäftigen, der er auch den größten Theil seines Lebens gewidmet hat. Die ersten Ergebnisse seiner tiefsinnigen Untersuchungen „Zur Theorie der Abelschen Integrale" veröffentlichte Weierstrass in dem Schulprogramm für das Jahr 1849 des Gymnasiums zu Braunsberg, und später im Crelleschen Journal („Zur Theorie der Abelschen Functionen" Bd. 47 u. 52, Jahrg. 1854 u. 1856, S. 289—30 u. S. 285—380), in dessen 51. Band, Jahrg. 1856, S. 1—60 er auch seine „Theorie der analytischen Facultäten" veröffentlicht hatte. Diese wertvollen Publicationen brachten Weierstrass den Ruf als Professor der Mathematik an das damalige königliche Gewerbe-Institut und noch im Herbste des Jahres 1856 als außerordentlichen Professor für Mathematik an die Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin, an welcher er im Herbste des Jahres 1864 zum ordentlichen Professor ernannt wurde.

Coordinaten auf derselben mittelst complexer Variabeln auf die Tangentialebene der Kugel in ihrem Pole. — H. A. Schwarz bestimmte in seiner von der Akademie der Wissenschaften in Berlin im J. 1867 preisgekrönten Abhandlung jene Minimalflächen, auf denen man ein endliches Stück derselben durch ein windschiefes Viereck (Vierseit, gebildet aus vier Kanten eines regulären Tetraeders) begrenzen kann, und fand in der Folge diejenigen Minimalflächen, welche von einer Schar von Kegeln zweiten Grades eingehüllt werden. Ihre Gleichungen können nur durch elliptische Functionen dargestellt werden.

Englands großer Mathematiker Arthur Cayley[1]) (1821—1895) nahm in seiner Abhandlung „On a special surface of minimum area"

Die von Prof. Weierstrass seit dieser Zeit ausgeführten zahlreichen mathematischen Untersuchungen, von denen viele nicht durch den Druck, sondern nur durch seine vielen Zuhörer bekannt wurden, beziehen sich hauptsächlich auf die allgemeine Theorie der analytischen Functionen, speciell auf die Theorie der Abelschen Transcendenten. Einen Theil seiner geistvollen Entwickelungen aus der Functionslehre veröffentlichte Weierstrass in den Monatsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften aus den Jahren 1876, 1880 und 1881, sowie in dem selbständigen Werke „Abhandlungen aus der Functionslehre, Berlin 1886." Die Theorie der Abelschen Transcendenten bildete bis vor kurzem den Gegenstand der äußerst interessanten und vielbesuchten Vorlesungen des greisen Gelehrten, der sie derzeit jedoch wegen schwerer Erkrankung unterbrechen musste. Herr Professor Dr. Weierstrass, dessen Vorlesungen sich durch eine bewundernswerte Klarheit, überraschende und imponierende Einfachheit der zur Anwendung gebrachten Hilfsmittel und durch eine vorher nie erreichte Strenge der Beweisführung auszeichnen, hat im Vereine mit Kronecker (geb. 1823, gest. 1891) und Kummer (geb. 1810, gest. 1893) die mathematischen Wissenschaften an der Berliner Universität in der zweiten Hälfte dieses Jahrhundertes zu einer ungeahnten Höhe gebracht. Der greise Gelehrte ist derzeit trotz seiner schweren Krankheit unter Mitwirkung einer von der Akademie der Wissenschaften in Berlin eingesetzten Commission von Gelehrten mit der Herausgabe seiner Werke beschäftigt, von welchen bereits zwei Bände erschienen sind und weitere zwei Bände demnächst erscheinen werden.

[1]) Englands großer Mathematiker, Arthur Cayley, welcher durch die Begründung der nach ihm benannten Invarianten-Theorie mit Plücker, Hesse, Boole, Sylvester, Salmon, Aronhold, Hermite, Brioschi u. Clebsch zu einem der bedeutendsten Mitbegründer der vor etwa fünfzig Jahren begründeten algebraischen Geometrie wurde, erblickte am 16. August 1821 in Richmond (Surrey) als Sohn des St. Petersburger Kaufmannes Henry Cayley das Licht der Welt. Seine ersten acht Jahre verbrachte er in Russland und trat — nachdem seine Eltern dauernd auf englischen Boden übersiedelt waren — nach Vollendung des 14. Lebensjahres in das Kings-College in London und schon nach drei Jahren in das Trinity-College der Universität zu Cambridge ein. Obwohl Jurist vom Berufe, widmete er doch seine ganzen Mußestunden mathematischen Studien und zwar mit einer solchen Hingebung, dass diese schon seit dem Jahre 1841 begonnenen, mathematisch-literarischen Arbeiten allein vier Bände seiner etwa 12 Bände umfassenden und in der Ausgabe begriffenen

(Quarterly Journal, Vol. XIV, pag. 190 — 196. London 1876) die von A. H. Schwarz in seiner Preisschrift „Bestimmung einer speciellen Minimalfläche" (Berlin 1871) durchgeführten Untersuchungen zum Ausgangspunkte seiner Abhandlung und fand eine Minimalfläche, welche analoge Eigenschaften hat, wie die von Schwarz gefundene. Ebenso bildeten die Joachimsthalschen Theoreme über Minimalflächen den Gegenstand der analytischen Forschungen dieses berühmten Gelehrten. (S. Comptes rendus, Paris 1888. Tom. 109, pag. 995).

J. Vivanti in Mantua gieng in seiner Abhandlung „Über Minimalflächen" (Zeitschrift für Mathematik u. Physik, 33. Jahrg., S. 137—153) unter Hinweis auf die Untersuchungen von Henneberg, Schilling und Darboux von den Weierstrassschen Transcendenten der Minimalflächen aus und machte insbesondere die Digression der Weierstrassschen Doppelflächen, ihre Ordnungs- und Classenzahlen, sowie ihre Singularitäten zum Gegenstande seiner interessanten Untersuchungen.

Das jüngste uns vorliegende schöne Werk „Lezioni di Geometria differenziale, Pisa 1894" di Luigi Bianchi, Professore ordinario di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, (deutsch von Lukat,

---

„Gesammelten Werke" ausmachen. Mit J. Sylvester auf das innigste verbunden, begründete er mit diesem im Jahre 1857 das berühmte Quarterly Journal an Stelle des Cambridge Mathematical Journal (begr. 1841) und des Cambridge and Dublin Mathematical Journal (begr. 1846). Ein ebenso inniges Freundschaftsverhältnis verband die beiden Gelehrten mit G. Salmon. Im Jahre 1852 zum Mitgliede der London Royal Society und 1863 zum corresp. Mitgliede der Pariser Akademie der Wissenschaften ernannt, übernahm Cayley im Jahre 1863 die neugegründete Sadlerian-Professur an der Universität zu Cambridge. Seine zahllosen, wissenschaftlich wertvollen Abhandlungen finden wir in fast allen akademischen Sitzungsberichten, Denk- und Zeitschriften des Continentes und davon allein gegen 900 in der Cambridge University Press. A. Cayley, der fast bis an sein Lebensende zu den besten und eifrigsten Mitarbeitern des Crelle-Borchhardt-Weierstrassschen Journales für die reine und angewandte Mathematik in Berlin gehörte, beschloss am 26. Jänner 1895 nach langem Leiden sein in selbstloser Pflichterfüllung verbrachtes Leben. Seine mathematische Gedankenarbeit, reich an selbständigen und bahnbrechenden Ideen, die uns hauptsächlich in seinem „Memoirs upon Quantics" (Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1856, 57, etc.), sowie in seinen zahllosen Abhandlungen und den seit 1889 erschienenen 7 Bänden seiner „Gesammelten Werke" vollständig aufgeschlossen erscheint, bietet der modernen mathematischen Forschung wertvolle und unvergängliche Resultate, sowie fortwirkende und weiterschaffende Anregungen für den weiteren Ausbau der mathematischen Wissenschaften. (S.: „Arthur Cayley" von A. R. Forsyth in dem Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 58, 1895 und Mathematical Papers. Vol. VIII. London 1895, sowie „Arthur Cayley" von M. Noether in den „Mathematische Annalen" Bd. 46, S. 462—480. Leipzig 1895).

Leipzig 1895) geht (pag. 337—395) nach einem historischen Rückblick von den Weierstrassschen Transcendenten der Minimalflächen aus, behandelt die algebraischen Minimalflächen und die Doppelflächen, untersucht hierauf die Minimalflächen als Deformationsflächen, associerte und conjugierte Flächen, sowie jene Minimalflächen welche ebene Krümmungslinien besitzen und wendet die Theorie auf Rotationsflächen und auf Schraubenflächen an. Den weiteren Ausgangspunkt für die Theorie der Biegungsflächen bilden die Formeln von H. A. Schwarz und es werden geistreiche Kriterien aufgestellt, welche erkennen lassen, ob eine gegebene Fläche durch Biegung in eine Minimalfläche verwandelt werden könne. Das nächste Capitel (S. 362—395) beschäftigt sich mit dem Probleme von Plateau und den Schwarzschen Minimalflächen und bringt eine äußerst interessante gruppentheoretische Untersuchung über Bewegungen im Raume, welche die Schwarzschen Minimalflächen invariant lassen, sowie die Theoreme von Schwarz über die zweite Variation von Theilen der Minimalflächen.

Hatte also Poisson [1]) noch im Jahre 1832 in dem eines Weltrufes sich erfreuenden Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle kühn behauptet, das Integral seines Meisters, das nach unseren Begriffen als der analytische Repräsentant aller reellen und imaginären Familien von Minimalflächen betrachtet werden muss, sei „malheuresement inacceptable“, so kamen in den letzten Jahrzehnten die größten Mathematiker auf das von Monge aufgestellte Integral der allgemeinen Minimalfläche zurück und schufen die schönsten Theoreme der Minimaltheorie. Schon im Jahre 1863 hatte Deutschlands größter Mathematiker der Gegenwart, Herr Prof. Dr. Weierstrass, den Mongeschen Begriff der Flächenfamilien auf die Minimalflächen ausgedehnt. Die ehrenvollste Würdigung erfuhren aber die Forschungen von Monge durch einen der berühmtesten Gelehrten der Gegenwart, Herrn Sophus Lie, früher Professor der höheren Geometrie an der Universität in Christiania, jetzt in Leipzig, dessen Genie und außerordentlicher Arbeitskraft wir geradezu wunderbare Integrationsmethoden, die elegantesten Transformationen und Interpretationen auf dem Gebiete der Infinitesimalgeometrie, ferner die pentasphärische Geometrie und

[1]) „Malheureusement on ne saurait tirer aucune partie de cette intégrale qui se trouve compliquée de quantités imaginaires, et exprimée par le système de trois équations entre deux variables auxiliaires et les coordonnées courantes de la surface. Mais outre la difficulté, qui résulte de cette formule de l'intégrale dans laquelle il parait au moins très difficile de déterminer les fonctions arbitraires, il s'en présente une autre relative au nombre de ces fonctions que la question peut comporter.“ (Poisson, membre de l'Académie de Sciences à Paris).

die Theorien der Berührungstransformationen, der endlichen und unendlichen continuirlichen Transformationsgruppen verdanken.[1])

Diese epochemachenden Forschungen von Lie müssen entschieden als die glänzendste Huldigung bezeichnet werden, welche dem Genius des Begründers der Infinitesimalgeometrie nach hundertjährigem Bestande seiner grundlegenden Theoreme dargebracht wurden. Dem berühmten norwegischen Gelehrten — einem ebenbürtigen Landsmann des den mathematischen Wissenschaften unmittelbar vor seiner Berufung an die Universität in Berlin durch den Tod so früh entrissenen Niels-Henrik Abel[2]) — war es schon vor mehr als zwei Decennien gelungen, mit der von ihm begründeten Theorie der pentasphärischen Coordinaten[3]) die Mongeschen Krümmungslinien auf einer gegebenen Fläche in die asymptotischen Linien einer zugeordneten Fläche zu transformieren, erstere aus den letzteren — und umgekehrt — zu finden und durch eine merkwürdige Berührungstransformation gerade Linien in Kugeln zu verwandeln. Durch die consequente Erweiterung des Mongeschen Begriffes der Charakteristik hat Lie unter Benützung

---

[1]) S: Sophus Lie, Theorie der Transformationsgruppen. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet. I.—III. Abschnitt, Leipzig 1888, 1890, 1893. — Sophus Lie, Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen mit bekannten, infinitesimalen Transformationen. Bearb. u. herausg. von Dr. G. Scheffers. Leipzig 1891. — Sophus Lie, Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, Leipzig 1893 und Geometrie der Berührungsformationen, Leipzig 1895.

Anmerkung: Herr Prof. S. Lie hat die Ergebnisse seiner Forschungen zuerst in den folgenden Zeitschriften veröffentlicht: Forhandlingar i Videnskab — Selskabet i Christiania 1869—75, 1882—88, etc. — Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris 1870, 1892, etc. — Nachrichten von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Auguste-Universität zu Göttingen 1870—74. — Mathematische Annalen, Leipzig 1871—88. — Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Christiania 1876—85. — Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 1886-95. — S. a.: S. Lie, Über eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie. Crelles Journal, Berlin 1869, Bd. 70, S. 346. — Universitätsprogramm, Christiania 1889.

[2]) S.: Crelles Journal. Berlin 1826-29. Bde. I—IV etc. u. Oeuvres complètes de Niels-Henrik Abel. Nouvelle édition publiée aux frais de l'État Norvégien par L. Sylow et. S. Lie. 1881. S. a.: C. A. Bjerknes, Niels-Henrik Abel, sa vie et son action scientifique. (Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux, 3e série, tom. I, Paris 1884, pag. 1—368.

[3]) Vergl.: S. Lie, Über Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendungen auf die Theorie partieller Differentialgleichungen. Math. Annalen, Leipzig 1872, Bd. V. S. 145.

Vergl.: „Les Coordonnées pentasphériques." G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris 1887. Tom. I, pag. 213—233.

der einfachsten Theoreme der modernen Mannigfaltigkeiten die Theorie der partiellen Differentialgleichungen bedeutend erweitert und mittelst infinitesimalen Transformationen und der Theorie des Integrabilitätsfactors die Krümmungslinien, Trajectorien, Isothermen, Minimalcurven etc. beliebiger Flächen bestimmt. Herr Professor Sophus Lie, der seit dem Jahre 1886 auf deutschem Boden wirkt, hat seine interessanten Untersuchungen über algebraische Minimalflächen, denen die Theorie der Berührungstransformationen zugrunde liegt, im zweiten, vierten und siebenten Bande der Zeitschrift Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Christiania 1877—1879, 1882 und in den Mathematischen Annalen, Bd. XIV, S. 331—416, Bd. XV, S. 465—506, Leipzig 1879 und Bd. XX, 1882 S. 357—454 veröffentlicht [1]). Die durch elegante Anwendungen von Berührungstransformationen und durch eine geistreiche geometrische Interpretation des allgemeinen Integrales der Minimalflächen von Monge ausgezeichnete Liesche Theorie der algebraischen Minimalflächen welche noch den Vorzug besitzt, eine synthetische Behandlung [2]) dieser schönen Theorie anzubahnen, hat im ersten Theile die projectivischen und im zweiten Theile die metrischen Untersuchungen über Minimalflächen zum Gegenstande. Ihr wissenschaftlicher Wert wird noch dadurch besonders erhöht, dass sie nicht bloß die endlich und unendlich entfernten Punkte, sondern auch die imaginären Punkte der Minimalflächen in den Kreis ihrer Betrachtungen zieht, und im zweiten Theile den allgemeinen Zusammenhang zwischen der Krümmungstheorie aller algebraischen Raumcurven mit der Theorie aller algebraischen Minimalflächen, die einer vorgelegten algebraischen Developpablen eingeschrieben sind, entwickelt. Herr Professor Lie geht in dieser Theorie von Flächen aus, welche in zweifacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden können, und zeigt nach Monge, dass unter denselben keine imaginären Developpablen sind. Nach der geometrischen Interpretation von Monges allgemeinem Integral werden unter Hinweis auf die Forschungen von Bonnet, Weierstrass, Enneper und Geiser die reellen, algebraischen

[1]) S. Lie, Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. Math. Ann. Bd. XIV, S. 331, Bd. XV, S. 465, Leipzig 1879 u. „Untersuchungen über geodätische Curven," Math. Ann. Bd. XX, S. 357, Leipzig 1882. S. a. Universitätsprogramm, Christiania 1879.

Vergl.: „Les surfaces minima" und „Les formules de Monge et leur interprétation géométrique" in G. Darboux Werk, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Première partie, pag. 257—506 u. pag. 340—364. Paris 1887.

[2]) Vergl.: R. Sturm, Reingeometrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen. Crelle-Fuchs Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, 105. Bd., S. 101—126, Berlin 1889.

Minimalflächen (Doppelflächen), ferner die Minimalflächen, deren Minimalcurven eine irreductible Schar bilden, untersucht und bestimmt ihre Classen und Ordnungen und entwickelt die Theorie der Minimalcurven, deren Developpabeln den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthalten, sowie jene der conjugierten Minimalcurven. Hierauf bestimmt Lie alle reellen Minimalflächen, deren Classenzahl eine beliebige, vorgelegte Primzahl oder eine beliebige Zahl ist. Die polare Beziehung zwischen zwei Liniencomplexen, der Asymptotenkegel, die Ordnung der Tangentenkegel, die parabolische Curve und die Doppeldeveloppable einer Minimalfläche, sowie einige ihrer Singularitäten bilden den Schluss der projectiven Untersuchungen. Die metrischen Untersuchungen Lies über algebraische Minimalflächen werden unter Hinweis auf die Entdeckungen von Bonnet, Björling, Weierstrass, Schwarz, Henneberg, Herzog auf jene Minimalflächen ausgedehnt, welche eine vorgelegte Developpable nach einer bestimmten Curve (Krümmungslinie, Haupttangentencurve, geodätische Linie oder Evolute) berühren, sowie auf solche Flächen, die ebene Krümmungslinien besitzen, oder einem algebraischen Kegel, oder einer algebraischen Developpabeln eingeschrieben sind. Die Bestimmung der Classenzahl und der Untersuchung über Minimalflächen, welche unendlich oft mit sich ähnlich sind, schließen die metrischen Betrachtungen dieser interessanten Theorie der Minimalflächen-Familien, die auch durch Translation von Minimalflächen längs fester Minimalflächen erzeugt werden können und eine ausgedehnte Reihe von eleganten Berührungstransformationen liefern, welche Minimalflächen in Minimalflächen überführen. Die dritte der genannten Abhandlungen hat die Untersuchungen über geodätische Curven dieser Flächen zum Gegenstande. Lie weist in seinen Untersuchungen über die geodätischen Linien, deren Entdeckung — wie bereits erwähnt — wir Monge und Legendre verdanken, auf die berühmten Untersuchungen von Jacobi[1]), Liouville[2]) und Christoffel[3]), sowie auf die schönen Anwendungen der Differentialparameter gegebener Functionen der Gaussschen Coordinaten[4]) in dieser Curventheorie von Beltrami[5]) und Dini[6]) hin, sucht dann jede Fläche zu bestimmen, die unendlich

[1]) Crelles Journal, Bd. 19., pag. 309. S. a. Werke, Bd. II. und Vorlesungen über Dynamik.

[2]) Journal de Mathém. Tom. 12 und 16. S. a. Note II. pag. 259 im Anhange zu Monges Application.

[3]) Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften 1868—69.

[4]) Disquisitiones generales, Gottingae 1828.

[5]) Memorie dell' Accademia di Bologna. Serie II, t. 8. 1869. Atti dell' Istituto Lombardo, Serie II., t. 1 und Giornale di Math. 1864—65.

[6]) Annali di Matematica, Serie II., t. 3.

oft auf sich selbst geodätisch abgebildet werden kann, und findet alle Minimalflächen, deren geodätische Curven eine infinitesimale Transformation gestatten. Es sind dies nebst den von Bour[1]) schon früher entdeckten und auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen die in der zweiten Abhandlung bereits gefundenen Minimalflächen, welche unendlich oft mit sich ähnlich sind.[2])

Aber nicht bloß die Theorie der Minimalflächen, sondern auch zahlreiche andere Probleme der Flächen- und Curventheorie unserer hervorragendsten Mathematiker der Gegenwart stehen noch immer mit Monges ersten infinitesimalgeometrischen Untersuchungen im innigsten Zusammenhang. Insbesondere gilt dies von den für die Krümmungstheorie der Flächen und Curven wichtigen Untersuchungen von A. Serret, Liouville, Ossian Bonnet, Dini, Enneper, Darboux, Picart, Lecornu, Dobriner, Voretsch, Painvain, Beltrami, Weingarten, etc., welche mit den Forschungen der bereits genannten Geometer der Mongeschen Schule als eine Fortsetzung des berühmten, die Infinitesimalgeometrie begründenden Werkes von Monge betrachtet werden müssen.[3])

Während aber die diesbezüglichen analytischen Forschungen in der Geometrie von den französischen und englischen Mathematikern zumeist mit elliptischen Coordinaten durchgeführt wurden, bedienten sich die Gelehrten Deutschlands, auf welche in den letzten Decennien dieses Jahrhundertes das Principat[4]) in der Mathematik übergieng, zu ihren Forschungen der Abelschen Transcendenten.[5])

---

[1]) Journal de l'École polyt. Tom. XXII. pag. 1 und Cah. 39, pag. 99—109, Paris 1862.

[2]) Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven. Universitätsprogramm, Christiania 1879.

[3]) S. d. Werke über Analytische Geometrie von Salmon-Fiedler (Analytische Geometrie des Raumes, Leipzig 1879—80), F. Joachimsthal (Anwendung der Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1890), R. Hoppe (Leipzig 1880 und 90), Schlömilch (Leipzig 1882 u. 1887), Fort-Schlömilch (Leipzig 1886 u. 1893), J. Knoblauch (Leipzig 1888), Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Leipzig 1876 u. 91, F. Klein, Einleitung in die höhere Geometrie, Göttingen 1893. I. S. 369 und Riemannsche Flächen, Göttingen 1894. S. 188. Stahl-Kommerell (Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie, Leipzig 1893), G. Darboux (Leçons sur la théorie général des surfaces. (Paris 1887, 1889 u. 1894), G. Koenigs (La Géométrie réglée. Paris 1895) etc., etc. — S. a. das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von Prof. Dr. E. Lampe. Berlin 1868—96.

[4]) S.: Dr. H. Hankel: „Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten." Tübingen 1869. (II Auflage 1885.)

[5]) S.: L. Königsberger: „Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten." Leipzig 1879.

So wurden z. B. die schönen Theoreme über die geodätischen Linien auf Oberflächen, welche in orthogonalen Coordinaten fast unüberwindliche Schwierigkeiten bieten, in der elegantesten Form von den französischen Mathematikern Chasles [1]), Liouville [2]) und den englischen Mathematikern Michael Roberts [3]), William Roberts, [4]) Cayley [5]) mittelst elliptischer Coordinaten, von den deutschen Gelehrten Jacobi, [6]) Joachimsthal, [7]) Weierstrass, [8]) Riemann [9]) und Clebsch [10]) mittelst Abelscher Transcendenten begründet. —

[1]) „Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré." Comptes rendus de l'Académie des sciences. Paris 1846, tome XXII. Journal de Mathématiques, t. XI., pag. 5. — [2]) „De la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque." Journal de Math. Paris 1844, t. IX, pag. 401 — 408. „Démonstration géométrique relative à l'équation des lignes géodésiques sur les surfaces du second degré." Journal de Math., t. XI. 1846. Comptes rendus, t. XXII. pag. 111. — [3]) „Sur quelques propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde." Journal de Math. 1846, t. XI., pag. 1. — „Nouvelles propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure sur l'ellipsoïde." Journal de Math. 1848, t. XIII., pag. 1. — [4]) Comptes rendus. Paris 1861. t. LIII. pag. 546; ibid. t. LVIII, pag. 291. — Journal de Math., t. LXII., pag. 50. — [5]) „On the geodésic lines on an ellipsoid." Memoires of the Royal Astronomical Society, London, t. XXXIX., pag. 31—53 (t. XXXII. 1871, pag. 35—36). Quarterly Journal, vol. I. pag. 186, und Proceedings of the London Math. Society, vol. IV. 1872, pag. 199. — [6]) „De la ligne géodésique sur un ellipsoïde, et des différents usages d'une transformation analytique remarquable." Journal de Mathématiques. Paris 1841, tome VI., pag. 267. Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin Bd. XIX, pag. 309. C. G. J. Jacobi: Vorlesungen über Dynamik, (gehalten an der Universität zu Königsberg, 1842—43). Berlin 1866, pag. 212. — [7]) „Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus." Crelles Journal, 1843, XXVI. Bd., pag. 155—177. — [8]) „Über die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid." Monatsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin v. J. 1861, pag. 986—997. — [9]) „Theorie der Abelschen Functionen" Crelles Journal, 1857, Bd. LIV. etc. (S. a. Riemanns Werke, Leipzig 1876). — [10]) „Über die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie." Crelles Journal Bde. 63, 64. 1864. (S. a. Clebschs Vorlesungen: 1870 - 1 (1891) und Clebsch-Gordan: „Theorie der Abelschen Functionen." Leipzig 1866. — S. f.: K. H. Schellbach: „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Funktionen." Berlin 1864, pag. 337—368. — G. Fleischer: „Über die geodätischen Linien auf centralen Oberflächen zweiter Ordnung. St. Gallen 1877. — R. Noske: „Die kürzesten Linien auf dem Ellipsoid." Königsberg 1886 und 1887. — Anmerkung: S. a. Sophus Lie, „Untersuchungen über geodätische Curven." — Mathem. Annalen. Bd. 20, S. 357—454. Leipzig 1882. — „Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen." Ibid. S. 447—454. S. a. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. VII, S. 490 Christiania 1882. — „Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven." Universitätsprogramm, Christiania 1879. (Archiv for Math. og Naturv. Bd. I, III u. IV. Christiania 1876, 78 u. 79). Vergl. a. die diesbezüglichen Untersuchungen von Beltrami, Dini, Christoffel,

Im weiteren Verlaufe seiner „Application de l'Analyse à la Géométrie" beschäftigte sich Monge mit der Bestimmung der Differential- und Integralgleichungen jener Flächen, welche durch die Bewegung einer Geraden längs dreier Leitlinien entstehen (XXI, S. 223 — 238), und der Fläche, welche eine Kugelschar von variablem Halbmesser, deren Mittelpunkte auf einer beliebigen Curve liegen, einhüllt (XXII, S. 238—246). Diesen Betrachtungen im Raume folgt die analytische Untersuchung jener Flächen, deren Normalen Tangenten derselben Kugel (XXIII, S. 236—286), oder Tangenten einer Kegelfläche (XXIV, S. 286—321), oder deren Normalen Tangenten einer beliebigen developpablen Fläche sind (XXV, S. 322—368). Dieses Problem der Normalen dehnte bekanntlich J. Weingarten (s. Crelles Journal, Bd. 62, S. 61, Berlin 1863) auf beliebige Flächen aus, welche von den Normalen berührt werden. Monge betrachtet die Strictionspunkte (points de striction, S. 251), die Linien gleicher und gleichgerichteter Krümmung, sowie die singulären Punkte dieser Flächenfamilien, insbesondere die Nullpunkte und schließt seine analytischen Forschungen mit der Untersuchung der Krümmungsverhältnisse jener Fläche, welche eine Kugelschar von variablem Halbmesser, deren Mittelpunkte auf einer beliebigen Curve liegen, einhüllt. Den Schluss von Monges analytischer Geometrie bildet die Theorie der Evolventen, der Krümmungsradien, die verschiedenen Arten der Krümmungs- und Windungsverhältnisse (inflexions) der Raumcurven.[1]) XXVII, S. 392 — 421.) Die Krümmungstheorie der

---

Darboux, etc. in Giornale di Mat., Mathem. Annalen. Crelles Journ., Leçons sur la théorie gén. des surfaces etc. — S. f. Dr. Anton Puchta, „Analytische Darstellung der kürzesten Linien auf allen abwickelbaren Flächen." Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. II. Abth. Jahrg. 1888. Bd. 97, S. 1269—1299. — A. Voss, „Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugiertes System bilden. Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu München. März-Heft, Jahrg. 1888. — S. a.: F. J. Obenrauch, „Zur Transformation und Reduction von Doppelintegralen mittelst elliptischer Coordinaten." Neutitschein 1892. — F. J. Obenrauch, „Zur Complanation des dreiachsigen Ellipsoides mittelst elliptischer Coordinaten." (Dr. Hoppes Archiv der Mathematik und Physik. II. Reihe, Theil XII, S. 155—167. Berlin 1894).

[1]) Vergl.: Paul Serret, Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure. Paris 1860. — W. Schell, Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung. Leipzig 1859. — G. Salmon, Geometry of three dimensions. Dublin 1865. (Deutsche Ausgabe von W. Fiedler. II. Th. 3. Auflage, S. 91—206. Leipzig 1880). G. Salmon, A treatise on the higher plane curves. 2e edit. Dublin 1873. (Deutsche Ausgabe von W. Fiedler. II. Aufl. Leipzig 1882.) G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques. Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux. Tome VIII et IX, pag. 291 - 350 et pag. 1—276. Paris-Bordeaux 1873. — R. H·ppe, Lehrbuch der analytischen Curventheorie. Leipzig 1880. —

Flächen von **Monge**, für welche **Euler** und **Meusnier** die ersten Fundamentaltheoreme schufen, wurde bald im Geiste ihres Schöpfers von **Monges** genialem Schüler **Dupin** durch die Theorie der confocalen Flächensysteme erweitert und in der jüngsten Zeit von hervor-

---

G. Salmon-W. Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte (V. edit. London 1869), Leipzig 1887/8, etc.

Anmerkung: Die ersten methodischen Untersuchungen in der Theorie der Singularitäten verdanken wir Euler (Introductio in analysin infinitorum. Lausanne 1748) und Cramer (Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genf 1750). — Eine Fülle von diesbezüglichen Lehrsätzen verdanken aber wir den Untersuchungen von Lamé (Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie. Paris 1818), Gergonne Annales. Tom. XVII und XIX), Plücker (Theorie der algebraischen Curven, Bonn 1839; Analytisch-geometrische Entwickelungen, Essen, 1828—31; „On a new Geometry of Space", Philosoph. Transactions, London 1865; Neue Geometrie des Raumes, Leipzig 1868—69), Jacobi (Crelles Journal, Bd. 15), A. Cayley („On a new analytical Representation of Curves in Space," Cambridge 1859), W. Schell (Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung, Leipzig 1859), Zeuthen (Math. Annalen Bd. 7, 10), Klein (Ibid. Bd. 10), Harnack (Ibid. Bd. 10), Emil Weyr („Über die Singularitäten der zweiten Ordnung." Sitzungsber. der königl. böhm. Gesellsch. der Wissenschaften Prag. 1872), etc. etc. — Vergl. a.: A. Cayley, „Recherches sur l'élimination et sur la théorie des courbes." Crelles Journal. Bd. 34. Berlin 1847. S. 30. — „On the higher singularities of plane curves." Quarterly Journ. Vol VII u. „Note sur les singularités supérieures des courbes planes." Crelles Journal. Bd. 64. Berlin 1865. S. 369. — S. f. Philosophical Transactions vom Jahre 1859 u. 1861, S. 193 u. 357. — S. a.: O. Hesses Abhandlungen über die Singularitäten in Crelles Journal Bd. 36 (1848, S. 143), Bd. 40 (1850, S. 316) und Bd. 41 (1851, S. 272), („Über die Wendepunkte der algebraischen ebenen Curven, etc."). — C. G. J. Jacobis, Abhandlungen in Crelles Journal Bd. 40. Berlin 1850, S. 237. — A. Clebsch, „Über die Wendungsberührebenen der Raumcurven," etc. Crelles Journal Bd. 63. Berlin 1864. S. 1, 94 u. 186. — O. Stolz, „Über die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven." Mathematische Annalen. Bd. VIII. Leipzig 1875, S. 415. etc. etc. — von Zeuthen: Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche etc. Brioschi Annali de Matematica III. vol. pag. 175. (S. a. Comptes rendus pag. 225. Paris 1868). — Dr. C. Rodenberg, Pentaeder der Flächen dritter Ordnung bei Auftreten von Singularitäten. Göttingen 1874. — Dr. E. Weyr, Beiträge zur Curvenlehre. („Singularitäten ebener Curven.") Wien 1880, S. 11. — Dr. Th. Reye „Über die Singularitätenflächen quadratischer Strahlencomplexe." Berlin 1884. — Fr. Meyer, „Über die Discriminanten und Resultanten für die Singularitäten der ebenen und algebraischen Curven." Mathematische Annalen. Bd. 38, S. 369. Leipzig 1891. — W. P. Werkman, „The theory of the singularities of surface of revolution." The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Vol. 24. pag. 89. London 1891. — D. J. Kortweg, Über Singularitäten verschiedener Ausnahme-Ordnung und ihre Zerlegung." Mathem. Annalen. Bd. 41, S. 286. Leipzig 1893. — M. G. Humbert, „Sur la théorie générale des surfaces unicursales." Ibid. Bd. 45, S. 428-445. Leipzig 1894. — É. Picard, „Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre." Ibid. Bd. 46, S. 521. Leipzig 1895.

ragenden Mathematikern unter Zugrundelegung der sogenannten Fundamentalfläche durch die Theorie der verallgemeinerten Krümmungslinien und der geodätischen Linien weiter ausgebildet.[1]) Monges Krümmungstheorie der Flächen bildet mit den von Gauss, Liouville und Minding begründeten Theorien des Krümmungsmaßes, der geodätischen Krümmung und der Deformation der Flächen — welche Riemann, Christoffel und Lipschitz auf Mannigfaltigkeiten des n-dimensionalen Raumes ausgedehnt hatten — den Gegenstand einer überaus großen Zahl von ebenso interessanten — als wissenschaftlich-wertvollen Untersuchungen unserer modernen Flächentheorie.[2])

Eine ganz besondere Beachtung fanden bei den Mathematikern und darstellenden Geometern auch die in den letzten Decennien auf dem Gebiete der synthetischen Geometrie in der höheren Curven- und Flächentheorie ausgeführten wertvollen Untersuchungen von Dr. Luigi Cremona,[3]) Professor der höheren Geometrie an der Universität zu Bologna, dann an der königl. polytechnischen Schule zu Mailand, und jene von Dr. Rudolf Sturm,[4]) Professor an der Universität zu Breslau,

---

[1]) S.: Lüroth, Verallgemeinerung des Problems der kürzesten Linie. (Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 13, Leipzig 1868, ferner Darboux, Lie, Schering, Beltrami, Clebsch-Lindemann, etc

[2]) S.: J. Giuseppe Veronese, „La superficie omaloide normale del 4° ordine a due dimensioni dello spazio a cinque dimensioni, e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario,“ Atti della R. Accademia dei Lincei 1884. — J. G. Veronese, „Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare.“ Padova. Tipographia del seminario. 1891. (Atti della R. Accademia dei Lincei 1889). S. a.: „Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen,“ von Giuseppe Veronese, Professor an der königl. Universität zu Padua. Ins Deutsche übersetzt von Adolf Schepp, Premierlieutenant. Leipzig 1894. — (Vergl. a.: Rivista di Mat. I, pag. 267 und Palermo Rend. VI, pag. 42 ed 160).

[3]) Dr. Luigi Cremona, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane. Bologna 1862. (Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven. Ins Deutsche übertragen von Maximilian Curtze. Greifswald 1865). — „Preliminari di una teorie geometrica delle superficie.“ Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna (II^a serie, tom. VI°, pag. 91—136; tom. VII°, pag. 19—78). (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung. Unter Mitwirkung des Verfassers ins Deutsche übertragen von Maximilian Curtze. Greifswald 1870). — „Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre.“ Von der Berliner Akademie der Wissenschaften im Jahre 1866 mit der Hälfte des Steinerschen Preises gekrönte Abhandlung. (S. a. Crelles Journal 68. Bd. S. 1—133). — S. a.: Annali di Matematica. Tomo I., II., III. etc. Roma 1858—1860, etc.) u. Giornale di matematiche. vol. I—III, etc. Napoli 1863—65, etc.

[4]) S.: Dr. Rudolf Sturm, „Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung.“ Leipzig 1867. (Von der Berliner Akademie der Wissenschaften im Jahre 1866 mit der Hälfte des Steinerschen Preises gekrönte Abhandlung). — „Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung.“ I.—III. Theil Leipzig 1893-96. „Reingeometrische Untersuchungen

welche sich nicht gar zu selten an die grundlegenden infinitesimalgeometrischen Forschungen von Monge und seinen Schülern auf das innigste anschließen und den strengwissenschaftlichen und schönen Ausbau der synthetischen Geometrie zu einer bewundernswerten Höhe führten.

Herr Professor Sophus Lie kam auch in den letzten Jahren (1883 — 1895) auf die Euler - Mongesche Krümmungstheorie der Flächen zurück und fand, dass sie vom gruppentheoretischen Standpunkte als eine Theorie der Differentialinvarianten bei der Gruppe aller Bewegungen aufgefasst werden müsse.

Im Anhange zur „Application de l'Analyse à la Géométrie" behandelte Monge die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen drei Variabeln. (S. 421—504.) Ihre Integration ist nicht von einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit zwei Variablen von der dritten Ordnung, sondern von der Differentialgleichung der Charakteristik abhängig. Auf Grund der diesbezüglichen analytischen Betrachtungen untersuchte nun Monge die Fläche, deren abwickelbare Einhüllenden zu einer Ebene parallele Cylinderflächen oder Kegelflächen sind, deren Spitzen in einer Geraden liegen. (S. 455.)

Die Anwendung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung der Integralgleichung schwingender Saiten und die Untersuchung der diesem Probleme zugrunde liegenden krummen Fläche, bilden einen würdigen Abschluss von Monges großartigen Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie. (S. 474—504.)

Professor Lie zog auch die Mongesche Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Kreis seiner genialen, gruppentheoretischen Untersuchungen und zeigte, dass die ursprüngliche Methode von Monge nur bei solchen Gleichungen zum Ziele führt, welche sich durch eine Berührungstransformation auf zwei bestimmte Formen bringen lassen; er bestimmte die integrablen Formen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, stellte mit Hilfe der Theorie der Differentialinvarianten Kriterien auf, welche erkennen lassen, ob die vorgelegten Differentialgleichungen auf integrable Formen zurückgeführt werden können und gab schliesslich allgemeine Methoden für die Zurückführung der partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung auf integrable Formen an.[1])

Über Minimalflächen." Crelle-Fuchs-Journal Bd. 105, S. 101. Berlin 1889. (S. a. Mathematische Annalen etc.).

[1]) S.: Sophus Lie, Theorie der Transformationsgruppen. I. Abschnitt, Cap. X.; ferner S. 548—549 u. II. Abschnitt, S. 33, 388, 439 u. 452. Leipzig 1888 u. 1890. Vergl. a. III. Abschnitt, Leipzig 1893. — Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von Sophus Lie u. G. Scheffers. I. Bd. Leipzig 1896. (II. Bd. im Druck).

V.

Monges sociale Stellung u. sein Lebensende.

Bis zum Jahre 1796 hatte Monge den heimatlichen Boden Frankreichs nicht verlassen. In diesem Jahre sandte das französische Directorium Monge und Berthollet mit einer großen Zahl von Künstlern nach Italien, um dort die Gemälde und Statuen, welche mehrere Städte an Frankreich als Kriegscontribution abzutreten hatten, in Empfang zu nehmen. Monge führte als französischer Commissär diese peinliche Mission mit auserlesener Höflichkeit und großer Rücksicht gegen die italienischen Städte aus, welche sich von den unsterblichen Werken eines Michel-Angelo, Carracci, Raphael, Leonardo da Vinci, etc. für immer trennen mussten. Wiederholt wurden Monge von den italienischen Behörden die wertvollsten Gemälde als Zeichen der Anerkennung angeboten. Monge lehnte diese Anerbietungen mit Indignation ab; er wollte nicht Wunder der Kunst in seiner Nähe haben, deren unrechtmäßiger Besitz sein Ehrgefühl verletzt hätte — und so blieben in den Zimmern seiner Wohnung in der Rue de Bellechasse die Wände bis an sein Lebensende kahl.

Hier in Italien, in dem in der Nähe von Udine gelegenen Schlosse Passeriano lernte Monge den Oberbefehlshaber der französischen Armee, Bonaparte, kennen. Als die französischen Commissäre dem Oberbefehlshaber der Armee vorgestellt wurden, erfuhr Monge zu seiner Freude, dass er dem gefeierten General persönlich bekannt sei. Der General sprach Monge mit folgenden Worten an: „Permettez, que je vous remercie de l'accueil bienveillant qu' un officier d'artillerie jeune, inconnu et quelque peu en défaveur, reçut du ministre de la marine en 1792; il en a conservé précieusement le souvenir. Vous voyez cet officier dans le général actuel de l'armée d'Italie; il est heureux de vous présenter une main reconnaissante et amie."

Bonaparte, im Jahre 1792 noch ein junger, unbekannter und nicht gerade günstig angeschriebener Artillerieofficier, hatte sich in dem kurzen Zeitraume von vier Jahren den Ruf eines siegreichen Feldherrn erworben. Er fühlte sich als solcher nicht bloß verpflichtet, dem ehemaligen Marineminister für den wohlwollenden Empfang in Paris im Jahre 1792 seinen Dank auszusprechen, sondern er war als gefeierter Anführer der französischen Armee in Italien glücklich, dem berühmten Gelehrten seine Hand als die eines dankbaren Freundes zu reichen. Dieser Händedruck der Dankbarkeit, welcher zwischen dem Anführer der französischen Armee in Italien und dem gewesenen Marineminister gewechselt wurde, war der Anfang einer innigen Freundschaft, welche in den folgenden Jahren für Monge die Quelle tiefster Seelenqualen werden sollte, von denen ihn erst der Tod erlöste.

Monge, ein Patriot in des Wortes edelster Bedentung, der seinem Vaterlande in den Tagen der Gefahr so aufopferungsvolle Dienste geleistet hatte, und dem jede politische Intrigue im Staatswesen ferne lag, musste nach dem Sturze Napoleons die Verehrung, welche er dem genialen Feldherrn entgegengebracht hatte, bitter büßen. Bonaparte selbst wusste diese Verehrung, die ihm Monge entgegenbrachte, hochzuschätzen und gab dem berühmten Gelehrten wiederholt Beweise unbegrenzter Hochachtung und innigster Freundschaft. Das innige Freundschaftsverhältnis zwischen dem Gelehrten und Feldherrn wurde mit jedem Tage inniger, und wiederholt rief Bonaparte bei den diplomatischen Banquetten laut der Musik zu: „Jouez la Marseillaise pour Monge!“ Als der Friede von Campo-Formio am 17. October 1797 unterzeichnet wurde, gab General Bonaparte Monge den schlagendsten Beweis seiner Zuneigung, indem er ihn beauftragte, in Gemeinschaft mit dem General Berthier den Friedenstractat nach Paris zu überbringen. In seinem Briefe an das Directorium sprach der Sieger von Rivoli von Monge als von dem Manne, der durch sein Wissen, wie durch seinen Charakter dem französischen Namen in Italien die meiste Ehre gemacht habe.

Bonaparte hatte es nicht allein verstanden, sich mit tüchtigen, durch Talent und Tapferkeit ausgezeichneten Generalen als Corpscommandanten (Berthier, Caffarelli-Dufalga, Massena, etc.) zu umgeben und ihnen als genialer Stratege und Taktiker zu imponieren, sondern er fand es für die Erreichung seines hohen politischen Zieles auch für zweckentsprechend, seinen Untergebenen als Gelehrter zu erscheinen. Es ist zweifellos, dass Monge es war, welcher als Überbringer des Friedenstractates von Campo-Formio Bonaparte die Aufnahme in die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der Pariser Akademie der Wissenschaften an Stelle Carnots, welcher mit dem Decrete vom 18. Fructidor von seinen Mitdirectoren proscribiert worden war, als Mitglied der Section für Mechanik ermöglichte. Welchen hohen Wert General Bonaparte auf diese Auszeichnung durch die Pariser Akademie der Wissenschaften legte, ergibt sich aus dem Umstande, dass seine berühmten Proclamationen von Toulon, Malta, Alexandrien, Kairo etc. stets die Unterschrift trugen: „Bonaparte, Membre de l'Institut et Général en chef.“ Im Februar 1798 wurde Monge vom Directorium in Angelegenheit des am 28. December 1797 an der Seite des französischen Botschafters Josef Bonaparte im jugendlichen Alter ermordeten französischen Generals Duphot als französischer Commissär abermals nach Rom entsendet. Am 3. Juni 1798 schiffte sich Monge — einer schriftlichen Einladung Bonapartes folgeleistend — mit dem gelehrten Chemiker Berthollet und dem Mathematiker Fourier in Cività vecchia ein, um als Mitglied der wissenschaftlichen Commission an der Expedition nach Ägypten theilzunehmen. Bonaparte hieng an dem gelehrten Geometer mit so innigen Freundschaftsgefühlen, dass er ihn in einem Briefe vom 2. April 1798 zur Theilnahme an dieser Expedition mit den herzlichen Worten aufgefordert hatte: „Mon cher Monge, je compte sur vous, dussé-je remonter le Tibre avec l'escadre pour vous prendre!"

Monge wurde an Bord des Admiralschiffes l'Orient, von welchem aus Bonaparte den Oberbefehl über die Expeditionsarmee führte, in gastfreundlichster Weise aufgenommen und erfreute sich — bereits im 52. Lebensjahre stehend — noch einer seltenen Jugendfrische des Geistes und des Körpers. Am 9. Juni 1798 erschien das colossale, aus fünfhundert Segeln bestehende Geschwader vor Malta, das am 11. Juni capitulierte, und am 1. Juli stand das französische Geschwader vor Alexandrien. Aus Gründen der persönlichen Sicherheit erhielt die wissenschaftliche Expedition den Auftrag, mit einer Flotille von kleinen Fahrzeugen den Nil stromaufwärts zu schiffen, während Bonaparte mit seiner Landarmee den Weg nach Kairo durch die Wüste einschlug. Am 14. Juli wurde die wissenschaftliche Expedition, welche mit dem niedrigen Wasserstande des Nil zu kämpfen hatte, bei Chebreys von türkischen Kanonenbooten und gleichzeitig von einer aus Mameluken, Fellahs und Arabern bestehenden feindlichen Armee angegriffen und wäre bald von dieser niedergemetzelt worden, wenn nicht der große Stratege mit Hintansetzung der taktischen Vortheile dieses Gefechtes in Eilmärschen herangerückt und das Leben seiner Gelehrten, welche an diesem gefahrvollen Tage als Unterkanoniere die Geschütze bedienen mussten, das Leben gerettet hätte. Hocherfreut über die Rettung seines Freundes warf sich General Bonaparte Monge, der eben ans Land gestiegen war, mit den Worten in die Arme: „Sie sind die Ursache, mein theurer Freund, dass ich mein Gefecht verfehlt habe. Um sie zu retten, habe ich die Bewegung meines linken Flügels nach dem Nil zu übereilt, bevor noch mein rechter Flügel das Dorf völlig umgangen hatte, aus welchem sonst kein Mameluk entkommen sein würde!"

Das Ziel der Expedition war Kairo. Diese zweite Hauptstadt des Orientes, ebenso berühmt durch ihre Ausdehnung als durch ihre Alterthümer, dieser prächtige Handelsmittelpunkt von Europa, Asien und Afrika, dieser Knotenpunkt für die Caravanen der Kaufleute und Pilger, hatte schon zu Ende des achtzehnten Jahrhundertes einen Glanz, von dem man sich jetzt kaum eine richtige Vorstellung machen kann.

Vierzig Paläste von Beys, vierzig andere von Kachefs, mehr als vierhundert Moscheen bargen unermessliche Reichthümer, deren Besitz zur Bestreitung der Bedürfnisse der französischen Armee dringend nöthig war. Am 22. Juli zog der siegreiche Feldherr mit seinem Armeecorps in Kairo ein. Hier gründete Bonaparte am 29. August 1798 (3 Fructidor an VI) ein ägyptisches Institut der Künste und Wissenschaften, zu dessen ersten Präsidenten über Vorschlag Bonapartes Monge gewählt wurde. In dem wissenschaftlichen Journal dieses Institutes „La décade égyptienne", welches unter Fouriers Redaction alle zehn Tage erschien, veröffentlichte Monge die Abhandlung „Mémoire sur le phénomène d'optique, connu sous le nom de mirage" (tome Ier, pag. 37), die sich auf die unter dem Namen der Luftspiegelung bekannte optische Erscheinung bezieht. Am 21. October 1798 brach in Kairo ein Aufstand aus, bei welchem gegen dreihundert Franzosen niedergemetzelt wurden. Das wissenschaftliche Institut, in welchem es Instrumente, aber keine Waffen gab, wurde durch zwei und einen halben Tag von den Arabern belagert und war nahe daran, in ihre Hände zu fallen. Nur der Geistesgegenwart und Kaltblütigkeit Monges verdankten die Mitglieder der wissenschaftlichen Commission die Rettung ihres Lebens.

Im April des Jahres 1799 begleitete Monge mit Berthollet den Obergeneral auf seinem Zuge nach Syrien, wo Monge von der schrecklichen Dysenterie befallen wurde, welche die französischen Truppen decimierte. Nach der vergeblichen Belagerung von St. Jean d'Acre kehrte Bonaparte nach Ägypten zurück. — Die Niederlagen, welche die Franzosen durch die Truppen der Verbündeten erlitten, insbesondere aber die Siege Erzherzogs Karl bewogen General Bonaparte zur schleunigen Rückkehr aus Ägypten, weil er sich mit der nicht unbegründeten Hoffnung trug, dass ihn die Volksstimmung als Retter des Vaterlandes begrüßen und an die Spitze der Republik stellen werde. Am Abend des 30. Thermidor (17. August 1799) verließ Bonaparte, von Monge und Berthollet begleitet, in heimlicher Weise Kairo und trat an Bord der Fregatte „La Murion" von Alexandrien die Rückreise nach Frankreich an. Im Eilwagen, dem sechs Courierpferde vorgespannt waren, machten Monge und Berthollet die Reise Bonapartes von Fréjus nach Paris mit. Das Directorium, an dessen Spitze zumeist unbedeutende Männer standen, wurde am 9. November 1799 gestürzt und Bonaparte die Regierungsgewalt als erstem Consul auf zehn Jahre übertragen. — Monge und Berthollet wurden bei ihrer Ankunft in der polytechnischen Schule auf das freudigste begrüßt. Der gelehrte Geometer, der schon im Jahre 1780 als wirkliches Mitglied in die Pariser Akademie der Wissenschaften aufgenommen worden war, wurde gleich bei den ersten Ernennungen im Jahre 1799 zum Senator gewählt; fünf Jahre später erhielt er als Titel den Senatorsitz in Lüttich. Die wenig anstrengenden Senatorgeschäfte gestatteten Monge von Zeit zu Zeit Vorträge an der polytechnischen Schule zu halten, wo ihm die Zöglinge stets eine Aufnahme bereiteten, bei welcher Verehrung mit Begeisterung wetteiferten. Trotz seines hohen Alters wandte sich Monge wieder seinen Lieblingsstudien über analytische Geometrie zu, und die Nummern des Journal de l'École polytechnique enthalten noch eine stattliche Reihe von mathematischen Abhandlungen, welche von der eleganten Durchführung, der seltenen Auffassungskraft und der hohen Begabung des großen Geometers Zeugnis ablegen.

Als sich der Consul Bonaparte durch eine Volksabstimmung die Kaiserkrone als Napoleon I. erblich übertragen und am 2. December 1804 vom Papste zum Kaiser krönen ließ, umgab er sich mit einem glänzenden Hofstaate von Generalen und Gelehrten, die er zu Fürsten und Grafen ernannte. Auch Monge wurde — wie bereits erwähnt — zum Grafen von Pelusium ernannt. Obwohl der gelehrte Geometer trotz dieser Verleihung des Grafenstandes bis an sein Lebensende die offene und ehrliche Denk- und Handlungsweise eines schlichten Bürgers beibehielt, so wurde ihm doch die Annahme des Adels selbst von befreundeter Seite zum Vorwurfe gemacht, weil dieselbe mit seinen früheren Gesinnungen und Anschauungen in Betreff der Adelsinstitution im Widerspruche standen. Aber Monge, der unter dem Zauber alles dessen stand, was von seinem großen Napoleon ausgieng, erklärte ganz offen, dass er nicht mehr die Kraft besitze, Napoleons Wünschen zu widerstehen. Und so musste sich der „maçon parvenu" der ehemaligen Gypsschule in Mezières — wie ihn seine ärgste Feindin, die als Schriftstellerin bekannte Madame Roland, Gattin des Girondisten und späteren Ministers Roland, nannte — Napoleon, zuliebe den Vorwurf der Inconsequenz gefallen lassen. Napoleon, um 23 Jahre jünger als Monge, der sich bekanntlich schon auf der Kriegsschule zu Brienne und der École normale zu Paris durch sein außerordentliches mathematisches Talent ausgezeichnet hatte, erwiderte als Kaiser die Liebe des gelehrten Geometers durch das Gefühl der innigsten Freundschaft und seltener Verehrung, welche Monge als ständigen und verehrten Gast oft in den Familienkreis Napoleons führte. Diese innige Freundschaft Napoleons erfüllte das Herz der berühmten Gelehrten mit Genugthuung, mit Freude und Dankbarkeit.

Monge, der nach seiner Ernennung zum Senator seinen Professorengehalt von sechstausend Francs zur Unterstützung armer, begabter Schüler der polytechnischen Schule verwendet hatte, erhielt von Napoleon ein Ehrengeschenk von einhunderttausend Francs und, um

Monge in seiner Nähe zu haben, forderte Napoleon den gelehrten Geometer auf, sich in der Nähe von Saint-Cloud eine Besitzung im Werte von zweihunderttausend Francs anzukaufen, für deren Bezahlung er selbst sorgen wollte. Doch lehnte Monge mit Rücksicht auf die wenig günstigen Finanzen des Landes dieses Anerbieten Napoleons dankend ab. Im J. 1809 legte Monge die Professur der angewandten Analysis nieder. In den folgenden Jahren pflegte Monge einige Zeit zur Erholung auf seiner heimatlichen Besitzung zu Morey in Burgund zuzubringen. Monges ferneres Lebensglück hieng mit jenem Napoleons innig zusammen. Mit Eifer verfolgte der greise Gelehrte die Erfolge seines Kaisers und Freundes auf den Schlachtfeldern von Marengo, Austerlitz, Jena, Friedland, Wagram und die tiefe Besorgnis erfüllte Monge, als Napoleon den unglücklichen Feldzug gegen Russland eröffnete, in welchem 243.600 Franzosen ihr eisiges Grab finden sollten. Als Monge im Herbste des Jahres 1812 aus dem 29. Bulletin Napoleons unglücklichen Feldzug nach der Schlacht bei Borodino an der Moskwa erfuhr, stürzte er, vom Schlage getroffen, zusammen. Wohl erholte sich der greise Gelehrte nach diesem Schlaganfalle, aber der Unglücksstern Napoleons zerstörte auch das fernere Lebensglück von Monge.

Als Napoleon nach der unglücklichen Schlacht bei Leipzig am 4. April 1814 der Kaiserkrone entsagt hatte und nach Elba gebracht worden war, schritt die neue Regierung sofort daran, die Akademie der Wissenschaften von den Freunden Napoleons zu purificieren. Drei ihrer hervorragendsten Mitglieder, Monge, Carnot und Guyton de Morveau sollten aus der Liste der Akademiker gestrichen werden. Das diesbezügliche Decret war bereits ausgefertigt und sollte publiciert werden. Aber trotz aller Drohungen seitens der Regierung weigerten sich die Gelehrten des Institut de France an Stelle der drei ausgeschlossenen Akademiker neue Mitglieder zu wählen. Es sei uns schon jetzt gestattet, jene politischen Thatsachen ins Auge zu fassen, sowie jene Ursachen zu prüfen, welche das Ministerium Vaublanc veranlassen konnten, Monge geradezu als politischen Verbrecher zu verfolgen. Hat Monge als Marineminister an der Verfolgung Königs Ludwig XVI. und seiner unglücklichen Familie activen Antheil genommen? Oder hat Monge als Marineminister in den Tagen der Abstimmung vom 15.—17. Jänner 1793 an derselben theilgenommen und für das Todesurtheil des Königs gestimmt? War Monge aus politischen oder vielleicht nur aus persönlichen Motiven ein Anhänger Napoleons I.?

Bis zum Ausbruche der französischen Revolution hatte Monge sich ganz seinem erhabenen Lehrberufe und seiner Thätigkeit als Gelehrter gewidmet und war nach dem Ausbruche der Revolution — wie die meisten Franzosen — ein Republikaner, aber kein Feind seiner Dynastie. Monge, dessen Herz von einer bewundernswerten Vaterlandsliebe beseelt war, liebte die Freiheit, die ihm schon als Jüngling ein Ideal war; er war Republikaner mit Leib und Seele, aber er hatte eine wahre Abneigung gegen Menschen, welche die öffentliche Meinung mit Gewalt und dem Schrecken der Guillotine beherrschen wollten. Er selbst, der so Großes in den Wissenschaften geschaffen, war unfähig, jemand auch nur mit einem Worte zu beleidigen. Es ist entschieden ein Irrthum, wenn in den Memoiren[1]) Napoleons I. Monge unter denjenigen genannt wird, welche für das Todesurtheil Ludwigs XVI. gestimmt hatten. Als der unglückliche König in den Tagen vom 15. bis 17. Jänner zum Tode verurtheilt wurde, war wohl Monge Marineminister des Nationalconventes. Das Ministerium Pache-Roland, dem Monge angehörte, war aber — was seine Macht anbelangt — kaum ein Schatten seiner berühmten Vorgänger unter Richelieu, Mazarin, Louvois, etc., sondern nur ein sehr untergeordnetes Werkzeug jener mit Recht gefürchteten Versammlung. Nicht das Ministerium (le conseil exécutif), sondern der Nationalconvent (la convention nationale) hatte am 3. December das Gesetz beschlossen, dass Ludwig XVI. durch ihn gerichtet werde. Als am Abend des 17. Jänner 1793 der hervorragendste Redner der Girondisten Vergniaud, welcher im Nationalconvente das Präsidium führte, das Resultat der Abstimmung[2]) mittheilte und mit dem Ausdrucke des Schmerzes verkündete, der Nationalconvent habe über Ludwig XVI. die Todesstrafe verhängt, waren alle Minister in ihrem Berathungszimmer versammelt und wurden von Bestürzung erfasst, als ihnen das über den König verhängte Todesurtheil mitgetheilt wurde. Das Ministerium und insbesondere Garat als Justizminister wurde vom Convente mit der schmerzlichen Mission beauftragt, den Conventsbeschluss zur Ausführung bringen zu lassen.[3]) Es ist auch zweifellos, dass Monge — wie alle Girondisten — gegen die Abstimmung im Nationalconvente und für die Volksabstimmung war, und dass er — wie sein Freund Condorcet — ganz offen

---

[1]) S.: „Mémoires pour servir à l'histoire de France sous Napoléon, écrits à Sainte Hélène," oder „Mémoire de Napoléon, publiés par le comte de Montholon." Vergl.: „Arago, Oeuvres complètes. Paris 1854. Tome II, page 478 et 567" und „Dupin, Essai historique. Paris 1819, page 158."

[2]) S. d. I. Abschnitt dieses Werkes, S. 37.

[3]) S.: Thiers, Histoire de la révolution française. Quinzième édition. Bruxelles 1840. Tome premier, pag. 238, 249, 267.

gegen das Todesurtheil gestimmt hätte, wenn er als Abgeordneter an der Abstimmung im Nationalconvente theilgenommen hätte.[1])

Monge, den die Stadt Marseille kurz vor dem ägyptischen Feldzuge in den Rath der Fünfhundert gewählt hatte, hatte infolge seiner Theilnahme an der wissenschaftlichen Expedition auch dieses Mandat nicht ausgeübt und überhaupt nie an einer politischen Versammlung theilgenommen. Er war eben mit Leib und Seele Gelehrter und Lehrer, aber kein Staatsmann, und deshalb herzlich froh, als der Nationalconvent nach wiederholtem Ansuchen unter Hinweis auf seine politische und administrative Unfähigkeit am 10. April 1793 seine Demission als Marineminister angenommen hatte. Es ist auch über jeden Zweifel erhaben, dass Monges innigstes Freundschaftsverhältnis zu Napoleon ein rein persönliches war, und dass er als Gelehrter und Republikaner in Napoleon nur den genialen Feldherrn, nicht aber den Politiker und Staatsmann verehrte. Wiederholt hatte Monge Gelegenheit, diese Art seiner Gesinnung offen zum Ausdruck zu bringen, und scheute sich nicht, mit Hintansetzung seines persönlichen Glückes die Zöglinge der polytechnischen Schule, wie diese selbst, gegen die Missgriffe Napoleons in Schutz zu nehmen. Aber auch Napoleon selbst war sich dessen bewusst, dass Monges Verehrung eine rein persönliche und nicht eine auf politischer Grundlage beruhende war.

Seine Landung in Cannes und die „Hundert Tage" seiner neuen Regierung schoben den vom Ministerium Vaublanc beschlossenen Ausschluss Monges und seiner beiden Freunde aus der Pariser Akademie der Wissenschaften für kurze Zeit auf. Als Napoleon nach seiner gewaltigen Niederlage bei Waterloo (16. Juni 1815) die Überzeugung gewonnen hatte, dass er nicht mehr siegreiche Armeen commandieren werde und seine Herrschsucht nicht mehr befriedigen könne, zog er sich ins Elysée zurück, wo er den Plan fasste, nach Amerika zu entfliehen, um sich dort ganz der Pflege der Wissenschaften zu widmen. Monge war von diesem herrlichen Plane so hingerissen, dass er sich trotz seines hohen Alters erbot, den niedergeworfenen Sieger auf seinen Forschungsreisen in dem neuen Erdtheile zu begleiten. Doch lehnte Napoleon dieses Anerbieten seines greisen Verehrers dankend ab.

Napoleon hatte sich am 15. Juli 1815 an Bord des Bellerophon unter den Schutz der britischen Gesetze gestellt, wurde aber über Beschluss der englischen Regierung und der Mächte am 16. October in St. Helena interniert.

König Ludwig XVIII. zog am 8. Juli in Paris wieder ein, und sein Ministerium konnte nun die Purification der Pariser Akademie

[1]) Anmerkung: Auch Lacroix weigerte sich an der Abstimmung im Convente theilzunehmen. (Thiers, Histoire, T. I., pag. 264).

der Wissenschaften energisch durchführen. Der berühmte Chemiker Guyton de Morveau, welcher sich gleichfalls unter den Gemaßregelten befand, lag auf dem Sterbebette und nahm von seinem alten Freunde Monge, der ihn zum letztenmale besuchte, mit folgenden Worten Abschied: „Je n'ai que peu de moments à vivre. Ma mort d'ailleurs arrivera bien à propos. Je leur épargnerai le soin de me trancher la tête!“ Diese Worte des Sterbenden machten auf den greisen Gelehrten einen erschütternden Eindruck, und hatten zur Folge, dass Monge, welcher im 70. Lebensjahre stand, dem Drängen seiner Angehörigen nachgab und bei Madame Ybert — später bei einem seiner gewesenen Zöglinge — eine sichere Zufluchtstätte aufsuchte. Noch in dieser Zufluchtstätte beschäftigte sich Monge mit complicierten Betrachtungen über partielle Differentialgleichungen und ihre Anwendungen auf die analytische Geometrie. Dies war seine letzte wissenschaftliche Arbeit, die er nicht mehr vollenden sollte.

Am 21. März 1816 erschien eine vom Minister Vaublanc unterzeichnete königliche Ordonnanz, laut welcher das Institut de France aufgelöst wurde und dessen Mitglieder neu ernannt wurden. Monge und Carnot gehörten von diesem Tage an nicht mehr der Pariser Akademie der Wissenschaften an, da an ihrer Stelle die Regierung zwei neue Akademiker ernannt hatte. Monge, der dreiunddreißig Jahre lang in erster Reihe als der größte Geometer des achtzehnten Jahrhundertes unter den Akademikern geglänzt hatte, und dessen Patriotismus über alle Zweifel erhaben war, widerstand nicht diesem harten und demüthigenden Schicksalsschlage.

Auf die edle und leuchtende Geisteskraft, deren Glanz die wissenschaftliche Welt von ganz Europa bewundert hatte, senkte sich nun tiefe Geistesnacht. Die Freunde Monges hofften, dass ähnlich wie bei Huygens, dem größten Denker des siebzehnten Jahrhundertes, nach einem Zeitraume von einigen Monaten das Licht die Finsternis wieder durchbrechen könne und Monge von neuem die ganze Kraft eines gewaltigen Geistes wieder erlangen werde. Man hoffte schließlich mit Zuversicht, dass vielleicht die patriotischen Klänge der Marseillaise, die Bonaparte im Schlosse von Passeriano seinem Freunde Monge zu Ehren so oft hatte spielen lassen, den berühmten Geometer aus seiner Geistesnacht herausreißen würden. Doch auch die letzte Hoffnung, dass die einst so gerne gehörten Klänge ihren Zauber auf Monges Gemüth ausüben würden, war eine eitle. Monge starb am 18. Juli 1818, ohne je wieder seine Geisteskraft erlangt zu haben. Eine große Zahl von Gelehrten und Schriftstellern — darunter Delambre, Legendre, Laplace, Vauquelin, Chaptal und Berthollet,

— Künstlern und ehemaligen Officieren gaben Monges irdischen Überresten das letzte Geleite. Berthollet widmete seinem alten Freunde am offenen Grabe den letzten Nachruf und feierte ihn als Akademiker, Professor und patriotischen Bürger, der seinem Vaterlande die treuesten Dienste geleistet hatte. Die Zöglinge der École polytechnique, welchen die französischen Behörden die Theilnahme an dem Leichenbegängnisse verboten hatten, erschienen am nächsten Tage — ihrem ersten Ferialtage — am Père Lachaise, um das Grab des berühmten Gelehrten reich zu bekränzen und ihrem verehrten Lehrer das letzte Lebewohl zu sagen. So schied Monge, der berühmte Gelehrte und Begründer der höheren analytischen und der descriptiven Geometrie, der Gründer der polytechnischen Schule, tief gekränkt aus dem Leben. Mit Monge verlor aber Frankreich einen seiner hervorragendsten Gelehrten, auf dessen epochemachenden Schöpfungen es heute mit berechtigtem Stolze blickt, und den zu ehren, es sich nach Jahrhunderten stets verpflichtet fühlen wird. Noch in demselben Jahre eröffnete das Artillerie-Regiment in Douai eine Subscription für die Errichtung eines Denkmales, als Zeichen der Dankbarkeit und Verehrung seines ehemaligen Lehrers, in dessen Geburtsorte Beaune es gegenwärtig eine Zierde des Hauptplatzes bildet. In den Jahren 1818 und 1819 veröffentlichten Brisson, Ingenieur des ponts et chaussées, und Charles Dupin, Ingenieur der Marine — unter Gefährdung ihrer öffentlichen Stellungen — Biographien von Monge. — Achtundzwanzig Jahre später hatten sich Frankreichs politische Verhältnisse wieder so geändert, dass Arago aus Anlass des hundertsten Geburtstages am 11. Mai 1846 in den Festsälen der Akademie der Wissenschaften in Paris eine Festrede auf Monge halten konnte, um das Andenken des tiefgekränkten Akademikers zu ehren. Die französische Unterrichtsverwaltung gehorchte einer ihrer edelsten Überlieferungen, als sie ihre Erziehungsanstalten unter den Schutz derjenigen stellte, welche dem Vaterlande Ehre gemacht haben und im Jahre 1888 der Stadt Beaune die Anregung gab, ihr Gymnasium nach dem Begründer der Géométrie descriptive „Collège Monge“ zu benennen. Als im Jahre 1893 — in den Tagen vom 17. bis 19. Mai — Frankreich mit seinem unvergeslichen Präsidenten Sadi Carnot, einem ehemaligen, durch mathematisches Talent hervorragenden Zögling der École polytechnique den hundertsten Jahrestag der Begründung dieser berühmten Schule feierte, da eilten gleich am ersten Tage dieses Jubelfestes die Polytechniker auf den Père Lachaise, um am Grabe Monges ihren Dank für dessen patriotisches und segenreiches Wirken zum Ausdruck zu bringen. —

Wir erfüllen einen Act der Pietät und folgen dem Gefühle der Dankbarkeit, wenn wir am Schlusse dieses Abschnittes auch noch jener Männer gedenken, welche durch einen hohen wissenschaftlichen und ästhetischen Takt geleitet, in selbstloser Aufopferung den größten Theil der Gedankenarbeit ihres Lebens und ihr ganzes ideales Streben dem gewaltig-schönen und unendlichen Aufbau der mathematischen Wissenschaften gewidmet haben — den ins Unendliche weiterzuführen Hunderte von geistigen Mitarbeitern der Gegenwart bestrebt sind, und den in der Zukunft Tausende und Tausende der besten Denker ad infinitum noch weiterführen werden.

Werfen wir noch einen kurzen Rückblick auf die Geschichte der Geometrie seit der Mitte des vorigen Jahrhundertes, so tritt uns eine stattliche Schar von Männern entgegen, die — fast allen civilisierten Nationen angehörend — von einer idealen Gedankenrichtung und einer bewundernswerten Liebe zur Mathematik beseelt, ihr Dasein der Geistesbildung der Menschheit geweiht und geopfert haben.

Richten wir unsere Blicke zunächst auf Frankreich, Belgien und die Niederlande, dann nach Deutschland, Österreich und der Schweiz, ferner nach England, Schweden, Norwegen, Italien und Russland, so finden wir überall hervorragende Vertreter der mathematischen Wissenschaften, welche ihr Lebensziel in der mathematischen Forschung suchten und die Literatur dieses exacten Wissenszweiges um zahllose, philosophisch wertvolle Gedankenperlen bereichert haben.

Ein recht anschauliches Bild von der Entwickelung der Geometrie und insbesondere der Infinitesimalgeometrie in Frankreich und Deutschland am Ende des vorigen Jahrhundertes gaben uns schon die beiden letzten Abschnitte dieser mathematisch-historischen Studie.

Leonhard Euler (geb. 1707, gest. 1783) war für lange Zeit der letzte Mathematiker deutscher Abstammung. Überhaupt war es um die Mathematik in Deutschland nach dem Tode Keplers (1571—1630) gar traurig bestellt. Der dreißigjährige Krieg und die religiösen Wirren des siebzehnten Jahrhundertes hatten den exacten Wissenschaften tiefe Wunden geschlagen. In dem Zeitraume von zweihundert Jahren zwischen Kepler und Gauss (1777—1855) hat Deutschland außer Leibniz (1646—1716) fast keinen nennenswerten Mathematiker aufzuweisen. Hingegen besass Frankreich in Marquis de l'Hôpital (1661—1704), Parent (1666—1716), La Hire (1640—1718), Varignon (1654—1722), Clairaut (1715—1765), Frézier (1682—1773), d'Alembert (1716—1783), de Gua (1712—1786), Lancret (1774—1807), Malus (1775—1811), Lagrange (1736—1813), Monge (1746—1818), Carnot (1753—1823) und Laplace (1749—1827) — den berühmten

Zeitgenossen Eulers — glänzende Vertreter der mathematischen Wissenschaften, welche ihnen zahlreiche neue Gebiete erschlossen und Frankreich am Ende des vorigen und in der ersten Hälfte dieses Jahrhundertes auf die erste Stelle in den exacten Wissenschaften erhoben haben.

Im innigsten Zusammenhange mit den mathematischen Errungenschaften der genannten Forscher stehen die Untersuchungen von A. J. Fresnel (1788—1827), J. Fourier (1768—1830), Bobillier (1797—1832), Legendre (1752—1833), Hachette (1769—1834), Ampère (1775—1836), Poisson (1781—1840), Lacroix (1765—1843), Th. Olivier (1793—1853), C. F. A. Leroy (1780—1854), Chr. Sturm (1803—1855), J. Binet (1786—1856), A. Cauchy (1789—1857), Gergonne (1771—1859), Adhémar (1797—1862), Brianchon (1783—1864), E. Bour (1832—1866), R. Lobatto (1796—1866), Poncelet (1788—1867), J. Brasseur (1802—1868), Lamé (1795—1870), J. Duhammel (1797—1872), Dupin (1784—1873), Quetelet (1796—1874), Mathieu (1783—1875), Cl. Bouquet (1819—1875), Transon (1805—1876), M. Chasles (1796—1880), Liouville (1809—1882), A. Briot (1817—1882), J. Plateau (1801—1883), J. de la Gournerie (1814—1883), Puiseux (1820—1883), Moigno 1804—1884), J. A. Serret (1819—1885), J. P. Bouquet (1818—1885), Adhémar (1797—1886), Hoüel (1815—1886), E. Laguerre (1834—1886), A. Terquem (1831—1887), H. Halphen (1844—1889), E. L. Mathieu (1834—1890), M. P. Gilbert (1832—1892), Ossian Bonnet (1819—1892), E. Catalan (1814—1894), etc. etc.

Unter den hervorragenden deutschen Gelehrten des achtzehnten Jahrhundertes nannten wir den Genfer Gabriel Cramer (1704—1752), dem wir wertvolle Untersuchungen in der Curventheorie verdanken und den Begründer der freien Perspective J. H. Lambert (geb. 1728 in Mühlhausen im Oberelsass, gest. 1777 in Berlin), dessen Werk 1759 in Zürich erschien. Durch sein Werk „Photometria seu de mensura et gradibus luminis, Augsburg 1760“ wurde Lambert, der durch 20 Jahre der Berliner Akademie der Wissenschaften als hervorragendes Mitglied angehört hatte, auch zum Begründer der Photometrie. Einen großen Einfluss auf die Entwickelung der Infinitesimalrechnung und ihre Anwendungen auf die Geometrie nahm die aus Flandern stammende Familie der Bernoullis. Dieser in Basel ansäßigen, schweizerischen Kaufmannsfamilie entsprossen neun der bedeutendsten Mathematiker, welche die Lehrkanzeln der Universitäten zu Basel, Groningen, Padua, Petersburg und Berlin inne hatten. Es sind dies Jakob Bernoulli (1654—1705 Basel), Johann (1667—1748 Basel), Nikolaus (1687—1759 Basel), Nikolaus d. j. (1695—1726 Petersburg), Daniel (1700—1782 Basel), Johann (1744 — 1807 Berlin), Christoph (1782 — 1863 Basel), Johann Jakob (1831 — 1878 San Francisco) und Karl Gustav (1834 — 1878 San Francisco). Wir haben bereits in der Einleitung erwähnt, dass im Jahre 1691 die Differentialrechnung noch in ganz Frankreich unbekannt und nur drei Gelehrten auf dem Continente Leibniz, Jakob und Johann Bernoulli — dem Begründer der Integralrechnung — geläufig war. Es währte lange, bis sich die höhere Mathematik und Geometrie in Deutschland freie Bahn gebrochen hatten.

Noch in den ersten Decenien dieses Jahrhundertes lehrte Gauss in Göttingen vor kaum einem halben Dutzend Hörer, während sein weniger berühmter College Thibaut (1775—1832) für seine Elemente der Mathematik ein hundertköpfiges Collegium vereinigte. Diese Verhältnisse haben sich aber bereits seit mehreren Decenien gewaltig geändert, und heute zählt z. B. Herrn Prof. Weierstrass' Schar allein nach Tausenden von Mathematikern, denen die moderne Functionstheorie und die Theorie der elliptischen Functionen eine geradezu ungeahnte Ausbildung und Ausbreitung verdankt. Schon mit Gauss, der die Mathematik die Königin der Wissenschaften nannte und neben der classischen Literatur als die Hauptbildnerin des menschlichen Geistes bezeichnete, begann um das Jahr 1830 wieder eine Glanzperiode der mathematischen Blüthezeit in Deutschland, die bis zur Gegenwart reicht.

Wir erinnern nur an die Forschungen von Pfaff (1765—1825), Bolzano (1781—1848), Abel (1802—1829), Jacobi (1804—1851), Seydewitz (1807—1852), Gudermann (1798—1852), Gauss (1777—1855), Crelle (1780 1855), Lobatschewsky (1793—1856), Dirichlet (1805—1859), Joachimsthal (1818—1861), Joh. Bolay, (1802—1860), Skuherský (1828—1863), Steiner (1796—1863), Riemann (1827—1866), von Staudt (1798—1867), Möbius (1790—1868), Plücker (1801—1868), G. Schreiber (1799—1871), J. A. Grunert (1797—1872), Clebsch (1833—1872), H. Hankel (1839—1873), Hesse (1811—1874), Richelot (1808—1875), Grassmann (1809—1877), J. Littrow (1781—1840), Schulz von Strasznicki (1803—1852), A. von Ettingshausen (1796—1878), A. Burg (1797—1882), J. Hönig (1810—1886), Niemtschik (1831—1877), Pohlke (1810—1876), Gugler (1812—1880), Klingenfeld (1816—1880), E. Koutny (1840—1880), Borchardt (1817—1880), E. Heine (1821—1881), K. Hattendorf (1834—1882), Aronhold (1819—1884), Enneper (1830—1885), L. Scheefer (1859—1885), Malmsten (1814—1886), Baltzer (1818—1887), Rosenhain (1816—1887), Spitzer (1826—1887), Harnack (1851—1888), Kronecker (1823—1891), Petzval (1807—1891), Staudigl (1838—1891), Ameseder (1858—1891), Schellbach (1805—1892), H. Durège (1821—1893), Schroeter (1829—1892), A. Winckler (1821—1892), Kummer (1810—1893), Wittstein (1816—1894) T. Bauernfeind (1818—1894), M. Stern (1807—1894), Dienger (1818—1894), H. von Helmholtz (1821—1894), W. Stahl (1845—1894), E. Weyr (1848—1894), etc. etc.

Aber auch England, die Heimat Newtons (1642-1727) — des Begründers der Differentialrechnung — nahm im vorigen und in diesem Jahrhundert an dem Ausbau der Geometrie als Wissenschaft einen ehrenvollen Antheil. Wir nennen nur: Braikenridge (1700—1770), Steward (1717—1785), Mac Cullagh (1809—1847), Hamilton (1805—1865), J. M. Rankine (1820—1872), Clifford (1845—1879), Smith (1826—1883), Spottiswoode (1825—1883), J. Todhunter (1820—1884), James Thomson (1822—1892) und Arthur Cayley (1821—1895).

Das Gleiche gilt von den mathematischen Arbeiten italienischer Forscher wie: J. C. Fagnano (1682—1766), J. F. Fagnano (1715—1797), E. Zanotti (1709—1782), Jacopo Riccati (1676—1754), Vincenzo Riccati (1707—1775), Giordano Riccati (1709—1790), Mascheroni (1750—1808), A. M. Bordoni (1789—1860), G. Plana (1781—1864), B. Tortolini (1808—1874), Domenico Chelini (1802—1878), G. Bellavitis (1803—1880), Ettore Caporali (1855—1886), Angelo Genocchi (1817—1889), etc.

Nicht unerwähnt dürfen wir den russischen Mathematiker J. Somoff (1815—1876) lassen, welcher insbesondere die kinematische Geometrie um schöne Theoreme und Constructionen bereichert hat.

Die wissenschaftlich wertvollen Errungenschaften dieser stattlichen Schar von Mathematikern, deren geniale Forschungen in der Geschichte der Mathematik für immerwährende Zeiten ehrenvolle Plätze einnehmen werden, bilden mit den Forschungen der berühmten Mathematiker in der Gegenwart einen imposanten Aufbau, den das ins Unendliche sich erhebende Prachtgebäude der Geometrie in diesem Jahrhunderte erhalten hat. — — —

VI.

Die wissenschaftliche Pflege der darstellenden und projectiven Geometrie in Österreich.

Die ersten Pflegestätten der Geometrie waren im Abendlande die im Mittelalter gegründeten Klosterschulen (Scholae monasticae, claustrales).[1]) Die älteste unter ihnen, die „Schola Sancti Petri" in Salzburg, ist die Wiege des österreichischen Gymnasiums. Schon im sechsten Jahrhundert (etwa 540) kam der hl. Rupert, ein Prinz aus fränkischem Hause unter König Childebert I. Bischof von Worms, nach Baiern, wo er den Herzog Theodo und viele Bewohner des noch von Heiden bewohnten Landes zum Christenthum bekehrte.[2])

Zwei Jahre später (542) kam er in die Gegend von Salzburg, an jene Stelle, wo einst das von den Herulern zerstörte römische Juvavum gestanden und erbaute auf den Trümmern eines Mercurtempels am Nonnberg das erste Kloster und eine Kirche, welche jetzt Kreuzkapelle genannt wird. Auf einer seiner Bekehrungsreisen in die benachbarten Alpenländer gründete er im Jahre 555 auf den Trümmern des Lauriacum der Römer (Lorch bei Enns) das älteste Stift in Österreich, die Abtei St. Florian, an jener Stelle, wo der im römischen Heere dienende Florian von den ersten Christen begraben wurde, nachdem er wegen seines standhaften Bekenntnisses während der Christenverfolgung unter Kaiser Diocletian im Jahre 303 von den römischen Soldaten in der Enns ertränkt wurde. Mit dem Kloster am Nonnberge gründete der hl. Rupert — ein Ordensjünger der Regel des hl. Martin (geb. 316 in Panonien als Sohn eines heidnischen Vaters, gest. 397 als Bischof von Tours) — in

---

[1]). Montalembert, Les moins d'Occident. Tom. I.—VII. Ve édit. Paris 1874—78. — „Die Mönche des Abendlandes," vom Grafen Montalembert genehmigte deutsche Ausgabe von P. Karl Brandes, Benedictiner in Einsiedeln. I.—VII. Bd. Regensburg 1860—1878. — S. a. die Werke von Weber (Stuttgart 1834) u. Fehr (Tübingen 1845). — M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I. Bd. 704—750. Leipzig 1880.

[2]) Vergl.: Franz Anthaller, Die Geschichte der Rupertus-Frage und deren Lösung. Salzburg 1885 und Mabillon, Annales Ord. Soc. Bened. (Jahrbücher des Benedictiner-Ordens). Tom. I. Paris 1703, sowie Markus Hansiz, Germania sacra. Augsburg 1727 u. 1755. — S. a.: W. Waltenbach, Über das Zeitalter des hl. Rupert. Archiv für Kunde österr. Geschichtsquellen. II. Bd. S. 506. Wien 1850 u. F. Blumberger, Über die Frage vom Zeitalter des hl. Rupert. Ibid X. Bd. S. 331. Wien 1853; XVI. Bd. 1856.

Salzburg die „Schola Sancti Petri", die erste humanistische Bildungsstätte unseres Vaterlandes. Die „Schola St. Petri," nach Ruperts Tode (etwa 582) „Schola Sancti Ruperti" genannt, entwickelte sich im VIII. Jahrhundert unter der umsichtigen Leitung der Benedictiner zu einer hervorragenden Bildungsstätte des Landes und erhielt am Anfang des IX. Jahrhundertes (803) den Besuch Kaiser Karl des Großen und seines gelehrten Rathgebers Alcuin, welche sich beide über ihre hervorragenden Leistungen lobend aussprachen. Diese Schule war die erste Pflegestätte der exacten Wissenschaften in Österreich. [1])

Leider zerstörte ein am 5. Mai 1127 plötzlich ausgebrochener Brand das ganze Kloster mit seinen wertvollen Manuscripten und geistigen Schätzen. Nur wenige Documente konnten gerettet werden.

Doch gibt uns ein aus dem XII. Jahrhundert stammendes Pergamentmanuscript „Rudbertus Abbas Tuiciensis de victoria verbi Dei", welches in der Bibliothek des Benedictiner-Stiftes zu St. Peter in Salzburg aufbewahrt ist, genügenden Aufschluss über das wissenschaftliche Leben in dieser Klosterschule. Im Anhange zu den in der Bibliothek von St. Peter verzeichneten Werken befindet sich auch das Verzeichnis der Lehr- und Schulbücher (libri scholares istius ecclesiae). Aus diesem Manuscript ersehen wir, dass neben den classischen Werken von Homer, Horatius, Juvenalis, Ovid, Plato, Salustius, Virgil, etc. auch Geometria Euclidis, Expositio super artem Euclidis, Boëtius de contemtu, Beda de arte metrica, Prisciani constructiou, Metaphisica, Libellus de septem planetis, Heremannus contractus super astrolabium, etc. eine eifrige Pflege fanden. Diese als „Libri scholaris" bezeichneten Werke bezeugen uns in sprechender Weise, dass die Klöster des Mittelalters mit Recht den Namen „Studienklöster" (monasteriae studiorum) führen konnten. [2]) Sie waren also die ersten Pflegestätten der synthetischen Geometrie. Schon im Jahre 1150 kam das Benedictinerstift St. Peter in Salzburg in den Besitz einer Handschrift über Geometrie, welche der berühmte

---

[1]) S.: P. A. Prennsteiner, Die Geschichte des Gymnasiums in Salzburg. (I. Programm des k. k. Gymnasiums in Salzburg 1851. S. 1–15). S. a.: Werner, „Alcuin und sein Jahrhundert," Wien 1881 u. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I. Bd. S. 709. Leipzig 1880.

[2]) Anmerkung: Schon nach der Ordensregel des hl. Benedict war es jedem Mönch des im Jahre 529 am Monte Cassino gegründeten Klosters gestattet, täglich vier Stunden zum Studium zu verwenden — eine Vorschrift — die später jeder Mönch bis zu seinem 50. Lebensjahre als Pflicht zu erfüllen hatte. Deshalb wurde nach der Gründung eines jeden Klosters sofort eine Bibliothek angelegt. Berühmte Bibliotheken besitzen das Benedictinerstift St. Peter in Salzburg (jetzt

Lehrer der Klosterschule zu Rheims, Gerbert (gest. 1003 als Pabst Sylvester II.), um 982 verfasst hatte.[1]) P. B. Pez gab Gerberts Geometrie im Jahre 1721 heraus.

Die ersten Anwendungen der Geometrie zur Darstellung dreidimensionaler Raumgebilde in der Ebene finden wir in den Plänen oder Rissen der Baukunst. Ihre Geschichte in Österreich lässt sich mit Sicherheit nur bis in die Mitte des XII. Jahrhundertes verfolgen. Auf keltischem Boden begann vor nicht ganz zweitausend Jahren das geschichtliche Leben Wiens als römische Ansiedlung. Als Vindobona, die „Gutes Verheißende," hatte sie wie alle längs der Donau gelegenen Castelle, die nördlichen Grenzen des römischen Weltreiches gegen die Einfälle der Barbarenstämme zu schützen. Mit dem Untergange der Römerherrschaft verlor Vindobona seine Bestimmung als befestigter Grenzort. Von dem römischen Wien sind keine über den heutigen Boden emporragende Baureste erhalten geblieben und kein einziges erhaltenes Bauobject gibt uns Aufschluss darüber, bis zu welcher Vollendung die Römer hier ihre Kunstformen und ihre Bauweise zur Geltung gebracht haben. Ähnliches gilt von den römischen Colonien Lentia (Linz), Lauriacum (Lorch bei Enns), Arelapa (Pöchlarn), Comagena (Tulln), Juvavium (Salzburg), Aquae Panoniae (Deutsch-Altenburg), Carnuntum (Petronell), Ovilabis (Wels), Terioli (Schloss Tirol), etc. Umfangreich sind hingegen die Ruinen und Überreste des Palastes in Salona bei Spalato in Dalmatien, welchen der römische Kaiser Diocletian von 300 bis 305 erbauen liess und wo er auch bis zu seinem Tode (313) zurückgezogen lebte.

Mit der Bekehrung der Heiden in Panonien und Noricum zum Christenthum beginnt auch der Kirchen- und Klosterbau in den einzelnen Provinzen. Schon im fünften Jahrhundert kam der Mönch Severin, der Apostel der Noriker (geb. etwa 420, gest. 482), in die Donaugegenden, nahm in Ufer-Noricum, den jetzt österreichischen und bairischen Ländern Aufenthalt und erbaute bei Favianis, dem heutigen Wien, eine Kapelle. In demselben Jahrhundert entfaltete der hl. Maximus (gest. 477) aus seiner Einsiedelei am Mönchsberge bei Salzburg sein Wirken als

40.000 Bände, 600 Incunabeln u. 224 Pergamentmanuscripte), die Benedictinerabtei Göttweih (40.000 Bände, 1200 Incunabeln und 700 Manuscripte), Kremsmünster (60.000 Bände. 2000 Incunabeln u. 1700 Manuscripte), Admont (80.000 Bände, 800 Incunabeln u. 1000 Manuscripte), Mölk (30.000 Bände), Augustiner Chorherrnstift Klosterneuburg (30.000 Bände, zahlreiche Kunstanfänge und erste Druckschriften und 1250 Manuscripte), etc.

[1]) Vergl.: „Oeuvres de Gerbert," par A. Olleris. Clermont et Paris 1867. — S. a.: Dr. H. Weissenborn, „Gerbert." Beiträge zur Kenntnis der Mathematiker des Mittelalters. Berlin 1888.

Glaubensbote zu einer Zeit, wo das römische Juvavum von den Herulern zerstört wurde.

Hundert Jahre später gründete der hl. Rupert am Nonnberge das erste Kloster und 777 stiftete Herzog Thassilo die berühmte Benedictinerabtei Kremsmünster. Im Jahre 884 soll der Erzbischof von Panonien, Method (gest. 885), die von Mojmar oder Mojmir, dem ersten christlichen Fürsten von Mähren, am Petersberge in Brünn erbaute Kirche in Gegenwart des mächtigen Fürsten des großmährischen Reiches, Svatopluk, geweiht haben. Dass die Bauart der heidnischen Germanen vor der Gründung der römischen Colonien eine rohe und höchst dürftige war, wissen wir von Tacitus.[1]) Die moralische Anregung, welche das Christenthum brachte und die physische Anregung, welche Karl der Große (742—814) gab, verliehen den todten Massen frische Kraft und erweckten sie zu neuem, geistigen Leben.

Der prachtliebende Kaiser, der in Italien die Kunst schätzen gelernt hatte, bot alles auf, um sein geliebtes Aachen und sein ganzes Reich mit Kirchen und Klöstern zu schmücken.[2]) In den Kirchenbauten entfalteten sich zuerst die verschiedenen Arten des Baustiles. Den in den ersten neun Jahrhunderten zumeist in Holz ausgeführten Kapellen und Klöstern der Benedictiner und anderer Ordensgeistlichen folgten im zehnten bis dreizehnten Jahrhundert die in Stein ausgeführten Kirchen und Dombauten des romanischen Baustiles und vom dreizehnten Jahrhundert an die herrlichen Monumentalbauten des gothischen Stiles.

Aus der Periode des romanischen Baustiles erwähnen wir das Kloster am Nonnberg in Salzburg aus dem Anfang des XI. Jahrhundertes, die Kirche des Stiftes zu St. Peter (1127—1131), den Dom zu Salzburg (1182 vollendet), die berühmte Benedictinerabtei Göttweih (1072), das Benedictinerstift Admont (1074), das Kloster Mölk (1089), das Augustiner-Chorherrenstift Klosterneuburg (1108); ferner den alten Dom zu Gran (um 1000), die Martinskapelle am Wischehrad in Prag (1100) und die Stiftskirche St. Georg auf dem Hradschin (1050 u. 1143), die St. Mauritiuskirche in Olmütz (aus dem XI. Jahrh.), den Dom zu Gurk, die Kapelle auf der Zenoburg bei Meran, etc. etc.[3]) Die ältesten, im

---

[1]) S.: Tacitus Germania. Cap. XVI. — S. a.: G. Freiherr von Bernewitz, Über die Entstehung der Baukunst bei den Deutschen im allgemeinen. Försters Allgemeine Bauzeitung. X. Jahrg. S. 385. Wien 1845.

[2]) S.: G. Freiherr von Bernewitz, Die Baukunst in Deutschland von Karl dem Großen bis zum Anfang des Spitzbogenstils. Ibid. S. 394.

[3]) S: Franz Kugler, Geschichte der Baukunst: „Die Architektur des romanischen Stiles." II. Bd. Tirol und Salzburg, S. 514; die österreichischen Lande, S. 519; Böhmen, S. 545. Stuttgart 1858.

romanischen Stil erbauten Kirchen Wiens sind die zu St. Ruprecht, St. Peter, Unserer lieben Frau am Gestade, St. Michael, das Kloster der schottischen Benedictiner und die alte St. Stephanskirche, welche im Jahre 1137 vom Markgrafen Leopold IV. und seinem Bruder Adalbert dem Bischof Regimbert von Passau, in dessen Sprengel sie noch lag, übergeben wurde. Diese Kirche, unter deren Baumeistern Octavianus Volkhner auf den Tafeln der alten Bauhütte zu St. Stephan genannt wird, war dem romanischen Baustil entsprechend mit einem Tonnengewölbe bedeckt, welches bei den großen Bränden in den Jahren 1258 u. 1276 theilweise einstürzte. Von diesem Bauwerk sind nur noch die beiden sogenannten Heidenthürme des St. Stephansdomes erhalten.[1])

Die in der zweiten Hälfte des XII. Jahrhundertes von den Nordlanden Frankreichs ausgehende Umbildung der Architektur des occidentalischen Mittelalters, der Übergang des romanischen in den gothischen Baustil, brachte frisches Leben in die Baukunst. Eine größere Zahl von Kirchen gehört dem Übergangsstile an.[2]) Als ein hervorragendes Werk der Wiener Bauhütte im vollständig gothischen Stile repräsentiert sich die in den edelsten Formen ausgeführte Marienkirche am Gestade, deren Bau 1340 begann. Als Meister werden genannt Michael Weinwurm (1394), Konrad Rampersdorfer (1403), Dietrich Entzenfelder (1407) und Benedict Kölbl, der 1534 den Thurmbau zum Abschluss brachte. Demselben Stile gehört die Minoriten- und Augustinerkirche an. Bei der ersteren wirkten als Bauleiter der Minorit Nicolaus (1385), der Franziskaner Hans und der französische Minorit Jakob; bei letzterer Meister Dietrich Landtner aus Baiern. Die wichtigste Schöpfung der Wiener Bauhütte ist der Dom zu St. Stephan, das bedeutendste kirchliche Bauwerk der Residenzstadt Wien. Herzog Rudolf IV., der Stifter, vollzog am 11. März 1359 mit eigener Hand den ersten Schlag zur Grundveste und legte am 7. April den ersten Stein zum Baue, den er einem anspruchslosen, aber erfahrenen Meister, Wenczla von Klosterneuburg, übertragen hatte. Das Jahr 1359 gilt auch gewöhnlich als das der Grundsteinlegung zu dem Hochthurme (137·8 *m*). Auf Meister Wenczla, den geistigen Urheber und ersten Leiter des Dombaues zu St. Stephan, der bis 1404 den Hochthurm zu

---

[1]) S.: Franz Tschischka, Der Stephansthurm in Wien, Wien 1832 und A. R. von Perger, Der Dom zu Sanct Stephan, Triest 1854.

[2]) S.: Franz Kugler, Geschichte der Baukunst. (Monumente des Übergangstiles) II. Bd. S. 529. Stuttgart 1858. — S. a.: „Die Kloster im Norden und Süden“ und „Übersicht des Klosterbaues.“ Ibid. IV. Bd. S. 186 u. 187. Stuttgart 1867.

zwei Dritttheilen emporgebaut hatte, und seit 1388 von Meister Ulrich Helbling und zuletzt von Peter Prachawitz unterstützt wurde, folgte Meister Hans von Prachatic als Dombaumeister, dem es am 3. October 1433 beschieden war, den Hochthurm durch die Aufsetzung der Rose und des Knopfes zu krönen. Im Jahre 1444 wurde unter Meister Hans Puchsbaum der Grundstein zu dem nördlichen Thurme gelegt. Die herrliche Kanzel im St. Stephans-Dome ist eine Schöpfung des Meisters Anton Pilgram aus Brünn, mit dem im Jahre 1511 die mittelalterliche Baugeschichte dieses herrlichen Monumentalbaues abschliesst. [1])

Von den übrigen im gothischen Stil ausgeführten kirchlichen Bauwerken erwähnen wir noch die deutsche Ordenskirche St. Maria am Lech in Graz (1283), jene zu Friesach, die Minoritenkirchen zu Pettau (1286) und Villach, Maria Wörth am See in Kärnthen, die Domkirche zu St. Veit und die Karlshofer-Kirche in Prag (1346—78), die Stadtpfarrkirche St. Jakob (1314 — 1480) und die Domkirche zu St. Peter (XV. Jahrh.) in Brünn, die Metropolitankirche zu St. Wenzel in Olmütz, etc.[2])

Mit und auch schon vor den ersten Klöstern und Kirchen erhoben sich auf den die Thäler beherrschenden Bergen als befestigte Wohnstätten die Burgen und Schlösser der Ritter, Markgrafen und Fürsten. Ihnen folgten die Hofburgen und Residenzen der Herrscher und Kirchenfürsten und in den späteren Jahrhunderten die Lustschlösser und Paläste der Renaissance. Die ersten befestigten Wohnstätten und die aus Holz und Steinen ohne Mörtel aufgeführten Burgen der deutschen und slavischen Heerführer und Fürsten wurden in den ersten Jahrhunderten den römischen, aus Stein erbauten Castellen nachgebildet.

Schon im Jahre 700 besass Krok die Hochburg Wyschehrad in Böhmen und im achten Jahrhundert erhob sich auf dem Spielberg die Brünner-Burg (Castrum brunense), welche der Sitz der Markgrafen von Mähren war. Sie ist bekannt durch ihre heldenmüthige Vertheidigung seitens der Brünner Bürger und Studenten im Jahre 1645 gegen die Schweden. Im neunten Jahrhundert (864) spielte die Burg Dovina (Děvin, das heutige Theben) in dem Kriege des Frankenkönigs Ludwig dem Deutschen gegen Rastiz (Rastislav), den Fürsten von Mähren, eine hervorragende Rolle und fünf Jahre später (869) verbrannte ein

[1]) S.: Franz Tschischka, Der Stephansthurm in Wien, Wien 1832 und A. R. von Perger, Der Dom zu Sanct Stephan, Triest 1854. — S. a: Schmidl, Kunst und Alterthum in Österreich. Wien 1846 u. Franz Kugler, Geschichte der Baukunst. II. Bd. S. 529 u. III. Bd. S. 307 u. 319. Stuttgart 1858 u. 1859.

[2]) „Die Architektur des gothischen Stiles.“ Die österreichischen Lande, Ibid. Bd. III. S. 303 u. 319. Böhmen S. 274 u. 309. Salzburg und Tirol S. 345—347.

fränkisches Heer die vielbewunderte Hauptfestung des Rastiz, das bekannte Velehrad in der Nähe von Ung.-Hradisch in Mähren.[1] Hier — in diesem vielgepriesenen Königssitz und Erzbisthum des großmährischen Reiches — wirkten seit 863 auch die beiden Glaubensboten Cyrill (Constantin) und Method, zwei der slavischen Sprache vollkommen mächtige Söhne des Patriziers Leo, welche sich der Fürst Rastislav von Mähren vom griechischen Kaiser Michael erbeten hatte. In diese Zeitperiode fällt auch die Erbauung des steinernen Burgschlosses Buchlau, einer alten slavischen Župen- oder Gauburg, an deren Stelle vor der Christianisierung Mährens die Heiden schon ein hölzernes Castell erbaut hatten. Die Thürme dieses interessanten Bergschlosses, welches im XV. Jahrhundert von den Cymburgen bewohnt wurde, stammen aus dem Anfang des XI. Jahrhundertes[2]).

Schon vor dem Jahre 1000 stand in Mölk an der Donau das Schloss der Markgrafen von Babenberg, welches 1089 von Leopold II. in ein Kloster umgewandelt wurde. Auf seinem Platze steht heute die berühmte, 1701—38 neuerbaute Benedictiner-Abtei mit ihrer 30.000 Bände zählenden Bibliothek. Eine hervorragende historische Vergangenheit besitzt die Markgrafenburg am Leopoldsberge bei Wien, zu welcher Leopold der Heilige im Jahre 1101 den Grundstein legte. Sein Sohn Heinrich II., Jasomirgott, baute sich 1160 eine Burg „Am Hof“ und Herzog Leopold VII. erbaute sich um 1220 eine neue Burg an jener Stelle in Wien, wo jetzt die kaiserliche Hofburg steht. Diese Herzogsburg, der „Schweizerhof,“ eines der bedeutendsten Bauwerke der Stadt Wien, welches in dem größten Theile seiner Hauptmauern und in den einzelnen Baupartien noch in unsere Tage erhalten ist, bildete einen wichtigen Bestandtheil der mittelalterlichen Befestigung und war die Residenz des glorreichen Herzogs Leopold, der den ersten Wohnsitz der Babenberger „Am Hof“ aufgab und um 1221 diese neue Burg bezog. Sie blieb bis Kaiser Friedrich III. der ständige Sitz der österreichischen Herzoge. Die erhaltenen Nachrichten und Zeichnungen stellen diese Hofburg als einen mächtigen vierseitigen, im Rechteck

---

[1]) S. d. Prachtwerk „Die österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild.“ Herausgegeben auf Anregung und unter Mitwirkung Seiner kaiserlichen und königlichen Hoheit des durchlauchtigsten Kronprinzen Erzherzog Rudolf. XVI. Bd. (Mähren und Schlesien). S. 72. Wien 1896.

[2]) S. d. Prachtwerk „Vergangenheit und Gegenwart der Herrenburg Buchlau“ von Leopold Grafen Berchtold, Brünn 1892 u. „Die Burg Buchlau“ vom Arch. Prof. Aug. Prokop in den Mittheilungen der k. k. Central-Commission zur Erhaltung der Baudenkmale. Jahrg. 1892, S. 209 sowie in Försters Allgemeiner Bauzeitung, 58. Jahrg., S. 68. Wien 1893.

ausgeführten Bau dar, mit einem ebenso mächtigen vierseitigen, in die Baugruppe organisch einbezogenen Thurm an jeder Ecke [1]). Gegen Ende des zwölften Jahrhundertes (etwa 1180) liess Friedrich Barbarossa das Schloss zu Eger als kaiserliche Pfalz bauen mit einem noch jetzt als Ruine in voller Kraft strotzenden Thurm, den man als Römerwerk schon dem Drusus zuschreiben wollte. Eine stattliche Zahl herrlicher Burgen erhob sich im eilften, zwölften und in den folgenden Jahrhunderten auf den Gipfeln unserer schönen Alpen als befestigte Wohnsitze adeliger Geschlechter. Wir erinnern nur an die Burg Mödling aus dem eilften Jahrhundert, Sitz des Herrscherstammes der Babenberger; ferner an die Burg Dürrenstein oder Tyrnstein, auf welcher bis ins XII. Jahrhundert ein eigenes Dynastengeschlecht und nach ihnen die Hunde von Kuenring bausten; wir nennen die Burgen Petersberg, Lavant u. Geiersberg bei Friesach (1073); ferner Aggstein, einst Sitz des an der Donau gefürchteten Raubritters „Schreckenwald." Wir erinnern an die im oberen Murthale reizend gelegene Frauenburg, im XIII. Jahrhundert Eigenthum des Minnesängers Ulrich von Lichtenstein; an Landskron am Ossiachersee und Hochosterwitz, die größte und schönste Burg Kärnthens, der gräflichen Familie Khevenhüller gehörig. Historisch berühmt ist Schloss Tirol, das Terioli der Römer und sprechende Zeugen sind die siebzehn Burgen in der Umgebung von Meran. In Prag, dessen Gründung auf dem Hradschin etwa im J. 700 der Königin Libussa — der Tochter Kroks, des Herrn vom Wyschehrad — zugeschrieben wird, gehören der schwarze und der weiße Thurm, Überreste der 22 Thürme, welche die alte Przemysliden-Burg schützten, dem XI. Jahrhundert an. In die gleiche Zeitperiode gehört die Wyschehrader Citadelle mit der 1070 gegründeten Peter- und Paulskirche. König Wenzel I. und sein Sohn Przemysl-Ottokar, der 1247—1253 als Markgraf und von da an bis zur Schlacht bei Jedenspeugen (1278) als König das Scepter Mährens führte, ließen nach dem Einfalle der Mongolen (1241) zum Schutze des Landes die Burgen Alttitschein (Castrum Tycin), Stramberg, Wigstein (Witekstein), Helfenstein, Sternberg, Lobenstein, Hugenswald (Hochwald), Engelsberg, etc. erbauen, deren Ruinen noch heute die Gipfel der Karpathen und Sudeten krönen. Sie waren einst herrliche Besitze der mächtigsten Adelsgeschlechter des Landes, der Krawaře, Cimburge und Žerotine.

[1]) S. d. Prachtwerk „Die österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild." Herausgegeben auf Anregung und unter Mitwirkung Seiner kaiserlichen und königlichen Hoheit des durchlauchtigsten Kronprinzen Erzherzog Rudolf. IV. Bd. (Wien und Niederösterreich). S. 51 (Wiens architektonische Entwickelung) — Wien 1886.

Während der kunstsinnige Herzog Rudolf der Stifter mit dem Monumentalbau des herrlichen St. Stephansdomes ein unvergängliches Denkmal deutscher Baukunst in Angriff nahm, entfaltete Kaiser Karl IV. in Prag, das er zur Haupt- und Residenzstadt des heiligen römischen Kaiserreiches deutscher Nation erhoben hatte, eine Bauthätigkeit, welche ohne Zweifel das anregende Vorbild für den hochbegabten, jungen Herzog war. Unter Karl IV. wurden in der Zeit von 1346 bis 1378 die angesehensten Monumentalbauten des Mittelalters in Prag ausgeführt.[1]) Er berief den Meister Mathias von Arras aus Flandern, welcher den Dom zu St. Veit in französischer Gothik in Angriff nahm, den nach seinem 1352 erfolgten Tode Meister Peter von Gmünd aus Schwaben — genannt Peter Arler — weiterführte. Am 9. Juli 1357 legte Karl IV. den Grundstein zu der auf sechzehn Bogen ruhenden Kaiser Karlsbrücke, die 1502 vollendet, ein achtunggebietendes Werk der Ingenieurkunst jener Zeit ist. Peter Arler entwarf den Bauplan und leitete den Brückenbau in seiner ersten Periode.

Kaiser Karl IV. setzte seinem segenbringenden Walten als „Vater des Vaterlandes“ die geistige Krone auf und gründete im Jahre 1348 in Prag die Universität, die erste in Deutschland.[2]) Acht Jahre später (1356) wurde die Universität in Heidelberg gegründet und 1365 erhielt Wien vom Erzherzog Rudolf, dem Stifter, die Alma mater Rudolphina.[3]) Nach dem Muster der Prager Universität rief Kasimir der Große, König von Polen, im Jahre 1364 die Universität Krakau ins Leben.

Mit dem Ausgang des XV. und dem Beginn des XVI. Jahrhundertes kam aber die italienische Renaissance in den Ländern Österreichs zur vollen Blüthe. Die kunstliebenden Herrscher aus dem Hause Habsburg riefen frühzeitig berühmte Meister der Renaissance aus Italien und Deutschland in ihre Dienste und schöne Zeiten blühender baulicher Entwickelung sind in allen Theilen des Reiches zu verzeichnen.

Als hervorragende Meister der Renaissance nennen wir Albrecht Dürer, Burgkmaier und Peter Vischer unter Maximilian I. (1493—1519), Jacopo, Anthoni und Hans de Spazio, den Venetianer Joan Maria, Paolo della Stella, ferner die deutschen Architekten Hermes Schallantzer, (1542—61 Oberbaumeister der

---

[1]) S.: „Prag und seine Baukunst.“ Försters Allgemeine Bauzeitung. X. Jahrg. S. 15—38. Wien 1845 u. Franz Kugler, Geschichte der Baukunst. III. Bd. S. 309. Stuttgart 1859. — „Die österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild.“ XIV. Bd. (Böhmen) S. 176. Wien 1896.

[2]) S.: W. Tomek, Geschichte der Prager Universität. Prag 1849.

[3]) S.: Josef Ritter von Aschbach, Geschichte der Wiener Universität. Wien 1865 u. 1877.

Stadt Wien) Augustin Hirschvogel, Bonifacius Wolmuet, der Mailänder Francesco de Poco und der Kärnthner Domenico Illalio unter Kaiser Ferdinand I. (1521 — 1564). Noch 1568 wird ein Italiener Continelli als Hofbaumeister Maximilian II. genannt. Eine hervorragende künstlerische Rolle entfalteten nach dem durch den dreißigjährigen Krieg im XVII. Jahrhundert verursachten Stillstande der Bauthätigkeit die Wiener Architekten J. B. Fischer von Erlach (gest. 1723 als Hofbaudirector) und Lukas von Hildebrandt mit dem Italiener Martinelli im XVIII. Jahrhundert unter den Kaisern Josef I. und Karl VI. In dieser fruchtbaren Bauepoche kam insbesondere der durch Bertini und Nobile begründete classische Stil der Architektur in Wien zu seiner vollen Geltung.

Der Renaissance gehören an die den Schweizerhof umgebenden Theile der kaiserlichen Hofburg, ihr gegen den äußeren Burgplatz gerichteter, 1665—1668 von Ottavio Burnaccini erbauter Flügel und die sogenannte Stallburg (1529); der Bischofshof (1640) mit seinem mächtigen Arcadenhof, die von der Künstlerfamilie Carlone erbauten Wiener Paläste und die jetzt verschwundenen Stadtthore. In diese Bauperiode gehören das Schloss Ambras in Tirol (1563), die Schalaburg (1530—1601), ein herrliches Schloss bei Mölk; das Belvedere in Prag, als Ferdinandeisches Lustschloss nach den Plänen des italienischen Architekten Paolo della Stella (1536—58) erbaut und das Palais des Herzogs von Friedland, Albrecht von Waldstein (1623). Ein edler Renaissancebau ist das prachtvolle Schloss des Fürsten Porzia bei Spittal an der Drau (1537), und ein Prachtstück italienischer Renaissance besitzt Wiener-Neustadt in dem Hauptportal des von Kaiser Ferdinand I. (1524) erbauten Zeughauses. Wir nennen noch das Grazer Landhaus, dessen Anfänge dem XV. Jahrhundert angehören.[1]) Die classischen Hauptwerke des Wiener Hofbaudirectors J. B. Fischer von Erlach sind die Peterskirche (1702) und die Karlskirche (1715) mit ihren interessanten Kuppelbauten; ferner die Entwürfe für den Ausbau der kaiserlichen Hofburg und für das Lustschloss in Schönbrunn (1696). Diesen unter Kaiser Leopold I. von Erlach ausgeführten Schlossbau ließ Kaiserin Maria Theresia (1744--50) umbauen. Einen Glanzpunkt der Kaiserstadt bildet bekanntlich das in Roccocostil ausgeführte Belvedere, welches Hofbaumeister Lukas von Hildebrandt (1693—1724) für den Prinzen Eugen von Savoyen erbaute. Es diente dem Helden bis zu seinem Lebensende (1736) als Aufenthaltsort und kam später in den Besitz des Allerhöchsten Kaiserhauses.

---

[1]) S.: Wilhelm Lübke, Geschichte der deutschen Renaissance. (Die österreichischen Länder). S. 563—644. Stuttgart 1873.

Die Geschichte dieser stattlichen Reihe von Bauwerken, die wir nur flüchtig skizzieren konnten, repräsentiert uns einen dreizehn Jahrhunderte umfassenden Abschnitt der Kulturgeschichte Österreichs.[1]) Von den in Stein gemeißelten Zellen des hl. Rupert und der Einsiedelei des hl. Maximus, von ihren ersten hölzernen Kapellen bis zum majestätischen Dom, von der armseligen Holzhütte bis zu den herrlichen Schlössern der Renaissance und dem modernen Palast vergiengen viele Jahrhunderte bis die technische Kunst ihre hohe Entwicklungsstufe erreichte. Die Baugeschichte dieser architektonischen Werke gibt uns ein sprechendes Bild von der allmäligen und stufenweise aufwärts steigenden Entwickelung des technischen Lebens in Österreich.

Blicken wir in die ersten Jahrhunderte dieser Baugeschichte, so steht vor uns der Mönch — zumeist ein Benedictiner — als erster Baumeister, der sich mit seinen Genossen und unterstützt von seinen Bekehrten ein hölzernes Kloster mit einer Kirche baut.[2]) Den Mönchen und insbesondere dem Orden der Benedictiner ist es zu verdanken, dass nach dem Untergange des römischen Reiches die wissenschaftlichen Werke nicht ganz der Wuth der Barbaren zum Opfer fielen, und dass die Wissenschaften in ihren Klöstern bis in das XIII. Jahrhundert nicht bloß einen dauernden Schutz, sondern auch eine liebevolle Pflege fanden. Aber die Benedictiner waren in den ersten Jahrhunderten des Christenthums nicht blos berühmte Männer in den Wissenschaften, sie waren auch unsere ersten Baumeister und Lehrer in dem Baufache. Als in Deutschland das Christenthum festen Fuss gefasst hatte, und man daran gieng, durch häufige Erbauung von Kirchen demselben äußere Gestalt zu geben, bildeten sich zu eigenem Zwecke an allen bedeutenden

---

[1]) S. d. Prachtwerk „Die österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild." Herausgegeben auf Anregung und unter Mitwirkung Seiner kaiserlichen und königlichen Hoheit des durchlauchtigsten Kronprinzen Erzherzog Rudolf und nach seinem am 30. Jänner 1889 erfolgten Tode unter dem Protectorate Ihrer durchlauchtigsten Frau Kronprinzessin-Witwe Erzherzogin Stephanie. I.—XVI. Bd. Wien 1886—1896.

[2]) Anmerkung: So waren die Kirche der berühmten Abtei Hirschau (837), der Mainzer Dom von Willigis (990) und die Marienkirche zu Hamburg (1024) von Holz erbaut. Die erste größere steinerne Kirche wurde in der Zeit von 820—827 unter dem ersten Dogen Angelo Partecipazio erbaut. Es ist die Kirche San Pietro jetzt San Zaccaria, auf der Insel Olivolo bei Venedig. Dieser Doge liess sich im Jahre 820 an der Stelle des jetzigen Dogenpalastes ein Wohnhaus erbauen, welches das erste steinerne Wohnhaus in Venedig war. Der herrliche Prachtbau des Pallazzo ducale in seiner jetzigen Gestalt wurde 1350 an der Südseite in Angriff genommen, 1477 theilweise erneuert und 1550 im maurisch-gothischen Stil vollendet. (Selvatico, Sulla architettura in Venezia u. F. Kugler, Geschichte der Baukunst. III. Bd. S. 575. Stuttgart 1859).

Benedictinerklöstern und Stiften Bauhütten, in welchen die jüngeren Mönche und die dem Orden noch nicht angehörigen Laienbrüder (fratres barbatros oder conversi) nicht blos den nothwendigen praktischen Unterricht erhielten, sondern in kurzen Vorträgen an Sonn- und Feiertagen vom Meister auch theoretisch herangebildet wurden. Es ist zweifellos, dass auch die noch in Holz bauenden Mönche das aus zehn Büchern bestehende Werk des römischen Baumeisters M. Vitruvius Pollio über Architektur kannten, da dieses erste Werk über Baukunst schon im Jahre 14 vor Christi vollendet und dem Kaiser Augustus zugeeignet war. Es ist auch einleuchtend, dass schon die in Holz ausgeführten Kirchen und Klöster in ihren Holzverbindungen und mitunter schon recht complicierten Holzconstructionen geometrische und besonders stereometrische Kenntnisse der als Baumeister wirkenden Mönche voraussetzten und dass bei größeren Bauten, besonders bei den im eilften Jahrhundert beginnenden umfangreichen Steinbauten dem in Angriff zu nehmenden Bauwerke ein geometrisch wohl durchdachter Plan mit Grundriss und Aufriss, sowie mit den nothwendigen Kreuz-, Quer- oder Seitenrissen zugrunde liegen musste. Schon Vitruvius, der berühmte Agrimenser Roms, hatte von einem Baumeister verlangt: „Darumb ist vonnöten, daſs ein fürtrefflicher, berühmter vollkommener Bawmeister für das aller erst gelehrt sey und der Schrifft wohl erfahren. Er soll auch des Reissens und Malens einen guten Bericht haben, auch der Geometrey, das ist deſs Zirkels und Richtscheidts gerechtigkeit, deſsgleichen der Perspective und Rechenkunst, der Historien oder alten geschicht soll er voraufs ziemlich Wissen haben, auch der Philosophey etwas bericht seyn, die Musica kennen und der Reglen der Artzney etwas erfahren seyn, wie auch der Satzungen der Juristen; in der Astrologey ist jm auch nicht wenig von nöten, daſs er ein wissen hab von des Himmels lauff.“[1])

Wenn auch die Baupläne des Mittelalters, wie schon der Name „Risse“ sagt, vom Standpunkte der darstellenden Geometrie mehr als Schnitte der zu erbauenden Objecte zu betrachten sind, so finden wir doch schon in denselben die ersten Anwendungen der orthogonalen Projectionsmethode. Der älteste und höchst interessante Bauriss dürfte der aus dem achten Jahrhundert stammende, von dem als Architekten berühmten Benedictinermönch Gerung auf einer fast vier Fuss langen und drei Fuss breiten Pergamenttafel ausgeführte Plan des Klosters St. Gallen sein, welches noch drei Jahrhunderte nach Karl dem

[1]) S. d. Werk von Vitruvius, herausgegeben und erklärt von Gualbert Rivius. Basel 1614. S. 5.

Großen eines hohen wissenschaftlichen Rufes sich erfreute.[1]) Schon im neunten Jahrhundert that sein Abt Salomon den historisch denkwürdigen Ausspruch: „Wahre Cultur kann nur durch geweckten Kunstsinn erreicht werden; nur dadurch kann die schwerfällige Volksmasse der Religion veredelt zugeführt und in eine wahre Lebensthätigkeit versetzt werden."

Vor dem Jahre 1000 lässt sich die Erbauung einer Kirche unter der Oberleitung eines Laien nicht nachweisen. Bis zu diesem Zeitpunkte wirkten die Laien als „fratres barbatos" (Laienbrüder, auch „conversi" genannt) oder als „oblati" (Handlanger). Erst im Laufe des XI. Jahrhundertes finden sich Laien als Leiter von Kirchenbauten, darunter Airard, der nachmalige Abt von Rheims (1005) als erster.[2])

Aus den mit den Klöstern und Stiften verbundenen Bauhütten entstanden im XI. Jahrhundert diesseits der Alpen die Klosterschulen der Baukunst und mit Beginn des XII. Jahrhundertes die Laienbauhütten mit den Genossenschaften der Baulente und den Brüderschaften der Steinmetze. Die ersten klösterlichen Bauschulen gründete Wilhelm Pfalzgraf von Scheyern als Meister der Bauhütte von St. Emeran in Regensburg (1070) und jene von St. Georg in Hirschau (1085), einem herrlichen Kloster des Schwarzwaldes, welches unter seiner Leitung als Abt und Erbauer von 23 Klöstern sich zu einem geistigen Mittelpunkt der Baukunst des eilften Jahrhundertes gestaltete. Die Klöster St. Martin und Lauen sind sein Werk und standen mit den Klöstern von Mitteleuropa, darunter mit Kremsmünster, Kladrub etc. in dem Verhältnisse der Verbrüderung oder Fraternität. Ein berühmter Baumeister war auch der Benedictiner Bernhard, aus gräflichem Geschlecht, Verfasser der „Liber mathematicalis," der die deutsche Stadt Hildesheim mit Mauern und Thürmen umgab und 992 zum Bischof dieses Bisthums gewählt wurde. Er war auch der Erzieher des Kaisers Otto III. Nicht minder berühmt war der Bischof Benno von Osnabrück als Architekt und Ingenieur, der die Fundamente des Domes zu Speyer gegen die Unterwaschungen des Rheines durch Wasserbauten schützte. Fast allgemein gehört das eilfte Jahrhundert den Bischöfen und Mönchen als Baumeister an.

---

[1]) Anmerkung: Eine Abbildung dieses mehr als tausend Jahre alten Planes findet sich in Mabillon, Annal. Bened. Tom IIe, pag. 570. Vergl. a.: Mabillon, Traité des études monastiques. Paris 1691.

[2]) S.: Heideloff, Die Bauhütte des Mittelalters, Nürnberg 1844 und Dr. Ferdinand Janner, Die Bauhütten des deutschen Mittelalters, Leipzig 1876. S. 10, etc.

Im Jahre 1157 erschien die Verordnung des Generalcapitels der Cistercienser [1]), durch welche es den Mönchen verboten wurde, für Laien zu bauen und zu arbeiten. Wohl selten hat ein Verbot eine mehr Segen bringende Wirkung erzielt als dieses. Die Laien lernten ordentlich bauen, Bauwerke zu entwerfen und die Baue selbst zu leiten; sie wurden viel rascher als man heute erwarten würde, ausgezeichnete Dom- und Kirchen-Baumeister. Dieses Verbot vom Jahre 1157 hatte eine große culturhistorische Bedeutung und wurde zum Schöpfungswort der Laien-Bauhütten, welche bald entstanden und Monumentalbauten ins Leben riefen, auf welche die Techniker auch der nächsten Jahrtausende mit Achtung blicken müssen. Der romanische Baustil mit seinen düsteren Formen muss den herrlichen Kunstformen der Gothik weichen und eine auf strengwissenschaftlichen und reingeometrischen Grundlagen sich entwickelnde Technik beherrscht die nächsten Jahrhunderte.

Selbst die 1163 im romanischen Stile begonnene Notre-Dame-Kathedrale in Paris wird bis zum Ende des XIII. Jahrhundertes im gothischen Stile ausgebaut. Ähnliches gilt vom Strassburger Münster, einem Meisterstück altdeutscher Baukunst, welches Meister Erwin von Steinbach im Jahre 1277 in Angriff nahm, und Meister Hans Hültz aus Köln zum Abschluss brachte. Im Jahre 1247 hatte Dombaumeister Gerhard von Rile, auch Ketwich genannt, den Plan zur Erbauung des imposanten Kölner Domes entworfen und begann 1248 den Bau, den Meister Arnold und sein Sohn, sowie eine ganze Reihe von berühmten Baumeistern fortsetzten, bis endlich Meister Johann von Frankenberg 1508 die Seitenschiffe einwölbte. In rascher Aufeinanderfolge werden vom Jahre 1200 von Laien imposante Kirchenbauten in Angriff genommen, so 1222 von Albero die Apostelkirche zu Köln, 1236 von Thomas von Cormont das Münster zu Amiens, 1275 von Meister Ludwig der Regensburger Dom, 1277 von Erwin von Steinbach das Strassburger Münster, 1344 von Mathias Arras und seit 1352 von Peter Arler von Gmünd der Dom zu St. Veit in Prag; im Jahre 1357 beginnt Arler den Bau der Kaiser Karlsbrücke über die Moldau und 1358 legte ein schlichter aber genialer Meister, Wenczla von Klosterneuburg, zu dem Bau unseres herrlichen St. Stephansdomes in Wien den Grundstein. Hatten sich von 1200--1300 klösterliche und weltliche Werkmeister in den Kirchenbau getheilt, so hatten vom Jahre 1300 an die weltlichen Baumeister das Übergewicht.

---

[1]) Anmerkung: Der Cistercienserorden wurde im Jahre 1098 von dem Benedictinerabt Robert aus der Champagne gegründet und 1113 vom Papste Bernhard von Clairvaux als das einzige wahre Benedictinerthum anerkannt.

Eine nothwendige Folge des erwähnten Bauverbotes vom Jahre 1157 durch das Generalcapitel der Cistercienser war auch die Gründung der Gewerksgenossenschaften der Bauleute und der Brüderschaften der Steinmetze, welche sich in Deutschland und der Schweiz vorzugsweise aus den in den Klöstern geschulten Werkleuten entwickelten und schon im zwölften Jahrhundert mit dem Aufschwung des Steinbaues eine ungeahnte Bedeutung dadurch erlangten, dass sie auf die Kunsthandwerke tonangebend wirkten und auf die Entwickelung der Städte mitunter großen Einfluss nahmen. So waren z. B. die Nachfolger Erwins von Steinbach, die beiden Werkmeister Gerlach (1349) und Cuntz (1382) als Dombaumeister zugleich Mitglieder des „Rathes in Strassburger Urkunden."

Betrachten wir die hier angeführten Monumentalbauten vom bautechnischen Standpunkte und fassen wir ihre Pläne und Risse vom Standpunkte der darstellenden Geometrie schärfer ins Auge, so gelangen wir sofort zu der Überzeugung, dass schon die Meister der altdeutschen Baukunst in der Geometrie und Stereometrie sehr bewandert waren, trotzdem die Geometrie bis zum Beginn des sechszehnten Jahrhundertes nicht die starke Seite der deutschen Mathematiker war. Selbst in den Studienplänen der Universitäten von Neapel und Paris aus den Jahren 1224 und 1254 ist von ordentlichen Vorlesungen über die Gegenstände des Quadriviums der artistischen Facultäten — Musik vielleicht ausgenommen — keine Rede, wenn auch am Ende des zwölften Jahrhundertes (etwa 1180—1199) der Magister Hugo Physicus an der Pariser Universität die ersten außerordentlichen Vorlesungen über mathematische Gegenstände Arithmetik, Geometrie und Astronomie gehalten haben dürfte. Im XIII. und XIV. Jahrhundert lag die Pflege der mathematischen Wissenschaften in den Klosterschulen der Dominikaner oder Prädicatoren und der Franziskaner, welche sich in Paris, Köln, Regensburg, Magdeburg und Leipzig niedergelassen und hier ihre ersten Schulen errichtet hatten.

Der von dem Altcastilianer Domingo de Guzman im J. 1215 gestiftete und vom Pabst Honorius III. 1216 bestätigte Orden der Dominikaner fand in seinem zweiten Ordensgeneral Jordanus (Nemorarius) Saxo, geb. in der Mainzer oder Hildesheimer Diöcese, der 1220 in Paris dem Orden beigetreten war und 1228 die dem Orden übertragene Lehrkanzel für mathematische Wissenschaften an der Universität zu Paris inne hatte, nicht blos einen ausgezeichneten Kanzelredner, sondern auch einen hervorragenden mathematischen Schriftsteller. Jordanus von Sachsen (gest. 1237) verfasste eine „Geometrica delicata" und die beiden Werke „De numeris datio" und „De triangulis." In den folgenden Jahren lehrte Johannes de Sacrobosco (John of Holywood, geb. in Holywood [Halifax], gest. 1256) an der Pariser Universität Mathematik. Er ist der Verfasser des astronomischen Werkes „De sphaera mundi", welches lange den Gegenstand der Universitäts-Vorlesungen des Mittelalters bildete.[1])

Hervorragende Schriftsteller des Dominikaner-Ordens waren ferner Vincentius Bellovacensis (Vincent de Beauvais, gest. 1265), Albertus Magnus (Graf von Bollstädt, geb. 1193 zu Lauingen in Schwaben, gest. 1280 in Köln) — der größte Naturforscher des XIII. Jahrhundertes — und Thomas von Aquino (1225 — 1274). Einen berühmten Ordensgenossen besaßen die Franziskaner in Roger Baco (1214—1294), bekannt als Physiker und Chemiker, der auch die Perspective beherrschte, welche dem Abendlande durch Übersetzungen der Optik des arabischen Mathematikers Ibn Alhaitam (lat. Alhazen, gest. 1038 in Kairo) bekannt war. Roger Baco verfasste ein Werk „Opus tertium," von dem er die Überzeugung hatte, dass er durch dasselbe jeden aufmerksamen Zuhörer innerhalb einer Woche mit der ganzen Gewalt der Geometrie bekannt machen könne. Ebenso berühmt war auch der Franziskaner Pisanus aus Sussex (Johannes Peckham, geb. um 1240, gest. 1292 als Bischof von Canterbury), dessen „Perspectiva communis" — ein Auszug aus der Schrift Alhazens — unzählig viele Auflagen erlebte und in den folgenden Jahrhunderten geradezu akademischer Leitfaden für Universitäts-Vorlesungen war. Wir erwähnen noch die Dominikaner Vitellio, Verfasser einer Perspective, Wilhelm von Mörbecke (gest. etwa 1281 als Erzbischof von Korinth) und Johannes Campanus von Novarra, Canonicus in Paris, der sich im XIII. Jahrhundert (etwa 1270) mit der Quadratur des Kreises beschäftigte.[2])

Auch in den folgenden Jahrhunderten fand die synthetische Geometrie nur eine bescheidene Pflege und noch im fünfzehnten Jahrhundert zahlte man für acht Lectionen über „Primus liber Euclidis", welche seit 1414 der Magister der freien Künste Johann von Gmunden an der Wiener Universität hielt, nur einen Groschen, für „Perspectiva communis" fünf Groschen, während man für 104 Lectionen „Physicorum" an der damaligen artistischen Facultät einen Gulden zahlen musste. Nicht besser sah es im XVI. Jahrhundert mit der wissenschaftlichen Pflege der

---

[1]) S.: M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II. Bd. S. 51—84. Leipzig 1892 und Bulaeus, Historia Universitatis Parisiensis.

[2]) S.: M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II. Bd. S. 84—96. Leipzig 1892.

synthetischen Geometrie aus. Im Jahre 1528 veröffentlichte Johannes Vögelin aus Heilbronn, ein geschätzter Professor der Mathematik an der Wiener Universität, seinen aus wenigen Druckbogen bestehenden Auszug aus der Euklid'schen Geometrie „Elementale geometricum ex Euclidis geometria", von dem er noch behaupten konnte, dass er nahe daran sei, zum Gipfelpunkte der Wissenschaften zu führen.[1])

Werfen wir nach diesen Betrachtungen über die Entwickelung und Pflege der synthetischen Geometrie im Mittelalter in Deutschland und Österreich einen Rückblick auf die seit Beginn des XII. Jahrhundertes ausgeführten Monumentalbauten dieser Länder, so wirft sich von selbst die Frage auf, wie war es den Meistern der altdeutschen Baukunst möglich, bei diesem armseligen Stande der Geometrie als Wissenschaft Bauten auszuführen, die eine bedeutende Summe von technischem Wissen von den Entwerfern der Baupläne und von den Bauleitern voraussetzten?[2])

Diese Frage lässt sich leicht beantworten: „Unsere wackeren Meister der altdeutschen Baukunst bildeten sich selbst in ihren historisch-denkwürdigen Bauhütten die technischen Wissenschaften weiter aus, und insbesondere die unentbehrliche darstellende Geometrie oder die „Gematria" — wie sie kurz genannt wurde — auf Grund der in den Klosterschulen erworbenen Euklid'schen Elemente bis zu jener Höhe, die sie zur Verfassung der wohldurchdachten Pläne ihrer Monumentalbauten brauchten. Ebenso leicht erklärlich ist, dass die für die Geschichte der darstellenden Geometrie so wichtige Anwendung der synthetischen Geometrie auf die altdeutsche Baukunst nicht literarisch verwertet und veröffentlicht wurde. Das geheime Thun und Lassen in den Klöstern war auch auf die Bauhütten übergegangen und jeder Unberufene fand die Thüren verschlossen.[3]) Die ganze geistige Schöpfung der Bauhütte war Geheimnis des Meisters und selbst der Gehilfe wurde erst dann in den Bauplan eingeweiht, wenn ihm die Leitung eines Baues vom Meister übertragen wurde.[4]) Dies geschah selbstverständlich unter dem Siegel

---

[1]) S.: M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II. Bd. S. 368. Leipzig 1892. — Kink, Geschichte der kais. Universität zu Wien. Wien 1854. Die Wiener Universität und die Gelehrten von 1520 bis 1565. Wien 1888. — Josef Ritter von Aschbach, Geschichte der Wiener Universität. I. Bd. Wien 1865. II. Bd. 1877. — Allgemeine deutsche Biographie. XL. Bd. S. 142. Leipzig 1895.

[2]) Vergl.: Dr. Guido Hauck, Die Stellung der Mathematik zur Kunst und Kunstwissenschaft. Berlin 1880.

[3]) S. d. Artikel „Geheimnisse der Hütten in Dr. F. Janners Werk „Die Bauhütten des deutschen Mittelalters, Leipzig 1876."

[4]) S.: „Die Steinmetzordnung vom Jahre 1459 und jene vom Jahre 1563 in Dr. Janner, Die Bauhütten des deutschen Mittelalters. Vergl. a. „Die Steinmetzordnung vom Jahre 1514 in Schulgrafs Dombaugeschichte (III. Bd. S. 198).

der Verschwiegenheit, trotzdem der Gehilfe schon bei seiner Freisprechung an Eides statt gelobt hatte, das Geheimnis der Bauhütte zu wahren. Selbst Pläne berühmter Monumentalbauten wurden nach vollendetem Baue vom Meister vernichtet, um dem Bauwerk seine Originalität zu wahren. Die oft mit kaiserlichen Privilegien ausgestatteten Dombauhütten, die ihre eigene von Kaiser und Pabst bestätigte Gerichtsbarkeit besaßen, wahrten ihre Selbstständigkeit und schlossen sich als etwas Höheres und Hochangesehenes den schon bestandenen städtischen Steinmetz- und Maurerzünften nicht an, um so die Geheimnisse ihrer Bauhütten besser zu wahren. Es ist einleuchtend, dass schon die bis zum Jahre 1000 ausgeführten Holzbauten der Kirchen und Klöster in ihren Constructionen und Verbindungen, die wir vom Standpunkte der darstellenden Geometrie als die ersten Modelle von Schnitten und Durchdringungen zumeist von vierseitigen Prismen und Cylindern auffassen können, ein entsprechendes räumliches Vorstellungsvermögen in Anspruch nahmen und hinreichende Kenntnisse aus der Stereometrie erforderten. Aber noch mehr geometrisches Wissen verlangte der Steinschnitt des romanischen Baustiles und hohe Anforderungen stellte der durch seine mannigfaltigen und reichen Kunstformen ausgezeichnete gothische Baustil an das stereometrische Wissen unserer wackeren altdeutschen Baumeister und Steinmetze. Die Gothik verlangte eine ausgebildete Technik.[1]) Es ist klar, dass die Erbauer so imposanter Monumentalbauten — diesen mächtigen Zeugen großartiger Schaffenskraft deutschen Bürgerthums — bei den Entwürfen der Pläne und bei der Ausführung des Baues im Steinschnitt der Mauern und Gewölbe, in der Dachausmittelung und ihren Holzconstructionen, sowie in den oft complicierten Constructionen der Thurmbauten, etc. die hiezu nothwendigen Elemente der darstellenden Geometrie — dieser geistreichen Vermittlerin zwischen Mathematik und bildender Kunst — vollständig beherrschen mussten. So gehören z. B. die windschiefen, also die theoretisch schwierigsten Flächen der darstellenden Geometrie, wie die Sattelflächen, die geraden Conoide, die Flächen der scharf- und flachgängigen Schrauben, die Wendelfläche, die Wölbfläche des Eingangs in den runden Thurm, die Wölbfläche des schiefen Eingangs (surface du biais passé) und die Fläche des sogenannten Kernbogengewölbes (la surface de l'arrière-voussure de Marseille) zu den wichtigsten Flächen, von welchen die technische Praxis frühzeitig Anwendungen machte, und unsere Baumeister waren

[1]) Vergl.: P. Marchese, Memoria dei pittori, scultori e architetti domenicani. Firenze. 1845—46. I.—II. Vol. und Justus Popp, Grundsätze der altdeutschen Baukunst. Försters Allgemeine Bauzeitung. X. Jahrg. S. 39—52. Wien 1845.

deshalb schon in den ersten Jahrhunderten des Mittelalters gezwungen, sich mit dem Wesen dieser schwierigen Flächen vertraut zu machen.[1]) Diese vielfache Verwendung der genannten krummen Flächen in der Baukunst wird gewiss unsere Meister zur Kenntnis so mancher ihrer theoretischen Eigenschaften geführt haben, die sie bei der Ausführung ihrer Bauten auch praktisch verwertet haben.

So fand die windschiefe Schraubenfläche, über welche Pappus[2]) in seinen „Collectiones mathematicae" schon im dritten Jahrhundert nach Chr. geniale flächen-theoretische Untersuchungen geführt und an derselben bewundernswerte Constructionen durchgeführt hatte, frühzeitig als Wendelfläche im Treppenbau der Kirchenthürme, sowie in den Burgen und Schlössern Frankreichs und Deutschlands ihre praktische Verwertung. Wir finden sie auch bei den Aufgangs-Rampen in den Campaniles (Glockenthürmen) Italiens. Diese krumme, transcendente und periodische Fläche, welche fünfzehnhundert Jahre nach Pappus Monge und Meusnier als Minimalfläche erkannten, fand schon deshalb in zahllosen Thürmen von Kirchen und Burgen des Mittelalters praktische Verwendung, weil sie in den bescheidensten Räumen ausgeführt werden konnte.

Wenn auch die Wendeltreppe, Spindel- oder Schneckenstiege (cochlea, escalier à vis, escalier suspendu) vom VI. bis zum IX. Jahrhundert noch ziemlich selten und nur als Thurm- oder geheime Burgtreppe und in der toskanischen Bauart gewissermaßen nur als „Gesinde-Treppe" zur Ausführung kam, so gelangte sie vom X. bis zum XII. Jahrhundert häufig zur Verwendung und erfreute sich vom XIII. bis zum XV. Jahrhundert einer außerordentlichen Beliebtheit. So finden wir in dem Wiener Stephansdome sechs Wendeltreppen, von denen eine 553 steinerne Stufen enthaltende Wendeltreppe in dem Eckpfeiler des von

---

[1]) S.: Einleitung S. 21—22 dieses Werkes.

[2]) S.: Philibert de l'Orme, L'Architecture des voûtes. Paris 1643. — Monge, Application de l'Analyse à la géométrie. I^e^ édit. Paris 1795 (V^e^ édit. Paris 1850. Pag. 89). — J. de la Gournerie, Traité de géométrie descriptive. II^e^ partie, pag. 205—218 Paris 1862 e 1873. — A. Mannheim, Cours de géom. descr., pag. 426. Paris 1880 et 1886. — Vergl.: „Die Familien der technisch wichtigsten Flächen" in Dr. Fiedlers Werk „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung und der Geometrie der Lage. III. Aufl. S. 400—410 Leipzig 1885. (II. Aufl. 1875, S. 404, I. Aufl 1871, S. 405). — Dr. G. A. V. Peschka, Darstellende und projective Geometrie. IV. Bd. S. 137—183. Wien 1885. — Dr. Ch. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. II. Bd. S. 435 u. 475. Leipzig 1887. — S. a. Ed. F. Heider, Theorie der schiefen Gewölbe, Wien 1846, und Rudolf Staudigl, Untersuchung einiger Gewölbformen, durch welche ein Raum mit trapezoidförmigem Grundrisse überwölbt werden kann. Zeitschrift für Mathematik und Physik. XIV. Jahrg. S. 97—120 Leipzig 1869, etc. etc.

Meister Wenczla (1359—1404) erbauten Thurme bis zur Dachhöhe des Domes führt, und später mit einer 56 Stufen enthaltenden Schneckenstiege ihren Abschluss findet. Zwei Wendeltreppen führen auch vom Hauptthore zu den beiden Heidenthürmen. Besonders interessant sind die in sechseckigen Treppenthürmen längs der vier Prismenkanten des Strassburger Münsterthurmes 100 Meter hoch hinaufführenden Wendeltreppen und noch interessanter die längs der Kanten der oberen Thurmpyramide 42 Meter hoch bis zur Laterne hinaufführenden acht Wendeltreppen oder Schneckenstiegen dieses herrlichen Münsters, dessen vierfacher Treppenbau an dem Thurmprisma und achtfacher, luftiger Treppenbau an der Thurmpyramide unsere Bewunderung erregt und seines Gleichen sucht. Der altdeutsche Baumeister Johannes Hülz aus Köln, der 1439 den von Meister Erwin von Steinbach schon im Jahre 1277 begonnenen Dombau zum Abschluss brachte, hatte nichts unterlassen, um diesen herrlichen Thurm originell auszuführen.[1])

Wir erinnern noch an die große Wendeltreppe in der Notre-Dame-Kirche in Paris, an die schraubenförmige Aufsteig-Rampe im Campanile di San Marco (888 — 1178) zu Venedig; ferner an die 1580 erbaute doppelte Parallel-Schneckenstiege mit je 84 Stufen des St. Jakob-Kirchenthurmes (1314—1480) in Brünn, etc.

Die Wendeltreppe, welcher die toscanischen Baumeister des XIII. Jahrhundertes jeden ästhetischen Vorzug abgesprochen hatten, gehörte in der Renaissance in ganz Mittel-Europa zu den schönsten und beliebtesten Treppenformen. Wir finden sie in schöner Ausführung am Graben (Nr. 14, etc.) in Wien, im Schlosse Göllersdorf und anderen Renaissance-Bauten. Die Wendeltreppe als prachtvolle Haupttreppe erhielten die Schlösser Chateaudun, Saint-Ouen, Eu, Mayenne, Baden-Baden, Stuttgart, Tübingen, Mergentheim (deutsches Ordensschloss), das Rathhaus zu Compiègne, der Palast Barberini in Rom, das imposante Schloss der Tuilerien in Paris, etc.[2]) Diese und andere Wendeltreppen, von welchen insbesondere die letztgenannten durch die Großartigkeit und den Reichthum ihrer eleganten Ausstattung kunsthistorisch berühmt sind, zeigen uns deutlich, dass die Baumeister der Gothik und Renaissance bei Anwendung der Wendelfläche zu ihren Treppenbauten mit den geometrischen Eigenthümlichkeiten dieser Flächen gut vertraut sein mussten und ihre orthographische Darstellung in Grundriss und Aufriss,

[1]) S.: Försters Allgemeine Bauzeitung. X. Jahrg. S. 48. Wien 1845.

[2]) S.: Jakob Burckhardt und Wilhelm Lübke, Geschichte der neueren Baukunst. (Die Renaissance in Frankreich). Stuttgart 1867 und Wilhelm Lübke, Geschichte der deutschen Renaissance. Stuttgart 1873.

später vielleicht auch in der Perspective, vollständig beherrschten. Noch mehr gilt dies aber von den oft complicierten Formen der Gewölbe. Den einfachen Tonnengewölben des romanischen Baustiles folgten bald die Spitzbogen, sowie die spitzbogigen Kreuz- und Netzgewölbe des gothischen Baustiles, welche wir in den folgenden Jahrhunderten auch in bürgerlichen Häusern finden. So schmückte z. B. die Decke des Stiegenhauses am Graben (Nr. 14) in Wien mit der erwähnten künstlerisch ausgeführten Wendeltreppe ein elegantes gothisches Sterngewölbe, während über dem mächtigen Octagon der Kirche des Karlshofes in Prag ein einziges kühnes Gewölbe wie ein Netz ausgespannt ist. Den gothischen Gewölben folgten im XV. Jahrhundert die Gewölbeformen der Frührenaissance, und im XVI. Jahrhundert jene der Hochrenaissance.[1])

Vom descriptiven Standpunkte interessant ist das von Peter von Gmünd entworfene Project der 1357 in Angriff genommenen und 1502 vollendeten Kaiser Karls-Brücke in Prag und ebenso interessant das 1493 unter König Wladislaw II. auf einer Fläche von nahezu 1300 Quadratmetern ausgeführte, reich verschlungene Netzgewölbe, das mit seinen prachtvoll verschlungenen Rippen in fünf Jochen den gothisch reichgeschmückten Wladislaw-Saal der Prager Hofburg bedeckt und bereits Renaissanzformen aufzuweisen hat. Es ist ein Meisterstück von Benedict von Laun, das in dem folgenden Jahrhundert wegen der großartigen Wirkung seiner herrlichgewölbten Halle viel bewundert und gepriesen wurde. Verhältnismäßig hohe Anforderungen bezüglich der geometrischen Präcision der Entwürfe und Bauausführungen stellten auch die beiden, in italienischer Renaissance, bezw. im Rococostil ausgeführten Belvederes in Prag (1534—58) und Wien (1693—1724) an ihre Meister Paul della Stella und Lukas von Hildebrandt. Es ist klar, dass je complicierter der Grundriss eines Bauwerkes war, um so schwieriger sich der descriptive Entwurf des Bauplanes und die factische Ausführung des Objectes mit seinen Gewölben und Dachausmittlungen gestaltete. Ein sprechendes Beispiel hiefür bietet uns das Sternschloss im großen Thiergarten auf dem weißen Berge bei Prag, welches der Sage nach König Georg von Podiebrad im J. 1459 zur Erinnerung an seine erste Gemahlin Kunigunde von Sternberg im Grundriss mit einem sternförmigen Sechseck erbaut haben soll, das aber — wie Ritter von Schönherr in Innsbruck urkundlich nachwies — König Ferdinands I. kunstliebender Sohn, Erzherzog Ferdinand,

[1]) S.: Jacob Burckhardt und Wilhelm Lübke, Geschichte der neueren Baukunst. („Die Formenbehandlung der Frührenaissance" und „Die Formenbehandlung im XVI. Jahrhundert"). S. 68 u. 79. Stuttgart 1867.

Statthalter von Böhmen, zu Ehren seiner schönen Gemahlin Philippine Welser im Grundriss des Planes als „Stern" entwarf, im Jahre 1555 erbauen und im Innern durch die bekannten Italiener Paul della Stella und Hans de Spatio mit reichen Stuckdecorationen und Gemälden von einheimischen Künstlern schmücken liess.[1]) Das in allen Theilen gewölbte Schloss enthält in dem rhombischen Treppenhaus im Inneren der Hauptstiege auch eine Wendeltreppe.

Die Kunst, kühne und complicierte Gewölbe auszuführen, stand somit auch in Österreich seit der Mitte des XV. Jahrhundertes auf einer sehr hohen Stufe und es unterliegt keinem Zweifel, dass während der Blüthe der Baukunst auch die Kunst des Messens und Aufreißens den Baumeistern, Steinmetzen und Zimmermeistern besonders geläufig sein musste; sie musste aber als Geheimnis der Dombauhütten und der Steinmetzzünfte gewahrt werden. Dieser Geheimhaltung ist es auch zuzuschreiben, dass uns der geniale Meister Wenczla von Klosterneuburg, der den Plan des herrlichen St. Stephansdomes in Wien in allen Details selbst entworfen hatte, diesen für die Geschichte der darstellenden Geometrie so wertvollen Plan nicht hinterlassen hat. Als Meister Wenczla (geb. etwa 1330) — der wahrscheinlich in der Bauschule des schon 1108 bestandenen weltlichen Klosters und 1136 neuerbauten Augustiner-Chorherrenstiftes von Klosterneuburg seine erste bautechnische Bildung erhalten haben dürfte, vorausgesetzt, dass er nicht in Böhmen geboren und vielleicht mit Peter Arler ein gewesener Gehilfe des 1352 in Prag gestorbenen Meisters Mathias Arras aus Flandern war[2]) — im Jahre 1404 gestorben war, fehlten seine für die Baukunst und Geschichte der darstellenden Geometrie so unschätzbaren Pläne und Risse des herrlichen Gotteshauses, so dass seine Nachfolger Peter von Prachawitz (gest. 1429) und Ulrich Helbing (gest. 1417) – in der Kunst erfahrene und berühmte Männer — planlos den Dombau fortsetzten und sich die ersten Jahre in den hochentwickelten Kunstsinn ihres Vorgängers gar nicht hinein-

[1]) Vergl. d. Prachtwerk „Die österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild" XIV. Bd. S. 180, Wien 1896 und Wilhelm Lübke, Geschichte der deutschen Renaissance. S. 633. Stuttgart 1873.

[2]) Anmerkung: Für die erstere Annahme spricht der Umstand, dass der Chorbau des Stephansdomes unter dem Einflusse des Chores von Klosterneuburg entstanden war, nicht minder aber auch der Beiname des im Greisenalter verstorbenen Dombaumeisters; für die letztere Annahme der Name des Meisters und das beim Prager Dome zuerst zum Ausdruck gebrachte altgothische Kathedralsystem. Auch die Coexistenz beider Annahmen ist nicht unwahrscheinlich. (Vergl. F. Kugler. Geschichte der Baukunst. III. Bd. S. 319. Stuttgart 1859.

finden konnten, so dass sie wieder Alles niederreißen mussten, was sie in den ersten drei Jahren ihrer Bauperiode mit großen Kosten aufgebaut hatten. Die ersten im Wiener Stadtarchive aufbewahrten Baurisse des St. Stephansdomes rühren vom Dombaumeister Gregor Hauser her, der sie im Jahre 1519 gezeichnet hat.

Dass unsere classischen Baumeister in der Planimetrie und Stereometrie wohl bewandert waren und schon im XIII. Jahrhundert in ihren Rissen ein eigenes, orthogonales Projectionssystem gebrauchten, davon können wir uns sofort überzeugen, wenn wir die Grundsätze der altdeutschen Baukunst, der wir so viele herrliche, harmonisch und präcise ausgeführte Monumentalbauten verdanken, einer näheren Betrachtung unterziehen. Schon im Jahre 1272 wurden die Regeln deutscher Baukunst bei der Zusammenkunft altdeutscher Baumeister festgesetzt. Als geistige Seele standen an der Spitze dieses gesetzgebenden Baumeister-Congresses die Koryphäen des XIII. Jahrhundertes Meister Erwin von Steinbach, Meister Moritz von Strassburg und Meister Gerhard von Köln.[1]) Es ist klar, dass die hier festgestellten Regeln deutscher Baukunst durch langjährige praktische Erfahrungen gewonnen waren, und dass schon früher nach diesen Regeln Bauten ausgeführt wurden. Der Schlüssel zu diesem altdeutschen Bausystem, welches also schon im Jahre 1272 gewissermaßen Gesetzeskraft erlangte, war selbstverständlich Geheimnis und wurde nur wenigen mitgetheilt. Die Menge dieser Innung wurde nur insoferne eingeweiht, als es zur übereinstimmenden Ausführung von Bauten nothwendig war. Ein mächtiger und einmüthiger Geist beseelte Meister und Gesellen, die wahre Liebe zur Kunst und zum Vaterlande durchglühte alle, und eine zauberähnliche Kraft schuf jene wundervollen Denkmale zur Ehre des Höchsten und zum Ruhme Deutschlands.

Bei einem wohldurchdachten Plane eines Bauwerkes musste der Baumeister nicht bloß richtige Horizontalschnitte (Grundrisse) in verschiedenen Höhen und ebensolche Verticalschnitte (Aufrisse und Quer- oder Kreuzrisse) von dem erst zu erbauenden Object im vorhinein und präcise entwerfen können, sondern er war schon beim Entwurfe gezwungen, auf die Dimensionen der in dem Gebäude befindlichen Theile desselben, wie z. B. Stiegen, Kanzeln, Gewölbe, etc. Rücksicht zu nehmen und zeichnete deshalb ihre Dimensionen und orthogonalen Projectionen schon vor der Ausführung des Baues in den Bauplan ein. Wo die Grundrissebene mit dem Raumgebilde keinen Schnitt gab, trat

---

[1]) S.: Justus Popp, „Grundsätze der altdeutschen Baukunst" in Försters Allgemeiner Bauzeichnung. X. Jahrg. S. 29—52. Wien 1845.

an Stelle des Risses seine orthogonale Projection, wie z. B. bei den Stufen der Wendeltreppen oder den Rippen der Kreuz- und Netzgewölbe.

Es unterliegt aber auch keinem Zweifel, dass den Gebäuden der germanischen Bauart strenge geometrische Regeln zu Grunde gelegt wurden. Genaues und vergleichendes Prüfen deutscher Kirchen lässt erkennen, dass der ganze Bau immer aus einer gewissen geometrischen Grundfigur entwickelt werden kann, und zwar nahmen unsere alten Baumeister zumeist das gleichseitige Dreieck und das Quadrat als Grundfigur zu ihren Entwürfen. Das gleichseitige Dreieck und das Quadrat sind aber die beiden geometrischen Figuren, aus welchen sich alle übrigen regelmäßigen Vielecke, aber auch das Tetraeder und das Hexaeder, die Grundkörper aller Kristallgestalten, construieren lassen. Die sechs Quadrate eines Würfels als Netz auf eine Ebene entfaltet, geben das deutsche Kreuz, die Grundform aller Dome. Die lichte Weite des Hauptschiffes ist die eine Seite des Quadrates; wird das östliche Quadrat im Mittelpunkte so gedreht, dass das Eck die eine Seite halbiert, so entsteht das Achteck, dessen Hälfte an das östlich liegende Viereck angelegt, den Chorschluss bildet. Das dritte, vierte, fünfte und sechste Quadrat, nach der Länge gleichgetheilt, bestimmen die Anzahl der Pfeiler, auf welchen die Last der Gewölbe ruht. Die längs des Hauptschiffes angebauten Seitenhallen sind wieder kleine Quadrate, deren Seiten die Hälften der Seiten des größeren Viereckes sind.

Ebenso wurde auch das gleichseitige Dreieck zu dem Entwurfe der Grundpläne von Dombauten benützt. Die Spannweite des Gewölbes ist die eine Seite des Dreieckes; dreht man das Dreieck um seinen Mittelpunkt, so entsteht das Sechseck und aus diesem durch Seitenhalbierung das Zwölfeck, welches hier den Chor begrenzt. Aber nicht bloß die Grundrissfiguren der Seitenhallen und des Chores werden als geometrisch verwandte Gebilde der Grundfigur des Domes construiert, sondern auch die Dimensionen der einzelnen Theile, die Stärken der Pfeiler, die Höhenmaße der Thürme, die Höhen der Firste, Gallerien oder Plattformen, etc. werden als geometrisch verwandte Strecken aus den Dimensionen der Grundfigur des Bauwerkes abgeleitet. So sind die Stärken der Pfeiler die siebenten Theile der Basis der Grundfigur und der dritte Theil des inneren Sechseckes ist die Dicke der größeren Pfeiler, auf welchen bei Anlage von drei Thürmen der Mittelthurm ruht. Werden die Seiten des als Grundfigur benützten gleichseitigen Dreieckes verlängert und an die Schlussmauer der Kirche die ganze Breite links und rechts aufgetragen, so entsteht wieder ein gleichseitiges Dreieck, welchem durch Projection die Höhenmaße der Thürme entnommen werden. Zeichnet man in dieses Dreieck ein zweites Dreieck, welches die ganze Breite des Domes zur Basis hat, so gibt der Scheitel die Höhe der oberen Gallerie oder die Firsthöhe; die halbe Länge des Perpendikels gibt die Höhe der Seitenschiffe mit ihren Gallerien, die das Gewölbe krönen. Halbiert man den Abstand des inneren Dreieckes und construiert mit dieser Strecke ein drittes Dreieck, so gibt dieses die Spitze des Mittelthurmes. In ähnlicher Weise werden die Höhen der Fenster, die Gurten, die pyramidalen Verdachungen, die Thurmbreiten oberhalb des Grundbaues, die Breite der Helmpyramide, etc. des ganzen Kirchenbaues bestimmt. Dieses System geometrisch verwandter Gebilde lässt sich z. B. beim Dom zu Köln, diesem herrlichen und reinen Monumentalbau im altdeutschen Stil, dessen Grundfigur das Dreieck ist, bis in die kleinsten Theile genau verfolgen und lässt uns den ganzen Bau als eine geometrische Einheit von seltener Harmonie und Schönheit erscheinen. Ähnliches gilt vom Stephansdom in Wien, dem Münster zu Strassburg und dem Dom zu Regensburg, welche das Quadrat zur Grundfigur haben.[1]) Die Elisabethkirche zu Marburg hat das Pentagon, die Karlshofkirche zu Prag ein mächtiges Octagon zur Grundfigur. Es war auch Sitte und Handwerksgebrauch, dass der Nachfolger eines Dombaumeisters dem Projectionssystem seines berühmten Vorgängers treu blieb. So geschah dies, als Meister Johannes Erwin nach dem im Jahre 1318 erfolgten Tode seines Vaters Erwin von Steinbach den Weiterbau des von Kaiser Rudolf von Habsburg so eifrig geförderten Strassburger Münsters übernahm, so geschah dies als Meister Johannes Hülz den Dombau mit dem kühn und pyramidal sich erhebenden Thurm, dessen achtfacher, 142 Meter hoher Wendeltreppenbau auf dem ganzen Continente seines Gleichen nicht wiederfindet, im Jahre 1493 zum Abschluss brachte. Auch beim Bau des Stephansdomes in Wien wurde das Projectionssystem und die Harmonie des ersten Meisters, Wenczla von Klosterneuburg, auf das strengste eingehalten und seine Nachfolger Peter von Prachawitz und Ulrich Helbing — zwei in der Kunst erfahrene und berühmte Baumeister — rissen Alles in den ersten drei Jahren mit großen Kosten Gebaute wieder nieder, als sie die Überzeugung hatten, dass in Folge des nicht mehr vorhandenen Bauplanes ihres Vorgängers eine Disharmonie in das Bausystem des herrlichen

[1]) Vergl.: J. Popp, Grundsätze der altdeutschen Baukunst in Försters Bauzeitung. X. Jahrg. S. 46. Wien 1845. — Strobl, Das Münster zu Strassburg. 13. Aufl. 1874. — J. Popp, Die Architektur des Mittelalters in Regensburg. — F. Tschischka, Der St. Stephans-Dom in Wien. Wien 1832. — A. R. von Perger, Der Dom zu St. Stephan in Wien. Triest 1854. etc.

Domes gekommen wäre. — Dass aber bei diesen geometrischen Constructionen die Proportionalen und der goldene Schnitt (sectio aurea) nicht unberücksichtigt bleiben konnten, ist einleuchtend.[1])

Es ist ja bekannt, welche hervorragende Rolle geometrische Constructionen in der Kunst des Mittelalters spielten. Freilich war es im XV. Jahrhundert nicht ein deutscher Baumeister, der sein Kunstgeheimnis wahrend, uns diesbezüglich als Schriftsteller keinen Aufschluss geben konnte, sondern ein italienischer Künstler, Leonardo da Vinci (1452—1519) war es, aus dessen dreizehn riesige Foliobände umfassenden Nachlass, der in der Pariser Bibliothek und in der Ambrosia zu Mailand aufbewahrt ist, wir sehen, wie Alles, was zu den graphischen Künsten in Beziehung stand, auf geometrische Constructionen zurückgeführt werden könne.

Da fast bis in das XVIII. Jahrhundert die Pflege des theoretisch-technischen Wissens in Deutschland in dem Wirkungskreise der Bauhütten und Steinmetzzünfte lag, diese aber von ihren Meistern unter Eid verlangten, der „Zünfften Heimlichkeiten“ zu verschweigen, so ist es auch erklärlich, dass wir in der deutschen Literatur über die Pflege des theoretisch-technischen Wissens keine Aufschlüsse finden können. Die Hauptbauhütten waren Strassburg, Köln, Wien und Zürich. Berühmte Bauhütten besaßen Basel, Danzig, Dresden, Frankfurt, Hamburg, Nürnberg und Prag. Die Oberherrlichkeit über alle Bauhütten besass fast bis in die Mitte des XVIII. Jahrhundertes die große Steinmetzhütte zu Strassburg, deren Hüttenordnung Kaiser Maximilian I. durch die Confirmationsurkunde schon am 3. October 1498 die kaiserliche Bestätigung ertheilt hatte, und welche durch ein „Diwol“ (Diplom) Kaiser Ferdinand I. ddto. 15. März 1563, ferner Maximilian II. ddto. Prag 18. April 1570 und Kaiser Ferdinand II. ddto. Wien 16. September 1621 die Allerhöchste Bekräftigung erhielt.[2])

Das Wappen der Strassburger Haupthütte (Großloge) vom J. 1718 enthält am Rande die Schrift:

„STEINMETZT HANDWERCK. ZVE. STRASBVRG.“

Das spitzoval gehaltene Wappen zeigt die Mutter Gottes mit wallendem Haar auf dem Halbmond stehend, das Jesukind auf dem linken Arme; an ihre Knie ist das Wappen des Bischofs Werner von Habsburg — das bischöflich-strassburgische Wappenschild — gelehnt.

[1]) S.: Th. Wittstein, Der goldene Schnitt und die Anwendungen desselben in der Kunst. Hannover 1874.

[2]) S.: Dr. F. Janner, Die Bauhütten des deutschen Mittelalters. S. 61—91. Leipzig 1876. u. die „Confirmationsurkunde Maximilians I. von 1498.“ Ibid. S. 266—271.

Es ist roth mit silbernem Schrägbalken, welchen zwei goldene Maurerhämmer zieren. Im oberen Theile des rothen Feldes befindet sich eine Setzwage, im unteren der goldene Zirkel.

Um diese Zeit existierte die Hauptbauhütte von Köln nicht mehr, sie war schon im XVI. Jahrhundert in der Steinmetzzunft aufgegangen. Dagegen entfalteten die „bau- und zöchmeister, wie auch ein gantz ersambe bruederschafft und handwerck der steinmetzen und maurer der der loblichen haupthitten in der statt Wienn" neben der Hauptbauhütte zu Strassburg mit ihren schon „von der Mayestät Barbarossa privilegirten, dann von neuem confirmirten privilegien aus Khönigelichen und Khayserlichen gegeben verobligirten großen gnadt über die stainmetzen und maurerhandtwerchs, vaßt ganz Teitschlandt in handtwerchsachen zu gebieten" noch am Anfange des XVII. Jahrhundertes eine rege Amtsthätigkeit. Mit dem Niedergang der bildenden Künste im XVII. Jahrhundert wurde auch das Geheimnis des Grund- und Aufrissverfahrens und das ganze Projectionssystem der altdeutschen Baumeister in den Trümmern des 30-jährigen Krieges begraben.

Selbst der hervorragendste Vertreter des Classicismus im XVII. und XVIII. Jahrhundert, Johann Bernhard Fischer von Erlach (geb. 1650, gest. 1723 als Hofbaudirektor in Wien), der sich in Rom zum Architekten ausgebildet und der Berninischen Richtung angeschlossen hatte, gibt uns in seinem Werke „Entwurf einer historischen Architektur in Abbildung unterschiedener berühmter Gebäude des Alterthums und fremder Völker, Wien 1721" wohl wertvolle kunsthistorische Daten, aber keine Aufklärung über die Pflege der theoretisch-technischen Ausbildung deutscher Baumeister und Architekten.

Das textlich schlecht beschaffene, im Stile dunkel und unbeholfene Werk „De architectura" des römischen Agrimensors und Baumeisters M. Vitruvius Pollio aus Verona, dessen zehn Bücher etwa 14. vor Chr. schon vollendet waren und dem Beherrscher der goldenen augustinischen Zeit, Kaiser Augustus, zugeeignet sind, war trotz des Mangels einer Lehre über den Gewölbebau [1]) und trotz der vom Verfasser mitunter missverstandenen griechischen Quellen, durch Jahrhunderte hindurch das Hauptwerk in der Literatur der theoretisch-technischen Baukunst. Es spielte in seinen zahllosen italienischen Übersetzungen von Fra Giocondo (1511), Cesariano (1521), Bertano (1558), Daniele Barbaro (1567), etc. sogar noch im XVI. Jahrhundert im bautechnischen Leben Deutschlands eine hervorragende wissen-

[1]) **Anmerkung:** Von dem sogenannten falschen Gewölbebau im VII. Buche, Cap. 3 dieses Werkes sehen wir ab.

schaftliche Rolle und erreichte erst in diesem Jahrhundert gewissermaßen seinen geistigen Höhepunkt.[1]) Im Jahre 1548 gab der Nürnberger Arzt und Mathematiker Walther Rivius seinen „Deutschen Vitruv" nach der 1521 zu Como erschienenen Ausgabe des Cesariano heraus.

Die ersten, auf geometrischer Grundlage ruhenden Erklärungen in der Technik der Baukunst verdanken wir einem Nürnberger Künstler, der die ganze Hoheit und geistige Kraft seines Wesens daransetzte, um die geistigen Schranken des Mittelalters zu durchbrechen. Durch unablässige Studien in Deutschland und Italien befreite dieser geniale Maler, der sich einmal scherzend selbst noch als einen „pultron de pentor" bezeichnete, die Kunst vom Dilettantismus, indem er die Theorien der Malerei und der Baukunst festzustellen suchte. Albrecht Dürer (geb. 1471 in Nürnberg, gest. 1528 ebenda), der durch sein Werk „Underweysung der messung mit dem Zirckel und richtscheydt in Linien ebenen und gantzen corporen, Nürnberg 1525" (II. Aufl. 1538) zum Begründer einer ganzen perspectivischen Literatur wurde, war der erste deutsche Künstler, welcher einer perspectivischen Zeichung eine mathematische Vorschrift zugrunde legte.[2]) Vom Jahre 1505 bis 1507 war Albrecht Dürer in Venedig, von wo er gegen Ende 1506 einen Ausflug nach Bologna machte und hier wahrscheinlich bei Scipio Ferreus — einem Schüler Leon Battista Albertis (1404—1472) — die Geheimperspective erlernte. In seinem Werke, welches Albrecht Dürer, der Erfinder mehrerer auf dem Principe der Durchstossmethode beruhender Perspectographen, „zusammengezogen und zu nutz allen kunstliebhabenden mit zugehörigen Figuren in Truck gebracht", beschäftigte er sich im vierten Buche auch mit den Netzen der Vielflächner und führte für die Kegelschnitte deutsche Namen ein, so für die Ellipse „Eierlinie", für die Parabel „Brennlinie" und für die Hyperbel „Gabellinie". Auch die Muschellinie und die Spinnlinie zog Dürer, der zuerst geometrische Nährungsconstructionen mit vollem Bewusstsein ausgeführt hat, in den Kreis seiner curventheoretischen Betrachtungen. Um möglichst verständlich und anschaulich zu sein, gebrauchte er auch deutsche Namen in der Stereometrie.

---

[1]) S. d. Artikel „Einfluss des Vitruv" in Burckhardt und W. Lübke, Geschichte der neueren Baukunst. (Die Renaissance in Italien). S. 38. Stuttgart 1867.

[2]) S.: Dr. Christian Wiener, Lehrbuch (Geschichte) der darstellenden Geometrie. S. 10 u. 14. Leipzig 1884. — H. Staigmüller, Dürer als Mathematiker. Stuttgart 1891. — S. Günther, Die geometrischen Näherungsconstructionen Albrecht Dürers. Ansbach 1886. — Dr. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II. Bd. S. 421—430. Leipzig 1892.

Im dritten Buche seiner „Underweysung" beschäftigt sich Dürer mit der Architektur und sucht auch diese auf geometrischer Grundlage aufzubauen. Insbesondere gilt dies beim Aufriss seiner architektonischen Figuren und Gestalten. Er bringt für jene, welche „große Liebe haben zu seltsamen Reihungen in den Gewölben zu schließen, von Wohlstandswegen" ein recht compliciertes Netzgewölbe, an dessen schöner und geometrisch begründeter Form die deutschen Baumeister noch bis in das XVII. Jahrhundert mit Vorliebe festhielten. Albrecht Dürers Landsmann, Johannes Werner, Pfarrer von Nürnberg, ist der Verfasser einer 34 Seiten umfassenden berühmten Abhandlung „Libellus super viginti duobus elementis conicis", welche 22 Sätze über Kegelschnitte enthielt, in deren Beweisführung Werner von Apollonius wesentlich abgewichen ist.[1]) Ein Freund des genialen Nürnberger Malers war auch der Wiener Rathsherr Johannes Tschertte, ein tüchtiger Mathematiker, der auch in der Perspective sehr bewandert war. Ein Brief von Tschertte, in welchem er Dürer über die Verwandlung eines ungleichseitigen Dreieckes in ein flächengleiches Rechteck Mittheilung macht, wird im Britischen Museum aufbewahrt.

Dürers „Underweysung der messung mit dem Zirckel und richtscheydt, Nürnberg 1525" folgte bald eine größere Zahl von deutschen Werken über Perspective, welche in der kunstsinnigen Stadt Nürnberg eine ganz besondere Pflege fand. Schon 1531 veröffentlichte H. Rodler „Ein schön nützlich Büchlein und Underweysung der Kunst des Messens", diesem folgten E. Schöns „Underweysung" (1542), Hirschvogels „Geometrie" (1543), das umfangreiche Werk „Neue Perspective, Nürnberg 1548" von Walter Rivius, dessen zweite Auflage schon 1558 erschien; ferner die Perspectiven von Stoer (1567), Jamnitzer (1568), Lencker (1581), Haiden (Nürnberg 1590), Pfinzing (Augsburg 1606), etc. Selbst die ehrsamen „Dischler" blieben hinter den kunstliebenden Goldschmieden Nürnbergs nicht zurück und veröffentlichten ihre „Perspectiva", von denen selbstverständlich jede innerhalb der von Meister Dürer gesteckten Grenzen blieb. Welchen hohen Wert der Bürgerstand auf die Pflege der Wissenschaften und ganz besonders auf die Geometrie und Perspective legte, zeigen uns das „Schweiffbüchlein" des Tischlers Gabriel Krammer in Köln, welches 1611 erschien

---

[1]) S.: Dr. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II. Bd. S. 419. Leipzig 1892.

Anmerkung: Werners Abhandlung „Libellus" über die Kegelschnitte erschien im Jahre 1522 in dem Sammelband „Commentarius" bei dem berühmten Buchhändler Lucas Atlantsee in Wien.

und das perspectivische Werk des „Hofdischlers und Wiener Buergers Georgen Haasen“, dessen „Künstlicher und zierlicher neuer vor nie gesehener funfzig perspectivischer Stuck oder Boden aus rechtem Grund und Art des Zirckels, Winkelmaas und Richtscheidt mit rechter Schattirung Tag und Nachts, allen Malern, Dischlern und denen so sich des Bauens gebrauchen sehr nützlich und dienstlich, mit sonderm Fleiss in Kupfer geätzt“ im Jahre 1583 bei Stephan Kreutzer in Wien erschien. [1])

---

[1]) Vergl. d. interessanten Artikel „Die Theoretiker“ in Wilhelm Lübke, Geschichte der deutschen Renaissance I. Hälfte, S. 133 u. 152, Stuttgart 1873.

Anmerkung: Eine rasche Verbreitung fand die Perspective im XV. und besonders im XVI. Jahrhundert durch die noch junge Buchdruckerkunst. Fast insgesammt verließen die Bücher, welche im XV. Jahrhundert in Wien geschrieben wurden in Nürnberg, Augsburg und Strassburg die Presse. So erschien selbst noch im Jahre 1516 Peuerbachs geodätisches Werk „Quadratum geometricum“ in Nürnberg. Die ersten Druckereien in Deutschland hatten Mainz (Johann Guttenberg), dann vor 1462 Strassburg und Bamberg. In Nürnberg druckte 1472—75 der Mathematiker Johannes Regiomontanus (Johannes Müller aus Königsberg, etwa 1450 ein berühmter Schüler des Wiener Universitätsprofessors Peuerbach; las als junger Magister im Jahre 1458 über Perspective und 1460 über Euklid an der Alma mater Rudolphina). Berühmt war in Nürnberg die Druckerei von Anton Coberger (Koburger). wegen der großen Ausdehnung und Vortrefflichkeit seiner Arbeiten der „König der Buchdrucker“ genannt. Die ersten Drucke erschienen in Prag im Jahre 1478, in Wien 1482. In Brünn hielt die Druckerpresse im Jahre 1486 bei Georg Gastel ihren Einzug. Das erste in Wien gedruckte Buch erschien ohne Name des Druckers, doch gilt Johann Winterberger aus Winterburg bei Kreuznach als erster Drucker. Eines Weltrufes erfreute sich die Druckerei der Brüder Leonhard und Lucas Atlantsee in Wien, aus welcher in dem kurzen Zeitraume von 1498 bis 1522 einhundertneun musterhaft gedruckte Werke hervorgiengen. Hier erschien im Jahre 1514 durch Vermittelung des Rectors der Wiener Universität Georg Tannstetters (Collimitius) von Thamnau, eines hervorragenden mathematischen Schriftstellers und Leibarztes Kaiser Maximilian I. ein mathematisches Werk, welches im ersten die Tabulae ecclipsum von Peuerbach und die Tabula primi nobilis von Regiomontan enthielt. Die Einleitung dieses trigonometrischen Werkes enthält eine Geschichte der Wiener Mathematiker (Viri mathematici) von Tannstetter. Es sind dies folgende Wiener Mathematiker aus dem 14., 15. und 16. Jahrhundert:

„Henricus de Hassia († 1397), Johannes de Gemunden († 1442), Georgius pruner ex Ruspach, Georgius praepositus Neoburgensis, Johannes Schnittel, Johannes Feldner, Georgius ex Peuerbach († 1462), Joannes de monte regio (Regiomontanus); ferner die Schüler der beiden letztgenannten großen Astronomen Heinrich Feldner, Eberhard Schlesinger, Johannem de Phortznm, Johann de Kupferberg und Johann Dorn, Verfasser von drei „Sphaeras solidas mirae magnitudinis“ († 1509.)

Weiters werden genannt Christiannus Molitoris aus Klagenfurt († 1495 in Wien an der Pest), Joannes Mantz aus Plabeiern († 1503), schrieb Prognostica a stellis sunta, die damals geschätzt wurden; Joannes Stabius und Stiborius, für welche beide Kaiser Maximilian I. aus Achtung für dieselben

Die Perspective bildete schon frühzeitig einen sorgfältig gepflegten Gegenstand an der Universität zu Wien, in deren Satzungen vom Studien-

öffentliche astronomische und mathematische Vorlesungen mit neuer Besoldung angeordnet hatte; Stephanus Rosinus aus Augsburg, Joh. Angelus, Artium et Medicinae doctor († 1512), aus Aichen in Baiern, Georg Ratzenberger, Dominus Paulus, Johannes Epperies und Erasmus ericus, welche mit vielem Beifalle Mathematik gelehrt haben; Jacobus Lateranus, Johannes Fabricius aus Reifling; der Bürger und Rathsherr zu Wien, Johannes Tzerte, auch Schertte, in Mathematik, Gründen der Malerei und Baukunst besonders geschickt. Auch Andreas Kuenhofer war in ganz Italien und selbst zu Rom als Mathematiker berühmt. Die letzten im Verzeichnisse Tannstetters sind Georgius Strolin, ein Ulmer Patricier, Johannes Kolpeck aus Regensburg und Tannstetter selbst." Die mathematischen Wissenschaften jener Zeit waren: „Perspectiva, Geometria, Astronomia, Arithmetica, Metaphysica und Magia." Der letztgenannte Wissenszweig enthielt: „Magiam Alberti magni, Alkindus de radiis stellicis, Libellus Linconiensis de lineis phisicis und De potentia actiua et passiua mirabilis."

Der zweite im Jahre 1515 erschienene Band von Tannstetters Werk enthält die fünf wichtigsten Schriften des Mittelalters: „Die Arithmetik von De Muris (1310— etwa 1370 in der Normandie), die Proportionenlehre von Bradwardinus (1290—1349, Procurator der Universität Oxford), die Latitudines von Oresme (1323—1382, Bischof von Lisieux) in der durch Blasius von Parma erläuterten Ausgabe, das Rechnen mit ganzen Zahlen von Peuerbach und das Bruchrechnen von Johann von Gemunden.

Georg Tannstetter war auch bemüht — wenn auch ohne nennenswerten Erfolg — in der „Collimitiana" genannten Gesellschaft für das nach dem Tode Celtis (1508) eingegangene Collegium der Wiener Poeten und Mathematiker einen Ersatz zu schaffen.

Am 12. Jänner 1519 starb Kaiser Maximilian I. zu Wels in Oberösterreich in Gegenwart seines geschätzten Leibarztes Tannstetter. Mit Recht konnte von dem verstorbenen Fürsten gerühmt werden, dass man den blühenden Zustand der Wiener Universität, welche damals eine der ersten in Europa war, fast einzig und allein seiner eifrigen Theilnahme an den Studien und seiner sorgsamen Pflege, die er ihr angedeihen ließ, verdankte. Er war es auch, der die Verbreitung des Humanismus auf das wärmste begünstigte und ihn zur vorherrschenden Richtung an der schon damals stark besuchten Wiener Universität machte. Mit vollem Rechte kann deshalb Kaiser Maximilian I. als Erwecker eines neuen geistigen Lebens an der Wiener Hochschule gepriesen werden.

Ein Schüler Tannstetters, dieses berühmten Lehrers der Mathematik an der Wiener Universität, war Heinrich Schreiber aus Erfurt, genannt Grammateus, der zuerst an der Universität in Krakau studiert hatte, 1518 Procurator der sächsischen Nation an der Wiener Universität war und im Jahre 1514 seinen Algorismus proportionum veröffentlicht hatte. Im Jahre 1523 gab Grammateus, Professor der Mathematik an der Wiener Universität, die 1521 wegen der Pest geschlossen werden musste, sein seit 1518 vollendetes Rechenbuch in deutscher Sprache heraus: „Ayn new künstlich Buech welches gar gewiss und behend lernet nach der gemeinen regel Detre, welschen practic, regeln falsi und etlichen regeln Cosse mancherley schöne und zu wissen notürftig rechnung auff kauffjahre 1389—90 wir die „Perspectiva communis" als Vorlesungsgegenstand kennen gelernt haben. Berühmt als Lehrer der Perspective war seit 1414 der Magister der freien Künste Johannes de Gemunden, der 1442 gestorben ist. Ein noch regeres wissenschaftliches Leben finden wir an der Wiener Universität unter der Regierung Kaiser Maximilian I. am Anfang des XVI. Jahrhundertes, wo die „Alma mater Rudolphina" als mathematische Universität sich eines Weltrufes erfreute. Fast ausnahmslos standen die im XVI. und XVII. Jahrhundert veröffentlichten Werke über Perspective auf jenem wissenschaftlichen Standpunkte, den Albrecht Dürer in seiner „Underweysung" begründet hatte. Es währte verhältnissmäßig lange, bis sich der Einfluss neuer und bahn-

---

mannschafft" und welches auch lehrte „Visier zu machen durch den Quadrat und triangel mit viel andern lustigen stücken der Geometrey." — „Gemacht auff der löblichen hoen schul zu Wienn in Österreich durch Henricum Grammateum, oder oder schreyber von Erffurdt der sieben freyen künste Meister."

Ein Schüler Tannstetters war auch der Steiermärker Andreas Perlacher der Lehrer von Johannes Voegelin[2]) aus Heilbronn, bekannt durch die Veröffentlichung des Buches „Elementale geometricum ex Euclidis Viennae 1528."

Voegelin kann noch als der letzte Vertreter jener stattlichen Mathematikerschule bezeichnet werden, welche mit Johann von Gemünd beginnend, der österreichischen Hauptstadt über ein Jahrhundert lang zur Zierde gereichte. Noch als Lehrer studierte er unter Tannstetter und Perlacher und verfasste für seinen Unterricht das bereits genannte Buch „Elementale geometricum," welches nach den zahlreichen Neu- und Nachdrucken zu schließen, seine Bestimmung „ad omnium mathematices candidatorum utilitatem" vollauf erfüllt haben muss, trotzdem es blos das Nothdürftigste aus der Euklidschen Geometrie der Ebene auf wenigen Druckbogen enthielt. Es brachte den damaligen Studierenden diejenigen Sätze aus der Geometrie, welche bei Beweisen häufig vorkommen. Voegelin, der schon im Jahre 1525 nach Wien berufen wurde, wo er als „collega civilis collegii Viennensis" an der Schule bei St. Stephan Mathematik zu lehren hatte, wurde — ohne auf diese Stellung verzichten zu müssen — am 11. December 1528 zum „Professor astronomiae, theorie et apostelesmatice, nec non geographie" der Wiener Universität ernannt und hatte als solcher auch über die Sphärik des Theodosius zu lesen, die er — mit Noten versehen — für seine Vorlesungen im Jahre 1529 in Wien herausgab. Von großer wissenschaftlicher Bedeutung war Peuerbachs trigonometrisches Werk „Tractatus Georgii Purbachii super Propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis," das mit einer Tabelle seines genialen Schülers Regiomontanus im Jahre 1541 in Nürnberg erschien und als erste Sinustrigonometrie in Deutschland die Bewunderung seiner mathematischen Zeitgenossen erregte. —

[[1]) S.: A. G. Kästner, Geschichte der Mathematik, I. Bd. S. 561. Göttingen 1796. — Dr. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II. Bd. S. 369—373. Leipzig 1892. — Allgemeine Deutsche Biographie. — [2]) S.: M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II. Theil S. 362. Leipzig 1892. Allgemeine Deutsche Biographie. 40. Bd. S. 142. Leipzig 1895].

brechender Forschungen auf dem Gebiete der Perspective geltend gemacht hatte.

Schon am Beginne des XVII. Jahrhundertes hatte Guido Ubaldi in seiner „Perspectiva, Pisauri 1600“ die Theorie des Fluchtpunktes im allgemeinen Sinne begründet, und bald darauf legte Simon Stevin im ersten Bande seiner mathematischen Werke (Leyden 1605 — 1608), die von Snellius (1608) aus dem Holländischen ins Lateinische übersetzt und die Scenographie oder Perspective enthielten, den Grund zur Entwickelung der Collineation.[1]) Im Jahre 1643 veröffentlichte E. Migon, Professor der Mathematik zu Paris sein Werk „La perspective speculative et pratique, Paris 1643“, in welchem er die Theorie des Theilungspunktes begründete. Ein Jahr später benützte Battaz in seinem Werke „Abréviations des plus difficiles opérations de perspective pratique, Paris 1644“ schon den Theilungskreis.

In Deutschland veröffentlichte Andreas Albert „Zwei Bücher, das erste von der ohne und durch die Arithmetica gefundenen Perspective, das andere von dem dazu gehörigen Schatten, Nürnberg 1671“ und im Jahre 1759 erschien in Zürich J. H. Lamberts „Freye Perspective, oder Anweisung jeden perspectivischen Aufriss von freyen Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen.“ In diesem Werke, dessen zweite Auflage schon im Jahre 1774 erschien, begründete Lambert (geb. 1728 zu Mühlhausen im Elsass, gest. 1777 als langjähriges Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften) die freie Perspective, deren Aufgaben er zum größeren Theile schon vermittelst der Anschauungen der projectiven Geometrie löste.

Eine ähnliche Richtung wie Lambert, wenn auch nicht in so allgemeiner und umfassender Weise, verfolgte der Astronom E. Zanotti (1709—1782) in Bologna in seinem 1766 veröffentlichten Werke über Perspective, nach dessen lateinischen Text die italienische Übersetzung „Trattato teoretico-pratico di prospettiva, Milano 1825“ erschien. Schon vorher veröffentlichte Zanotti in den Rendiconti dell' Accademia di Bologna unter dem Titel „De perspectiva in theorema unum redacta“ eine die Theorie der freien Perspective betreffende Abhandlung.[2])

Dass die hier nur skizzierten Fortschritte des Auslandes in der Perspective seit Beginn der Renaissance, und besonders jene im XVII. und XVIII. Jahrhundert auf unsere heimischen Pflegestätten der Künste und Wissenschaften keinen nachhaltigen, den Fortschritt fördernden

[1]) S.: Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch (Geschichte) der darst. Geometrie. I. Bd. S 16 u 17. Leipzig 1884.

[2]) Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch (Geschichte) der darstellenden Geometrie. I. Bd. S. 20—21. Leipzig 1884.

Einfluss ausüben konnten, ist sofort einleuchtend, wenn wir nur einen Blick auf die socialen Verhältnisse werfen, welche in den österreichischen Ländern in jener nach Decennien zählenden Zeitperiode des XVII. Jahrhundertes herrschten, die mit dem Prager Fenstersturz am 23. Mai 1618 ihren Anfang nahm. Noch heute erinnern uns durch feindliche Geschosse zerstörte gothische Monumentalbauten [1]) an die schrecklichen Wirren und Drangsale des dreißigjährigen Krieges, der die österreichischen Länder verwüstete und den Wissenschaften und Künsten ein nichtsweniger als günstiges Jahrhundert brachte, und mit Wehmuth denken historische Schriftsteller an die geistige Richtung, welche das Schulwesen unseres Vaterlandes im XVII. und XVIII. Jahrhundert beherrschte.

Eine sorgfältige Pflege fand die Perspective in Österreich im XVIII. Jahrhundert in der von Kaiser Leopold I. im Jahre 1692 gegründeten und 1707 eröffneten Maler- und Bildhauer-Akademie in Wien, welche — von der Kaiserin Maria Theresia zur Akademie der bildenden Künste erweitert — das Kunstleben unseres Vaterlandes in neue Bahnen lenkte.

Eine vielfache Verwendung fanden die Elemente der darstellenden Geometrie in der Militärtechnik des Festungsbaues. Wir haben schon in der Einleitung darauf hingewiesen, dass die graphische Defilierung eines Festungswerkes, d. i. eine solche Anlage desselben, dass es in keinem seiner Theile einer directen Bestreichung seitens der Artillerie des Belagerers ausgesetzt ist, zu den wichtigsten Aufgaben der Militär-Ingenieure gehörte und Monge zur Begründung der darstellenden Geometrie als Wissenschaft führte. Fast alle namhaften Künstler und Architekten des XV. und XVI. Jahrhundertes waren zugleich Festungs-Baumeister und empfahlen sich den hohen Herren — wie z. B. Leonardo da Vinci bei Lodovico Moro — oft durch ihre militärtechnischen Kenntnisse mehr als durch ihre Kunst. Ein Meisterstück der Kunst des Festungsbaues waren die prachtvollen und malerisch gelegenen Festungswerke von Bellinzona, ein Werk des letzten Visconti (1412—1447).

Einen genialen Kriegsbaumeister besass aber Deutschland in Albrecht Dürer, der in seinem Werke „Etliche underricht zu befestigung der Stett, Schloss und Flecken, Nürnberg 1527“ Festungspläne entwarf, die bereits die Grundzüge enthalten, aus denen sich die

---

[1]) Anmerkung: So wurde der durch das schwedische Bombardement im Jahre 1645 zerstörte Thurm der Brünner Domkirche zu St. Peter bis heute nicht wieder aufgebaut. (S. A. Prokop, Zur Baugeschichte der Brünner Domkirche. Wien 1884).

deutsche Befestigungsart des XIX. Jahrhundertes entwickelt hat. Dürers Werk ist geradezu bahnbrechend in der Geschichte der Festungskriege geworden, da in demselben zumeist die großen Grundgedanken ausgesprochen sind, welche als unerlässlich bei der Anlage und Vertheidigung eines befestigten Platzes in Geltung blieben, so vielfache Abänderungen im Einzelnen die Fortschritte der Bewaffnung auch hervorbrachten. Sein Hauptwall von polygonalem Grundriss wurde durch casemattierte Bastionen flankiert, wie er denn auch bombensichere Geschütz- und Wohncasematten in ausgedehntester Weise und sogar casemattierte Thurmforts anwendete, deren Gräben durch Gallerien und Caponnieren bestrichen werden. So wurden nach dem ersten Türkenkriege (1529) die neuen Befestigungswerke von Wien in den Jahren 1542—61 nach Albrecht Dürers Vorschlägen von deutschen und italienischen Baumeistern und Architekten, nämlich Hermes Schallantzer, Oberbaumeister der Stadt, Augustin Hirschvogel, Bonifacius Wolmuet, Francesco de Poco von Mailand und Domenico Illalio ausgeführt. Auch Padua und andere Orte wurden nach Dürers Methode befestigt. Ähnliche Grundsätze unter Anwendung großer Bastionen und Ravelins bei vollständiger Deckung des Mauerwerkes befolgten Daniel Specklin oder Speckle in seiner „Architectura von Festungen, Strassburg 1589“, ferner Rimpler (gest. 1683) und der niederländische Kriegsbaumeister Landsberg (1648). [1])

In innigster organischer Verbindung mit der Stereotomie (Steinschnitt) stand im vorigen Jahrhundert bis zur Begründung der darstellenden Geometrie als Wissenschaft die Gnomonik, d. i. die Kunst Sonnenuhren zu verfertigen. Mit dieser Kunst, als deren Erfinder der Chaldäer Berosus, wahrscheinlich der Lehrer des Thales (640 vor Chr.) bezeichnet werden muss, haben sich die Babylonier, Griechen, Römer und seit dem IX. Jahrhundert, besonders im XIII. Jahrhundert die Araber vielfach beschäftigt. Mit der Renaissance der Wissenschaften in Deutschland, kam auch diese Kunst in unsere Heimat. So wird von Johannes Stabius, [2]) der als Magister der freien Künste an der Wiener Universität wirkte und im Jahre 1522 gestorben ist, gerühmt, dass er in Nürnberg am Chor der St. Lorenzkirche eine be-

[1]) Vergl.: Krieg von Hochfelden, Geschichte der Militär-Architektur in Deutschland, Stuttgart 1859 u. Cori, Bau und Einrichtung der Burgen im deutschen Mittelalter, Linz 1874.

[2]) Johannes Stab aus Steyr war der Leiter der mathematischen Classe der Gelehrten-Donau-Gesellschaft „Literaria Solid‹tas Danubiana,“ welche 1501 gegründet als die erste Akademie der Wissenschaften in Deutschland betrachtet werden kann.

rühmte Sonnenuhr angefertigt hatte, welche in unserem Jahrhundert unter fachkundiger Leitung wieder hergestellt wurde. Im XVI. Jahrhundert schrieb auch der berühmte Nürnberger Maler Albrecht Dürer über die Construction der Sonnenuhren und 1595 veröffentlichte J. Verner, P. Inghirami, genannt Giovanni Paolo Gallucci, in Venedig sein Werk „De fabricà et usu novi horologii solaris, lunaris, sideralis et in parva pyxide", welches damals viel Aufsehen erregte. Mit dem Problem der Sonnenuhren, welches die alten Astronomen empirisch, die Geometer des Mittelalters trigonometrisch und die Mathematiker der beiden letzten Jahrhunderte analytisch oder descriptiv lösten, beschäftigten sich im XVII. Jahrhundert auch die als Mathematiker und Astronomen bekannten Jesuiten Pierre Bobynet in seiner „Horographie ingénieuse, Paris 1644;" ferner Pierre Georges (Horloge 1660) und Christoff Steiner in Ingolstadt. Ohne Zweifel war die Construction von Sonnenuhren schon im XV. Jahrhundert eine Lieblingsbeschäftigung der Benedictiner, sowie anderer Klostergeistlichen. [1])

Du Séjour dürfte der erste Geometer gewesen sein, der im Jahre 1761 das Problem der Sonnenuhren mittelst descriptiv-geometrischer Constructionen in der einfachsten Weise löste. Unter den zahlreichen Schriften des XVIII. und XIX. Jahrhundertes über diesen Gegenstand erwähnen wir noch die beiden lehrreichen Schriften von Mollet, dessen Gnomonique analytique im Jahre 1812 zu Lyon und dessen „Gnomonique graphique" 1815 in Paris in der ersten und 1884 schon in der siebenten Auflage erschienen sind. Von besonderem wissenschaftlichen Werte ist die Abhandlung von J. A. Grunert: „Gnomonik für jede beliebige Ebene im Raume mit Rücksicht auf die Anwendung der neueren Geometrie zur Ausführung gnomonischer Constructionen," veröffentlicht in seinem Archiv der Mathematik und Physik, 36. Thl. S. 101—123, Greifswald 1861. Schätzenswerte Werke über die Kunst Sonnenuhren zu verfertigen besitzen wir in Littrows Gnomonik (II. Aufl. Wien 1838), welche das Problem theils analytisch mittelst Kegelschnittslinien löste und in Dr. Rudolf Sonndorfers „Theorie und Construction der Sonnen-Uhren auf Ebenen, Kegel-, Cylinder- und Kugelflächen nebst einer historischen Skizze über Gnomonik" (Wien 1864), dessen als Schriftsteller bekannter Verfasser das Problem sowohl auf analytischen als auch auf descriptiven Wege interessanten Lösungen entgegenführte.

---

[1]) Anmerkung: Noch heute zieren zahlreiche Sonnenuhren die Klostermauern und historisch-denkwürdige Gebäude, so auch das alte mährische Landhaus in Brünn aus den Jahren 1691 — 1724, dessen sehr schöne Freskomalereien Daniel le Gran ausgeführt hat.

Schließlich können wir nicht unerwähnt lassen, dass die Gnomonik mit der Perspective und den Schattenconstructionen noch unter Monge und seinen ersten Nachfolgern einen wesentlichen Bestandtheil der „Géométrie descriptive“ bildete.

Eine frühzeitige Verwendung in der bildenden Kunst fand auch die Reliefperspective. Eine besondere Erwähnung verdienen die schon im XVI. Jahrhundert von Meister Alexander Colin aus Mecheln am Grabdenkmale Kaiser Maximilian I. in der Hofkirche zu Innsbruck ausgeführten 24 Reliefdarstellungen aus dem Leben des Kaisers. Diese prachtvollen räumlichen Abbildungen, welche Colin schon im Jahre 1563 in Angriff nahm und den folgenden Jahren vollendete, soll Thorwaldsen als unerreichte Meisterstücke der plastischen Kunst bezeichnet haben. Die wissenschaftliche Begründung der Reliefperspective erfolgte aber erst am Ende des XVIII. Jahrhundertes (1798) durch den Maler Breysig in Magdeburg.

Eine streng wissenschaftliche Anwendung fand die Centralprojection in der stereographischen Projection und in der Kartographie. Wir haben schon in der Einleitung die beiden Astronomen Hipparch (um 150 vor Chr.) und Ptolemäus, der zwischen 125 und 151 nach Chr. astronomische Beobachtungen angestellt hatte, als die ersten darstellenden Geometer des Alterthums bezeichnet, da sie die Erfinder und Begründer eines Projectionsverfahrens waren, welchem Franz von Aiguillon (geb. 1566 zu Brüssel, gest. 1617 in Antwerpen) in seiner Optik vom Jahre 1613 den Namen der stereographischen Projection gab.[1]) Aquilonius, ein gelehrter Jesuit, der seit 1595 als Lehrer der Mathematik in Antwerpen thätig war, war der erste Gelehrte, der in seiner sechs Bücher enthaltenden Optik die Namen orthographische, stereographische und stereographische Projection gebraucht hat. Schon im XIV. Jahrhundert bildete der Almagest des Ptolemäus an unseren Universitäten zu Wien und Prag den Gegenstand der längsten, ein ganzes Jahr umfassenden, aber auch theuersten Vorlesung, für welche man z. B. in Prag im Studienjahre 1366—67 einen Gulden zahlen musste, während man für acht Groschen durch ein halbes Jahr die sechs Bücher des Euklid hören konnte.

Der berühmte Astronom des XVI. Jahrhundertes, Peter Apianus (Bennewitz oder Bienewitz aus Sachsen, geb. 1495, gest. 1552), Professor an der mathematischen Universität zu Ingolstadt, der in Leipzig

[1]) S.: Dr. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II. Bd. S. 636. Leipzig 1892.

und Wien seine Studien absolviert hatte und mit den Wiener Universitätsprofessoren Stabius und Stiborius, seinen früheren Amtscollegen, auf das innigste befreundet war, beschäftigte sich vielfach mit der stereographischen Projection und machte von derselben in seinem berühmten Werke „Cosmographicus liber“ (Landshut 1524) eine sinnreiche astronomische Anwendung.[1]) Die streng-mathematische Abbildung und Darstellung der Land- und Himmelskarten gehörte überhaupt zu den Lieblingsbeschäftigungen der Kunstgelehrten des XVI. Jahrhundertes.

Einen gewaltigen Schritt nach vorwärts und einen streng-wissenschaftlich begründeten Fortschritt auf allen Gebieten der Geometrie verdanken wir in den ersten zwei Decennien des XVII. Jahrhundertes dem Astronomen und Hofmathematicus Kaiser Rudolf II. und Ferdinand II., Johann Kepler, dem Begründer seiner unsterblichen Gesetze der Planetenbewegung.

Schon einhundert und fünfzig Jahre vor Monge erfand Kepler eine schöne Projectionsmethode, welche er dazu anwendete, um durch eine graphische Construction die Erscheinungen der Sonnenfinsternisse für die Bewohner der verschiedenen Punkte auf der Erde zu bestimmen. Dieses Projectionsverfahren, von welchem die Astronomen Cassini, Flamsteed, Wren und Halley hübsche Anwendungen machten, und welches Lagrange in einem Memoire in den Jahrbüchern der Berliner Akademie vom Jahre 1781 (gelesen schon 1778) erweitert und hievon in seiner „Mécanique analytique, Paris 1788“ geistreiche Anwendungen gemacht hatte, veröffentlichte der berühmte Astronom in seinem Werke „Harmonia mundi, liber IV, Lincii 1619. Dieses Werk enthält bekanntlich auch das berühmte dritte Keplersche Gesetz, während die beiden ersten Gesetze schon in der „Astronomia nova, Prague 1609“ veröffentlicht wurden.

Johannes Kepler (Keppler) wurde am 27. December 1571 in dem Dorfe Magstatt bei Weil in Württemberg geboren, besuchte 1586—88 die Klosterschulen zu Adelberg und Maulbronn und kam 1589 als Baccalaureus auf das Stift zu Tübingen, um Theologie zu studieren.[2]) Hier lernte er bei seinem Lehrer der Astronomie, Mästlin, die

[1]) S.: Günther, „Peter u. Philipp Apian.“ Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. VI. Folge XI. Bd.

S. a.: M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II. Bd. S. 369. Leipzig 1892.

[2]) S.: Allgemeine Deutsche Biographie. Auf Veranlassung seiner Majestät des Königs von Baiern herausgegeben durch die historische Commission bei der königl. Akademie der Wissenschaften. XV. Bd. S. 603—624. Leipzig 1882.

Koppernikanische Lehre kennen und der mächtige Einfluss, den Mästlin auf den hochbegabten Jüngling ausübte, blieb auf Keplers ganze Lebensrichtung entscheidend. Da seine religiösen Anschauungen ihm jede Hoffnung auf eine bessere Lebensstellung in Württemberg raubten, so zog er, nachdem er sich im Jahre 1591 im herzoglichen Collegium die Magisterwürde erworben hatte, nach Österreich und fand in Graz als Landschafts-Mathematicus der protestantischen Stände von Steiermark eine Stelle, die er bis zur Aufhebung der Religionsfreiheit im Jahre 1598 inne hatte.

Mit dieser Anstellung, welche ihm einen Jahresgehalt von 150 fl. brachte, war auch die Unterrichtsertheilung in Mathematik an dem ständischen Gymnasium in Graz verbunden. Hier veröffentlichte Kepler im Jahre 1596 unter dem Titel „Prodromus dissertationum cosmographicum, continens mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium coelestium, Tubingae MDXCVI" ein tiefsinniges Werk, in welchem er mit Hilfe der fünf Platonschen Körper den Beweis zu erbringen suchte, dass es nur sechs Planeten — mit der Sonne im Mittelpunkt — im Weltsysteme geben müsse.[1]) Durch dieses Werk wurde die Aufmerksamkeit des als vorzüglichen Beobachters bekannten Hofastronomen Tycho Brahe auf den jungen scharfen Denker gelenkt und dieser veranlasste Kepler im Jahre 1601 nach Prag zu übersiedeln, wo ihn Tycho Brahe dem Kaiser Rudolf II. vorstellte und zum Gehilfen mit freiwillig angewiesener Besoldung ernennen ließ.[2]) Als Tycho Brahe schon am 24. October 1601 aus dem Leben schied, wurde Kepler von Rudolf II. zum kaiserlichen Mathematicus und Hofastronomen mit einem Jahresgehalte von 1500 fl. ernannt. In Prag erschien 1609 seine Astronomia nova, welche die beiden ersten Keplerschen Gesetze über die Planetenbewegung enthielt.[3])

Schon im Jahre 1610 hatten die Magister der philosophischen Facultät an der Universität in Prag den Vorschlag gemacht, den genialen Hofmathematicus als Magister der Astronomie und Mathematik für die Universität zu gewinnen und sofort traten die Defensoren, welche das Ernennungsrecht für die Universitätsprofessuren besaßen, mit Kepler im Unterhandlungen. Kepler, der trotz seines hohen Gehaltes von 1500 fl. schon neun Jahre in Prag sich mit dem bescheidensten Einkommen hatte begnügen müssen, weil der Hofzahlmeister Johann

---

[1]) S.: Joannis Kepleri Astronomi opera omnia. Edit Ch. Frisch. Volumen I., pag. 95—214. Fancofurti a. M. et Erlangae 1858.

[2]) S.: von Hasner, Tycho Brahe und J. Kepler in Prag. Prag 1872.

[3]) S.: Opera omnia edit Ch. Frisch. Vol. III. Francofurti et Erlangae 1860.

Hueber für den genialen Gelehrten nur selten flüssiges Geld in der Casse hatte, war bereit die ihm angetragene Professur an der Prager Universität anzunehmen und erbat sich nur die Auszahlung seiner rückständigen Gehaltsreste von dem königlichen Zahlmeister. Da dies nicht geschah, so zog es Kepler vor, nach eingeholter Bewilligung des Königs Mathias, der Rudolf II. (gest. 13. Juni 1612) in der Regierung gefolgt war, sich mit einer bescheidenen Lehrstelle am ständischen Gymnasium in Linz zu begnügen. Diese Lehrstelle, mit welcher ein Jahresgehalt von 400 fl. verbunden war, hatte Kepler vom J. 1612 bis 1627 inne.

Hier in Linz war es, wo Kepler als Gymnasialprofessor den gewaltigen und wissenschaftlich streng begründeten Schritt in der Geometrie nach vorwärts that, indem er in seinem Werke „Nova Stereometria Doliorum Vinariorum, Lincii MDCXV“ den Begriff des Unendlichen in die Geometrie einführte.[1]) Es war dies ein gar mächtiger Schritt zur Begründung der Infinitesimalgeometrie, den seit Archimed — also in einem Zeitraume von nahezu neunzehn Jahrhunderten — kein einziger Mathematiker gewagt hatte. Keplers Doliometrie, von welcher im Jahre 1616 unter dem Titel „Österreichisches Weinvisierbüchlein“ eine deutsche, volksthümliche Bearbeitung erschien, ist für die Geometrie deshalb von großer Bedeutung, weil sie die Quelle für alle späteren Cubaturen geworden ist.[2])

Wenige Jahre später erschien in Linz sein ebenso berühmtes Werk „Harmonia mundi, Lincii 1619“, in welchem der geniale Astronom sein drittes Planetengesetz veröffentlichte.[3]) Hier finden wir auch das bereits erwähnte sinnreiche Projectionsverfahren Keplers für astronomische Zwecke. Das aus fünf Büchern bestehende Werk handelt im ersten Buche „De Figurarium Regularium, quae proportiones harmonicas pariunt, ortu, classibus, ordine et differentiis, causa scientiae et demonstrationis“ und im zweiten Buche „De congruentia Figurarum Harmonicarum“. Die im ersten Buche ausgeführte Theorie der Sternpolygone wird im zweiten Buche auf die Sternpolyeder erweitert.[4]) Kepler war der erste Geometer, der schon im Jahre 1619 die Sternvielecke, darunter

---

[1]) S.: Joannis Kepleri Astronomi opera omnia. Edit Dr. Chr. Frisch. Volumen IV, pag. 551—665. Francofurti et Erlangae 1863.

[2]) S.: „Auszug aus der Messe-Kunst Archimedis“ (Österreichisches Wein-Visir-Büchlein). Gestelt durch Johann Kepplern, der Röm. Kays. Mt. und Dero getrewer Löbl. Landschafft dess Ertzhörtzogthumbs Oesterreich Ob der Enns Mathematicum. (Opera omnia. Vol. V., pag. 494—613. Francofurti et Erlangae 1864).

[3]) Opera omnia. Vol. V. Pag. 1—493.

[4]) Liber I. Pag. 80—113 et Liber II. Pag. 114—127.

auch das 40-Eck, durch richtige Zählung ihrer Eckpunkte in ihrem Wesen erkannte und ihre streng wissenschaftliche Behandlung zuerst anbahnte. Der große Astronom blieb aber bei den Sternvielecken nicht stehen, sondern dehnte seine scharfsinnigen Untersuchungen in dem genannten Werke auch auf die Sternpolyeder aus. Wenn auch der gelehrte Nürnberger Goldschmied Wenzel Jamnitzer in seiner „Perspectiva, Nürnberg 1568“ die ersten Zeichnungen von Sternpolyedern geliefert hatte, so hatten diese doch mehr künstlerisches, als geometrisches Interesse. Kepler, der schon in seinem „Mysterium cosmographicum, Tubingae 1596“ die Platonschen Polyeder vom mathematisch-astronomischen Gedankengange aus hatte entstehen lassen, verfolgte von diesem Standpunkte die Lehre von den Polyedern weiter und entdeckte in seiner „Harmonia mundi“ — wo er in Liber II. pag. 120 den Würfel isometrisch als regelmäßiges Sechseck projicierte und darstellte — zwei neue reguläre Polyeder, nämlich das zwölfeckige Sternzwölfflach und das zwanzigeckige Sternzwölfflach. [1]) Erst zweihundert Jahre später (1809) gesellte der französische Geometer Poinsot in seinem „Mémoire sur les polygones et les polyèdres“. (Journal de l'École polytechnique, X[e] cah. pag. 16, Paris 1810) zu den Keplerschen Sternpolyedern noch zwei neue Polyeder, das sterneckige Zwölfflach und das sterneckige Zwanzigflach.[2])

Trotz dieser bedeutenden, fast zwei Jahrhunderte umfassenden Zeitdifferenz zwischen der Begründung der Theorie der Sternpolyeder durch Kepler und Poinsot galt noch im Jahre 1864 Poinsot nicht nur als Erfinder seiner beiden Sternzwanzigflache, sondern auch als Erfinder der beiden schon von Kepler entdeckten Sternzwölfflache.[3]) Dieser Irrthum bezüglich der Priorität Keplers findet einerseits in der durch eigenthümliche Umstände veranlassten späten Veröffentlichung[4]) von Keplers Werken in Deutschland seine theilweise Erklärung und andererseits wurde seine Berichtigung durch eine Abhandlung des hervorragenden französischen Mathematikers Bertrand[5]), in welcher Poinsot als der eigentliche Erfinder der Sternpolyeder bezeichnet wurde, wieder auf Jahre hinausgeschoben. Erst zwei hervorragende

[1]) S.: Astronomi opera omnia. Volumen quintum. Harmonices mundi liber II., pag. 120—127. Francofurti et Erlangae 1864.

[2]) S. a.: Dr. Christian Wiener, Lehrbuch der darst. Geometrie. I. Bd. S. 138 Leipzig 1884.

[3]) Vergl.: Dr. Christian Wiener, Über Vielecke und Vielflache. Leipzig 1864.

[4]) S. d. Fußnote [1]) auf S. 210 dieses Werkes.

[5]) Comptes rendus. Tom. 46, pag. 79. Paris 1858

deutsche Geometer, Herr Prof. H. R. Baltzer[1]) und Herr Geh. Hofrath Dr. Christian Wiener[2]) haben Keplers Priorität bezüglich der Begründung der Theorie der Sternpolyeder in seiner „Harmonia mundi“ (liber II, XXVI, pag. 122) in den Jahren 1862 und 1867 klar und zweifellos festgestellt.[3])

Von hohem wissenschaftlichen Werte ist Keplers Werk „Nova Stereometria Doliorum Vinariorum, imprimis Austriaci, figurae omnium aptissimae; et Usus in eo Virgae Cubicae compendiosissimus et plane singularis, Lincii MDCXV.“ [4]) In dem ersten Theile dieses Werkes, welcher den Titel „Stereometria Archimedea“ führt, schloss sich Kepler auf das innigste an sein griechisches Vorbild an und beschäftigte sich in diesem Abschnitte mit der Cubatur von Körpern und Rotationsflächen, welche bereits Archimedes bekannt waren. Es sind dies das Prisma und seine Theilpyramiden, der Cylinder und Kegel von gleicher Basis und Höhe, der Kegel und Cylinder mit ihren eingeschriebenen Kugeln und die Kugel mit ihren unendlich vielen und unendlich kleinen Sectoren. Die den Text erläuternden Figuren sind in dimetrischer Parallelprojection dargestellt.[5]) Im Anschlusse an diesen Theil befindet sich als „Supplementum ad Archimedem“ die Abhandlung „De Stereometria Figurarium Conoidibus et Sphaeroidibus proxime succedentium“ welche der infinitesimal-geometrischen Betrachtung neuer Körper gewidmet ist. Die Einleitung zu diesem „Supplementum ad Archimedem“ über die Geometrie der Raumgebilde bilden die Abhandlungen „De sectionibus coni, solidorum genitricibus,“ „De modis geneseos“ und „De figuram numero et differentiis.[6]) Die erste dieser Abhandlung beschäftigt sich mit der Ordnung und den Eigenschaften der Kegelschnitte, und mit der Aufgabe, die drei Kegelschnitte mit Behendigkeit auf einem ebenen Felde aufzureißen. Die zweite Abhandlung „De modis genesos“ hat die Erzeugung der von Rotationsflächen begrenzten Räume zum Gegenstande und untersucht die Körper, welche entstehen, wenn ein flacher Kegelschnitt am

[1]) Monatsberichte der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1862. S. 1046.

[2]) S.: „Bemerkungen über die regelmäßigen Sternvielflache.“ Zeitschrift für Mathematik und Physik. XII. Jahrg. S. 174. Leipzig 1867.

[3]) S.: Joannis Kepleri Astronomi opera omnia. Edit Dr. Ch. Frisch. Volumen V. pag. 122. Francofurti et Erlangae 1864.

[4]) S. a.: Joannis Kepleri Astronomi opera omnia. Edit Dr. Ch. Frisch. Vol. IV, pag. 551—665. Francofurti et Erlangae 1863.

[5]) S. im Originalwerk „Nova Sterometria, Lincii MDCXV“ die Figuren zu „Theorema III.—XII.“

[6]) S.: Astronomi opera omnia. Vol. IV, pag. 574—582 u. „Österreichisches Wein-Visier-Büchlein. Ibid. Vol. V, pag. 524.

„Drästock zur Lehr gebraucht wird und die Massa oder Zeug nach solcher Lehr abgedräet wird.“

Kepler unterscheidet vier Kegelschnittslinien: „Den Kreis (Circkel), die Ellipse (ablänger Circkel), ein Parabole und ein Hyperbole.“ Jede dieser Kegelschnittslinien kann auf fünferlei Art „zur Lehr angeschlagen werden“, je nachdem eine außerhalb des Meridians gelegene Gerade, oder eine Tangente, eine Secante diesseits oder jenseits des Mittelpunktes oder ein Durchmesser als Drehungsachse der erzeugten Rotationsfläche benützt werden.

Außer den schon von Archimedes in seinem „libro de Conoidibus et Sphaeroidibus“ betrachteten „Sphaeroides longum et latum“ (eiförmiges Ellipsoid), nach Kepler ablenge Kugel oder Ay, und linsenförmiges Ellipsoid, gedruckte Kugel oder Linse, Polster oder Küss, und den „Conoidea parabolicum et hyperbolicum“ (Rotationsparaboloid, von Kepler Heuschober, und zweimanteliges Rotationshyperboloid, von Kepler Berg oder Arbisshaufen genannt) finden wir in seiner Stereometria Doliorum die auf infinitesimalgeometrische Betrachtungen gegründete Cubatur (Leib- oder Raumbestimmung) von 92 jetzt nach Kepler benannten Rotationskörpern, welche er durch Drehung von Kegelschnittsbogen um ihre (reellen und imaginären) Sehnen und Tangenten erzeugte und mit den Namen von Früchten bezeichnete. Durch Drehung eines Kreises um eine außerhalb desselben gelegene Achse entsteht ein Ring (annulus) und um seine Tangente ein beschlossener Ring (annulus strictus); ein Kreisbogen, der größer ist als ein Halbkreis, erzeugt, um die Sehne seiner Endpunkte gedreht, den apfelrunden Körper (mali fructus arborei forma), während durch Drehung eines kleineren Bogens um seine Sehne ein citronenrunder Körper (corpus citrii) erzeugt wird. Ein Ellipsenbogen gibt um seine zur kleinen Achse parallele Sehne gedreht die Gestalt einer Olive oder lenglechten Zwespe (längliche Pflaume, oliva, pruna); ist hingegen die Rotationsachse eine zur Hauptachse parallele Sehne, so entsteht die Gestalt einer Kriechen oder Gurre (Gurke, zona cucurbitae). [1]) Der geniale Schulmeister untersucht apfel-, quitten- und kürbisrunde Räume (melones), sowie citronen-, oliven-, zwespen-, judenkirschen- und kriechenrunde Körper, deren Cubikinhalt er bestimmt. Durch Drehung der Parabel und Hyperbel

---

[1]) S.: „De Stereometria Figurarum.“ (Supplementum ad Archimedem) Stereometria Doliorum. Astronomi opera omnia. Vol. IV., pag. 574—601. Francofurti et Erlangae 1863 und „Auszug aus der Messe-Kunst Archimedis.“ (Österreichisches Wein-Visier-Büchlein). Opera omnia. Vol. V., pag. 495—554. Francofurti et Erlangae 1864.

entstehen das Conoides parabolicum und das Conoides hyperbolicum. Ein entsprechender Parabel- oder Hyperbelbogen gibt als Rotationskörper den „montis Aetna“ sammt seinem Krater. Der Rauminhalt des Conoides parabolicum (Hewschoch oder Heuschober) ist anderthalbmal so groß, als der eines gleichhohen Kegels über der Grundfläche.

„Mit dem Conoide hyperbolico (Berg oder Arbisshauffen, auch Bergkülbel) hat es mehr Wunders, denn dies Conoides gilt nicht gar anderthalb seines Kegels, sondern je gespitzter, je weniger und endlich gar um ein Unkenntliches mehr denn sein Kegel. Muß deshalben einem jeden solchen Conoidi, deren undlich vielerley Sorten, noch ein anderer Kegel (Conus Aymptoton) gesucht werden, aus welchem solch Conoides gleichsam geschälet ist.“ Diesen „Conus Aymptoton“ findet Kepler, indem er die Tangente in dem untersten Punkte der Hyperbel um die reelle Achse rotieren lässt und bestimmt den Rauminhalt seines Berges oder Arbisshaufens — die Hälfte eines zweitheiligen Hyperboloides — aus der Höhe dieses Tangentenkegels und dem Rauminhalt des Kegels von gleicher Basis und Höhe des Conoides.[1]) Von den citronenrunden Räumen übergeht Kepler auf die Cubatur der Weinfässer.[2]) Kepler, der in Prag durch eilf Jahre mit Nahrungssorgen zu kämpfen hatte und in Linz eine zweite Heimat fand, war hier in der glücklichen Lage, sich für billiges Geld ein Fass guten Weines kaufen zu können, das ihn auf eine geistreiche Bestimmung seines Inhaltes als Rotationsfläche führte. Er bewies durch seine infinitesimalgeometrische Betrachtung, dass die österreichischen Weinfässer bei der geringsten Menge (Minimum) von Fassholz den größten Rauminhalt (Maximum), also auch die zweckmäßigste Gestalt besitzen. Unsere vollste Bewunderung verdienen aber in Keplers Stereometrie seine functiontheoretischen Untersuchungen über die Veränderungen der Werte von Functionen in der Nähe der Maximalwerte.[3]) Hier finden wir auch den Maximalsatz, dass der der Kugel eingeschriebene Würfel dem Inhalte nach das größte Parallelopipedum sei, welches der Kugel eingeschrieben werden könne.

Vom curventheoretischen Standpunkte interessant ist auch der Lehrsatz über die einem rechtwinkeligen Dreieck eingeschriebene, coaxiale Kegelschnittsschar (Theorema XXV, Stereometria Archimeda pag. 598, Opera omnia vol. IV), durch welche das Geschlecht eines

---

[1]) S.: Astronomi opera omnia. Vol. IV., pag. 578 etc. Vol. V., pag. 528.

[2]) S.: „Stereometria Dolii Austriaci in specie.“ Vol. IV., pag. 602—646, und Vol. V., pag. 560—610.

[3]) S.: Astronomi opera omnia. Vol. IV., pag. 598—599. — Vergl. a.: Dr. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II. Bd. S. 755. Leipzig 1892.

jeden Kegelschnittes entschieden werden kann. Hier hat Kepler die erste inverse Tangentenaufgabe gestellt.[1]) Gewiss war Kepler, diesem classischen Gymnasiallehrer aus dem sechszehnten und siebzehnten Jahrhundert, der die Lehre von den Platonschen regelmäßigen Körpern und jene der halbregelmäßigen Körper von Archimedes um seine beiden Sternpolyeder erweiterte und sich in seiner Doliometrie in eingehender Weise mit den Eigenschaften der Kegelschnittslinien und mit der Cubatur ihrer Sphaeroide und Conoide beschäftigte, die graphische Darstellung dieser Raumgebilde kein Geheimnis, wenn sie auch als solche nicht im Bereiche seiner tiefsinnigen Forschungen lag. So fanden wir in seiner „Harmonia mundi Lincii 1619" den Würfel in isometrischer und in dimetrischer Projection, das Dodekaeder, Ikosaeder und die beiden Sternpolyeder in orthogonaler Projection, während das uns vorliegende Original von Keplers „Nova Stereometria Doliorum, Lincii anno MDCXV" die dargestellten Körper mit den eingeschriebenen Cylindern und Kugeln in Perspective oder in dimetrischer Parallelprojection enthält.[2]) Die zu dem „Theorema XX" dargestellte Figur (Zona mali componitur ex zona globi et segmento recto cylindri), welche die Trümmer einer jeden „Säulen" oder den schiefen Cylinderabschnitt zum Gegenstande hat, lässt ganz deutlich die trimetrische Projectionsmethode erkennen.[3])

Kaiser Ferdinand II. ernannte den berühmten Astronomen in Anerkennung seiner großen wissenschaftlichen Verdienste am 30. December 1621 zum kaiserlichen Mathematicus und ließ Kepler den Betrag von 4.000 fl. auf seinen Gehaltsrest als gewesenen Hof-Astronomen Rudolf II. auszahlen. Den anderen Theil hätte Kepler aus der schlesischen Kammer bekommen sollen. Bis zum Jahre 1627 wirkte Kepler als Lehrer der Mathematik am Gymnasium in Linz. Im Jahre 1626 übernahmen die Jesuiten, welche schon 1552 in Wien eingezogen waren und durch 220 Jahre das österreichische Schulwesen beherrschten, das im J. 1550 von den Protestanten gegründete Gymnasium in Linz und veranlassten, dass die Bibliothek Keplers, der schon seit dem Jahre 1618 im Verdachte stand, den Tod des Königs Mathias (gest.

---

[1]) S.: Astronomia opera omnia. Vol. IV., pag. 598 u. „Österreichisches Wein-Visier-Büchlein." Vol. V., pag. 529 et 551.

[2]) Anmerkung: Eine sehr gut erhaltene Originalausgabe der „Nova Stereometria Doliorum" aus dem Jahre 1615 besitzt auch die Bibliothek der k. k. technischen Hochschule in Brünn, auf welche wir alle Verehrer des großen Astronomen aufmerksam machen.

[3]) S. im Originalwerk „Nova Stereometria, Lincii MDCXV" die Figuren zu „Theorema XX.—XXII." (Op. om. vol. IV, pag. 584 et vol. V, pag. 587).

10. März 1619) prophezeit zu haben und dessen Mutter in Württemberg in einen Hexenprocess verwickelt wurde, versiegelt wurde. Obwohl Kepler die mathematischen Schriften freigelassen wurden und ihm — als zum Hofe gehörig — Freiheit versprochen war, so hatte trotzdem der berühmte Astronom unter der Strenge der Reformation zu leiden. Desshalb erbat sich der Hof-Mathematicus von seinem Kaiser und Herrn, Ferdinand II., die Erlaubnis, als Mathematiker und Astronom in den Dienst Waldsteins, des Herzogs von Friedland, zu treten. Dieser wurde vom Kaiser angewiesen, Kepler die restliche Schuld von 12.000 fl. zu bezahlen. Da dies aber nicht geschah, so unternahm der im 59. Lebensjahre stehende Gelehrte im October des Jahres 1630 einen Ritt von Wallensteins Schloss Sagan in Schlesien über Leipzig nach Regensburg, um vor dem hier tagenden Reichstage seine Gehaltsansprüche geltend zu machen. Kepler erreichte am 30. October Regensburg, verfiel aber infolge der ausgestandenen Reisestrapazen in ein Nervenfieber, von dem ihn der Tod am 15. November 1630 erlöste. [1])

Kaiser Ferdinand II. ehrte das Andenken des großen Astronomen und künstlerisch fühlenden Mathematikers, der in Österreich, seiner zweiten Heimat, während einer fünfunddreißigjährigen Thätigkeit auf dem Gebiete der exacten Wissenschaften Unsterbliches geleistet hatte, dadurch, dass er Keplers Witwe die für jene Zeit namhafte Summe

[1]) Anmerkung: Ein ähnliches Schicksal, wie es Keplers Leben beschieden war, traf auch seine für die Geschichte der exacten Wissenschaften in Österreich so wichtigen und wertvollen Manuscripte. Schon unter Kaiser Karl VI. wurde der Mathematiker und Magister der Philosophie Michael Gottlieb Hansch (geb. 1687 in Müggenthal bei Danzig), der an den Universitäten zu Leipzig, Prag und Wien mathematische Vorlesungen gehalten hatte, und etwa 1718 Keplers 22 Handschriftenbände umfassenden Manuscripte um den Betrag von 100 fl. von Hevels Erben erworben hatte, vom Wiener Hofe mit der Herausgabe von Keplers wissenschaftlichen Nachlass beauftragt. Magister Hansch, der hiefür den Betrag von 4000 fl. erhielt, gerieth nach Veröffentlichung des ersten Keplers Biographie u. Briefwechsel enthaltenden Bandes „Joannis Kepleri, Vol. I, Francofort a. M. 1718" in Noth, und da er von Wien keine weitere Unterstützung zu erwarten hatte, so versetzte er im Jahre 1721 achtzehn Handschriftenbände Keplers für 828 fl. in Frankfurt a. M., wo sie nach vielen Nachforschungen erst im Jahre 1770 vom Literaten von Murr aufgefunden wurden. Magister Hansch war schon am 19. April 1749 in Wien in den dürftigsten Verhältnissen gestorben. Literat von Murr verkaufte den kostbaren Schatz an die Kaiserin Katharina II. von Russland, welche Keplers Nachlass der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Petersburg zum Geschenke machte. Hier wurden Euler, Lexel und Kraft mit der Durchsicht von Keplers Werken beauftragt. Eine neue Ausgabe von Keplers Werken verdanken wir Herrn Prof. Chr. Frisch in Stuttgart. (Joannis Kepleri Astronomi opera omnia. Edit. Ch. Frisch. Vol. I—V. Francofurti a. M. et Erlangae 1858—1864).

von 12.694 fl. auszahlen liess. Schon im Jahre 1617 — nach dem Tode des berühmten italienischen Astronomen Magini (gest. 1615) — hatte die Universität Bologna Kepler die erledigte Professur für Astronomie angetragen und wenige Jahre vor seinem Tode erhielt er auch den Ruf als Professor der Mathematik an die Universität Rostock. Kepler, der trotz mancher harten Schicksalsschläge Österreich, seine neue Heimat, liebgewonnen hatte, lehnte beide Berufungen ab.

Keplers geniale Forschungen auf dem Gebiete der Geometrie bilden den geistigen Höhepunkt, welcher im ersten Drittel des XVII. Jahrhundertes auf österreichischem Boden erreicht wurde und durch volle zwei Jahrhunderte nicht überschritten werden sollte. Gewiss hätten seine geistigen Errungenschaften eine mächtige Grundlage für den weiteren Ausbau der Geometrie gebildet und hätten ihrem Schöpfer eine noch ehrenvollere Stellung in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften erworben, wenn nicht die nach dem Erscheinen seiner unsterblichen Werke bald losbrechender Wirren des dreißigjährigen Krieges den exacten Wissenschaften in unserem Vaterlande einen Todesstoss versetzt hätten. Die religiösen Streitigkeiten und die Kriegsunruhen des XVII. Jahrhundertes waren Keplers idealem Streben auf wissenschaftlichem Gebiete sehr ungünstig. So wird erzählt, dass vor der Schlacht am weißen Berge (8. Nov. 1620) in der Hans Plankschen Buchdruckerei in Linz die Lettern in Kugeln umgegossen und die Manuscripte und Druckwerke, darunter Keplers Doliometrie, das Wein-Visier-Büchlein und seine Harmonia mundi für die Patronen der Feuerbüchsen verwendet wurden.

Österreich besaß am Anfang des XVII. Jahrhundertes vor Ausbruch der religiösen Bürgerkriege und dem jedes wissenschaftliche Streben vernichtenden 30-jährigen Kriege in seinen Gymnasien, Lyceen und niederen Schulen ein treffliches Mittel zur Förderung der Volksbildung. Schon im sechsten Jahrhundert erhielt Salzburg seine Schola Sancti Petri, welche bis 1615 bestand und im Jahre 1617 von den Benedictinern von St. Peter und Ottobeuern als „Gymnasium publicum" wieder eröffnet wurde. Etwa 980 wurde in Brixen vom Bischof Säben die „Domschule" errichtet und im Jahre 1278 gründete der „Deutsche Orden" in seinem Hause am Leech bei Graz eine humanistische Bildungsstätte, welche am Anfang des XVI. Jahrhundertes in die Stadt verlegt wurde. Etwa 1300 errichteten die Benedictiner in Braunau ihre Klosterschule und im XIV. Jahrhundert (um 1350) erhielt Saaz seine unter dem Namen „Saazer Schule" bekannte Anstalt, berühmt dadurch, dass sie nach dem Lehrplane des Jakob Strabo — eines hervorragenden Gelehrten der Wiener Universität — schon im Jahre 1575 aus fünf

Classen bestand. Im Jahre 1418 gründete der Pfarrer Hewgenreuter in Laibach die St. Nikolausschule und 1562 erhielt Innsbruck vom Kaiser Ferdinand I. ein Gymnasium. Eine lateinische Schule bestand in Trient schon im XIV. Jahrhundert. Eine ganze Reihe von Gymnasien wurde im XVI. und XVII. Jahrhundert von den Ordensbrüdern errichtet. Kremsmünster (1549), Wien (1552), Linz (1550), Klagenfurt (1563), Prag (1566), Olmütz (1566), Brünn (1578), Triest (1600), etc. erhielten ihre Gymnasien.

Während Kepler am Gymnasium in Linz seine lehramtliche und hochwissenschaftliche, literarische Thätigkeit entfaltete, wirkte vom Jahre 1614 bis 1628 zu Prerau und Fulnek in Mähren Johann Amos Comenius [1]), ein Mann, dessen segensreiche Lehrthätigkeit und schriftstellerisches Schaffen mit goldenen Lettern in der Geschichte unseres Schulwesens und der Pädagogik für ewige Zeiten eingegraben bleiben wird.

Diese trefflichen Schulen, welche ein ersprießliches Gedeihen des ganzen Staatswesens in unserer Monarchie zur Folge hatten, waren das erste Opfer jenes unglückseligen Krieges und es brauchte viele Jahrzehnte, bis in den verwüsteten Ländern der Bürgerstand von selbstlosen Männern der geistigen Nacht entrissen wurde, in die ihn der Fanatismus religiöser Bürgerkriege getrieben hatte.

Durch mehr als zwei Jahrhunderte (1551—1773) lag das Unterrichtswesen in Österreich in den Händen des mächtigen Jesuitenordens. Wenn wir auch die Thätigkeit des Jesuitenordens [2]) auf dem Gebiete der mathematischen Literatur und des Unterrichtswesens in ihrer Allgemeinheit keiner näheren Besprechung unterziehen wollen, so müssen wir doch eines Gelehrten aus der Gesellschaft Jesu besonders gedenken, der bald nach Keplers Tode dessen Bedeutung auf dem Gebiete der exacten Wissenschaften unbegrenzte Bewunderung zollte. Es ist der Jesuit Paul Guldin, der seit 1622 als Professor der Mathematik an

---

[1]) Johann Amos Comenius, der Begründer der neueren Pädagogik, wurde am 28. März 1592 in Nivnitz bei Ung.-Brod in Mähren als Sohn eines Müllers geboren. Infolge der religiösen Wirren musste er im Jahre 1628 sein Vaterland verlassen und starb als fast 80jähriger Greis am 22. November 1670 in Naarden bei Amsterdam. (S.: Gindely, „Comenius Leben und Wirksamkeit in der Fremde." Wien 1855).

[2]) S. d. n.: Dr. Johann Kelle, Die Jesuiten-Gymnasien in Österreich. Prag 1873 und München 1876. S. a. die Gegenschrift: Rupert Ebner S. J., Die Jesuiten-Gymnasien in Österreich. Linz 1874 und 1875. — Ignaz Cornova, Die Jesuiten als Gymnasiallehrer. Prag 1804. — Georg Patiß, Das Wirken der Gesellschaft Jesu in der österreichischen Ordensprovinz. Regensburg 1861. — Joh. Huber, Der Jesuitenorden. Berlin 1873.

der Universität zu Wien, später an jener zu Graz wirkte, wo er im Jahre 1643 starb. Sein aus vier Bänden bestehendes Werk „Centrobaryca seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continue“ erschien in den Jahren 1635 bis 1641 in Wien. Neben Guldin müssen wir noch die beiden Jesuiten Adam Kochansky und Gregorius von Sanct Vincentius (gest. 1667), Professoren der Prager Universität, als hervorragende Schriftsteller auf dem Gebiete der Cyclometrie nennen. Ersterer veröffentlichte in den Leipziger Actis eruditorum vom Jahre 1685 eine äußerst elegante, näherungsweise Rectification des Kreises; letzterer von 1629—31 in Prag als Professor der Mathematik thätig, gab 1647 sein zehn Bücher umfassendes Werk „Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni“ in Gent heraus. Ein drei Bände umfassendes Werk über Statik und Geometrie wurde P. Vincentius während seines Aufenthaltes in Prag zur Zeit der Schrecknisse des 30-jährigen Krieges durch Feuer vernichtet.

Von späteren Schriftstellern nennen wir noch Andrea Pozzo, der Soc. Jesu Fratre, dessen zwei Bände umfassendes lateinisches Werk über die Perspective in Rom herausgegeben wurde. Die deutsche Ausgabe „Der Maler und Baumeister Perspectiv“ erschien im Jahre 1800. Dieses Werk „worinnen gezeiget wird, wie man auf das allergeschwindeste und leichteste alles, was zur Architektur und Baukunst gehöret, in Perspectiv bringen solle“ enthält im I. Quartbande (44 S.) 100 reich ausgestattete, zumeist kirchliche Monumentalbauten in freier Perspective darstellende Beispiele, während der II. Quartband (47 S.) der speciellen Architektur (114 Fig.) gewidmet ist und im Anhange schöne Fortificationsbauten in der Vogelperspective enthält. Das interessante Werk fand auch in Osterreich mehrfache Verwendung.

Mit dem Jahre 1627, in welchem das Linzer Gymnasium seinen genialen Lehrer der Mathematik verlor, begann in Österreich eine Zeitperiode, in welcher nur ein gedämpftes Licht das geistige Gebiet der exacten Wissenschaften durchdringen durfte. Keplers Rücktritt vom Jesuiten-Gymnasium in Linz bezeichnet den Anfang dieser geistigtrüben Periode, die mit Bolzanos Enthebung von der Universitäts-Professur in Prag im Jahre 1820 ihren langersehnten Abschluss findet. Bernhard Bolzano, geb. 5. October 1781 in Prag, dieser humandenkende Philosophie-Professor und berühmte Kanzelredner, der schon als Student in der Abhandlung „Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie, Prag 1804“ eine der später von Legendre begründeten Parallelentheorie sehr ähnliche Theorie aufgestellt hatte und durch die Schriften „Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik, Prag 1810“ und „Die drei Probleme der Rectification, der

Complanation und der Cubierung, Leipzig 1817" sich den Ruf eines ausgezeichneten mathematischen Schriftstellers hätte leicht erwerben können, war das letzte Opfer dieser den exacten Wissenschaften so ungünstigen Geistesrichtung. [1])

Schon am Ende des XV. und am Anfang des XVI. Jahrhundertes hatte unter Kaiser Maximilian I. das wissenschaftliche Leben an der Wiener Universität einen überaus regen Aufschwung genommen und führte 1501 zur Gründung der „Literaria Solidatas Danubiana", der ersten Akademie der Wissenschaften in Deutschland, in welcher Kaiser Maximilian I. die Krönung der hervorragendsten Schriftsteller dieses „Collegiums poëtarum et mathematicorum" mit dem Lorbeer persönlich vorzunehmen pflegte. Nur wenige Jahre erfreute sich die „Gelehrte Donaugesellschaft" ihres Bestandes und mit Celtes Tode (1508) löste sich das humanistische Institut auf. Schon im Jahre 1666 schuf der damals allmächtige, die Wissenschaften eifrig fördernde Minister Colbert die Académie des sciences de Paris und 1662 erhielt die Royal Society in London die königliche Bestätigung. In den Märztagen des Jahres 1700 begründete der Kurfürst Friedrich III. von Brandenburg die Societät der Wissenschaften in Berlin und ernannte den Begründer der Differential- und Integralrechnung, Gottfried Wilhelm von Leibniz, zu ihrem ersten Präsidenten. Im Jahre 1765 wurde die königliche Akademie der Wissenschaften in München eröffnet. Italien besass schon im J. 1657

---

[1]) S.: Robert Zimmermann, „Bernhard Bolzanos wissenschaftlicher Charakter." Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Jahrg. 1849. — Dr. O. Stolz, „B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalgeometrie." Mathematische Annalen. Bd. XVIII. S. 255. Leipzig 1881.

Anmerkung: Bolzano hatte schon einige Jahre bevor Cauchy durch Veröffentlichung eines Theiles seiner Vorlesungen über Infinitesimalrechnung seinen Ansichten in weiten Kreisen Eingang verschaffte, in einer Reihe seiner Abhandlungen die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung vielfach übereinstimmend mit ihm, aber auch in wichtigsten Punkten vollständiger als er entwickelt. Herr Prof. Hankel erkannte die Priorität vor Cauchy in der richtigen Auffassung der Lehre von den unendlichen Reihen zu, und Dr. H. A. Schwarz bezeichnete Bolzano als den Urheber einer von Herrn Prof. Weierstrass weiter entwickelten Schlussweise.

(S.: Allgemeine Encyclopädie von Erich u. Gruber. Jahrg. 1871. Artikel „Grenze" und Borchardt Journal. Bd. 74, S. 221, Berlin 1872). Eine angeblich von jesuitischer Seite ausgegangene Denunciation beschuldigte den beliebten Philosophie-Professor der Hinneigung zum Protestantismus und zum Rationalismus. Da er es mit seinem Charakter nicht vereinbar fand, vier ihm zur Last gelegte Thesen zu widerrufen, so wurde er im Jahre 1820 vom Lehramte enthoben. Das Schicksal wollte es, dass Bolzano, dessen Universitäts-Vorlesungen ein freimüthiger Geist durchwehte, gerade in jenem Jahre (18. Dec. 1848) aus dem Leben schied, in welchem sich in seinem Vaterlande ein freierer Geist bereits Bahn gebrochen hatte.

in der von Leopold von Medici gegründeten Accademia del Cimento zu Florenz ein wissenschaftliches Institut, welches aber schon 1667 wieder geschlossen wurde.

Vergeblich waren die Bemühungen des Präsidenten der Berliner Akademie, Gottfried Wilhelm von Leibniz, um auch schon im ersten Decennium des XVIII. Jahrhundertes in Wien eine Akademie der Wissenschaften ins Leben zu rufen. Der allumfassende deutsche Gelehrte fand im Jahre 1710 am Hofe Kaiser Karl VI. wohl die ehrenvollste Aufnahme, sein erhabenes Ziel — die Gründung einer kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien erreichte er nicht — sie scheiterte an dem Widerstande der Jesuiten. Ebenso vergeblich waren die Bemühungen Klopstocks, der unter Kaiser Josef II. die von Leibniz angeregte Gründung der Akademie der Wissenschaften in Wien wieder in Angriff genommen hatte.[1]) Der große Minister Fürst Kaunitz, unter dessen besonderem Schutze die Akademie der bildenden Künste ins Leben gerufen wurde, hatte nicht das Glück, seinen Ruhm durch die Gründung einer kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu vervollständigen.

Eine erfreuliche Wendung im österreichischen Unterrichtswesen trat erst ein, als die glorreiche Kaiserin Maria Theresia im J. 1760 die Leitung des Studienwesens in der ganzen Monarchie einer Hofcommission übertragen hatte und im Jahre 1773 die Aufhebung des Jesuiten-Ordens verfügte. Die Universitäten wurden in Staatsinstitute umgewandelt, die Gymnasien reformiert und 1774 die Volksschule als wichtigste Erziehungs- und Bildungsanstalt des Bürgerstandes geschaffen.

Noch im Jahre 1773, dem Jahre der Aufhebung des Jesuiten-Ordens, gab es in Österreich Jesuiten-Gymnasien, in welchen die Schüler — trotz Allerhöchster Hofdecrete[2]) und kaiserlicher Patente[3]) — noch kein Wort über Arithmetik, Geometrie und selbst Geographie zu hören bekamen. Noch in der Studienordnung „Instructio pro scholis humanioribus“ vom Jahre 1764, welche den Director Gaspari zum Verfasser hatte, bildeten die vier Species das höchste Ziel, welches in der

[1]) S. die Eröffnungsrede des ersten Präsidenten der kais. Akademie der Wissenschaften, Freiherr von Hammer-Purgstall, in der feierlichen Eröffnungssitzung am 2. Februar 1848. (Sitzungsberichte der philosophisch-historischen Classe der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. I. Bd. S. 11, Jahrg. 1848).

[2]) S.: Allerhöchstes Hofdecret vom 25. Juli 1752 u. 19. Juli 1766.

[3]) S.: Kais. Patent vom 4. Februar 1764 u. 10. August 1776. Vergl. a. die Studienordnungen (Instructio pro scholis humanioribus) aus den Jahren 1752, 1764 und 1775.

Mathematik am Gymnasium erreicht werden sollte.[1]) Erst in der fünften Classe (Poetik) lernten die Schüler dividieren und der sechsten Classe (Rhetorik oder zweite Humanitätsclasse) war es vorbehalten, den Schülern die „goldene Regel" beizubringen. Auch nach dem später vom Piaristen Marx entworfenen, von der Studien-Hof-Commission gutgeheißenen und von der Kaiserin Maria Theresia am 13. October 1775 sanctionierten Lehrplane wurden Mathematik, Geschichte, Geographie und Naturgeschichte noch höchst mangelhaft gelehrt.

Im Jahre 1795 wurde die Studien-Revisions-Commission unter Vorsitz des Grafen Rottenhann eingesetzt, um über Reformen der Studien in Österreich zu berathen. Sie hatte Anträge zu stellen, um den Staatseinwohnern nach dem Maße ihrer Empfänglichkeit den höchst möglichen Grad von Geistesbildung zu gewähren, der zu ihrem individuellen und zum allgemeinen Wohlstande dienlich ist. Diese Aufgabe konnte von den Schulen, die damals bestanden, nicht gelöst werden, da alle höheren Schulen eigentlich nur humanistische Bildungsstätten für gelehrte Berufe waren. Diese Lücke im österreichischen Unterrichtswesen erkennend, empfahl Graf Rottenhann dringendst die Errichtung von Realschulen, die er als „Lyceen für den höheren Bürgerstand" bezeichnete und in welchen er die Unterrichtsmethode der Gymnasien angewendet wissen wollte. Der umsichtige Präses dieser Studien-Hofcommission berief im Jahre 1795 unter anderen hervorragenden Gelehrten auch den Professor der Prager Universität, J. von Gerstner, in diese Revisionscommission, dessen Liebe zu den exacten Wissenschaften wir die Errichtung des ersten polytechnischen Institutes in Österreich verdanken.

Selbstverständlich bedurfte es noch einer stattlichen Reihe von Jahren, bis sich in unserem Vaterlande eine strengwissenschaftliche Pflege der mathematischen Wissenszweige Bahn gebrochen hatte und so konnte noch im Jahre 1822 — also 185 Jahre nachdem Descartes die glückliche Idee gefasst hatte, die krummen Linien durch Gleichungen auszudrücken und so die Algebra auf die Geometrie anzuwenden —

---

[1]) S.: Dr. Joh. Kelle, Die Jesuiten-Gymnasien in Österreich. S. 162. Prag. 1873. — S. a.: J. Schaller, Gedanken über die Ordensverfassung der Piaristen und ihre Lehrart 1805.

Anmerkung: Schon in der Allerhöchsten Entschließung der für die Volksbildung so besorgten Kaiserin Maria Theresia vom 25. Juni 1752 hieß es: „Die Gesellschaft habe alle Vorschriften ohne weitere Rückfragen, Bedenken oder berichtliche Anzeigen unfehlbar sogleich zu vollziehen, widrigenfalls die Kaiserin widerspänstige Professoren unnachsichtlich abzusetzen entschlossen sei." (Vergl.: Dr. Johann Kelle, Die Jesuiten-Gymnasien in Österreich. S. 82. Prag 1873).

einer unserer hervorragendsten Gelehrten, J. J. Littrow, Director der Sternwarte und Professor der Astronomie an der k. k. Universität zu Wien, in der Vorrede zu seiner „Analytischen Geometrie" sagen: „Diese Wissenschaft — die ersten Anfangsgründe derselben etwa ausgenommen — ist trotz ihrer großen Vorzüge bei uns noch wenig bekannt." [1]) Aber trotz des besonderen Interesses, welche unsere hervorragendsten Mathematiker in den ersten Decennien dieses Jahrhundertes der Astronomie, der ebenen und sphärischen Trigonometrie, der praktischen Geometrie, sowie der höheren Analysis, der Theorie der Gleichungen und jener der Differentialgleichungen entgegenbrachten, fanden auch die analytische Geometrie und die Infinitesimalgeometrie eine stattliche Zahl von ausgezeichneten Männern, denen wir besondere Erfolge auf diesen beiden mathematischen Wissenszweigen verdanken. Als ersten unter ihnen müssen wir Andreas von Ettingshausen, Professor der Wiener Universität, nennen, dessen „Vorlesungen über höhere Mathematik" (I. Bd. Analysis, II. Bd. Analytische Geometrie) eine neue mit dem Jahre 1821 beginnende Epoche der Mathematik an der Wiener Universität bezeichnen. [2])

Die Vorlesungen über Infinitesimalgeometrie von Prof. Andreas von Ettingshausen, der seine umfassende und gründliche Bildung in den mathematischen Wissenschaften seinem ausgezeichneten Lehrer, dem Major Ignaz Lindner, Professor der höheren Mathematik im k. k. österreichischen Bombardier-Corps, verdankte, standen schon in ihrem vollen Umfange auf jener geistigen Höhe, auf welche sie in den letzten Decennien des XVIII. Jahrhundertes von Lagrange, Laplace und besonders von Monge gebracht worden sind. Eine rege Verbreitung besonders in technischen Kreisen fand die analytische Geometrie

---

[1]) Josef Johann von Littrow wurde am 13. März 1781 zu Bischofteinitz in Böhmen geboren, studierte seit 1799 in Prag Jura und Theologie, wurde 1807 Professor der Astronomie an der Universität in Krakau, 1810 an jener in Kasan und 1816 Director der Sternwarte in Ofen. Im Jahre 1819 erhielt er die Berufung als Director der Sternwarte u. Professor der Astronomie an der Universität in Wien, wo er am 30. November 1840 starb. Seine Werke erschienen in Stuttgart im Jahre 1846 unter dem Titel „Vermischte Schriften."

[2]) Andreas Freiherr von Ettingshausen wurde am 25. November 1796 in Heidelberg geboren, studierte in Wien Philosophie und Rechtswissenschaften und trat hierauf in die Bombardierschule. Im Jahre 1817 wurde er Adjunct der Mathematik und Physik an der Wiener Universität, an welche er nach einer kurzen Lehrthätigkeit in Innsbruck im Jahre 1821 als Professor der höheren Mathematik berufen wurde. Im Jahre 1834 übernahm er die Lehrkanzel für Physik, trat 1848 zur Ingenieur-Akademie über und wurde 1852 Director des Physikalischen Institutes an der Universität zu Wien. Bei seinem Übertritte in den Ruhestand wurde er im Jahre 1866 in den Freiherrnstand erhoben. Er starb am 25. Mai 1878 in Wien.

durch Adam Burg, Professor der höheren Mathematik an dem im Jahre 1815 gegründeten polytechnischen Institute in Wien, in dessen glänzender Laufbahn sich die rasche Entwickelung des technischen Lebens in Österreich getreulich wiedergespiegelt. [1])

Noch weniger als die analytische Geometrie war die descriptive, beschreibende oder darstellende Geometrie in den ersten Jahren des XIX. Jahrhundertes in den civilen Kreisen Österreichs bekannt. Nur das k. k. österreichische Bombardier- und Pionnier-Corps war vor der Gründung der technischen Institute im vollen Besitze der „Géométrie descriptive“ und machte von derselben in der Fortificationslehre und im Festungsbau theoretische und praktische Anwendungen.

Ihre Entwickelung und Begründung als Wissenschaft erhielt die darstellende Geometrie in Frankreich, wo wir auch ihre ersten Schriftsteller finden. Philibert de l'Orme, Almosenier und Feldprediger des Königs Heinrich II. von Frankreich, wurde im Jahre 1564 von der Königin Katharina von Medici mit der schweren Aufgabe betraut, ihr einen idealen Palast in der Nähe des Louvre, westlich von den Thoren von Paris, wo die Ziegeleien (les tuileries) lagen, zu erbauen. De l'Orme, ein genialer Meister der Renaissance, entwarf in seinem gewaltigen Plan das höchste Ideal eines damals nur denkbaren Königsschlosses, welches den Namen „Tuilerien“ erhielt.[2]) Er selbst führte bis zu seinem 1570 erfolgten Tode den Bau dieses herrlichen Palastes fort und verfasste ein Werk „Traité de l'architecture,“ in welchem er zuerst die Gewölbetheorie vom geometrischen Standpunkte behandelte und ihren Steinschnitt (Stereotomie) graphisch bestimmte. Hervorragende Schriftsteller des XVII. Jahrhundertes waren in der Stereotomie Mathurin Jousse (1642), P. Derand (1643), Desargues und Bosse (1648).[3])

---

[1]) Adam Freiherr von Burg wurde am 28. Jänner 1797 in Wien geboren. Nach Vollendung der Volksschule erlernte er zuerst bei seinem Vater die Tischlerei, in dessen Werkstätte er dann auch mehrere Jahre arbeitete. Von 1810—13 besuchte er die Akademie der bildenden Künste, seit 1815 den polytechnischen Curs und wurde 1820 Assistent der Mathematik am k. k. polyt. Institute in Wien. Nach einer kurzen Lehrthätigkeit in Salzburg 1827 wurde Burg als Professor der höheren Mathematik im Jahre 1828 an das polytechnische Institut in Wien berufen, wo er seit 1837 Mechanik und Maschinenlehre docierte. Im Jahre 1844 wurde er Regierungsrath und 1849 Director des polyt. Institutes. Als dieses im Jahre 1852 unter militärische Leitung gestellt wurde, trat er als Sectionsrath in das k. k. Handels-Ministerium und wurde 1866 in den Freiherrnstand erhoben. Er starb am 1. Februar 1882 in Wien.

[2]) S.: J. Burckhard u. W. Lübke, Geschichte der neueren Baukunst. (Die Renaissance unter den letzten Valois) S. 217. Stuttgart 1867.

[3]) S. d. „Einleitung“ dieses Werkes S. 9. u. 10.

Eine gewandte Behandlung fand die Stereotomie durch De la Rue, dessen „Traité de la coupe des pierres" im Jahre 1728 in Paris erschien. Seine ausgezeichneten Risse wurden noch von Monge vielfach benützt. Das größte Verdienst um die Vervollkommnung der graphischen Methode in der darstellenden Geometrie hat sich vor Monge der Ingenieur und Stabsofficier des französischen Geniecorps Frézier durch sein Werk „La théorie et la pratique de la coupe des pierres, et des bois, ou Traité de Stéréotomie, Strasbourg 1738 et 1739" erworben. Entsprechend dem Steinschnitt, finden wir hier die Erzeugung der krummen Flächen durch die Bewegung einer erzeugenden Curve und umgekehrt die Erzeugung der Curven durch den Schnitt zweier Flächen. In eingehender Weise beschäftigte sich Frézier mit den heute vielfach untersuchten Curven der vierten Ordnung, die er als Schnittcurven von Cylindern, Kegeln, Kugeln und Ellipsoiden erzeugte und durch die Benennung Cykloimber, Ellipsimber, Ellipsoidimber, Paraboloidimber und Hyperboloidimber unterschied. Auch die verschiedenen Ring- und Schraubenflächen, sowie die windschiefen Flächen bildeten den Gegenstand seiner schon weitgehenden theoretischen Untersuchungen. Die systematische Begründung der darstellenden Geometrie als Wissenschaft auf streng-mathematischer Grundlage verdanken wir aber Monge.

Auch wir Geometer und Techniker in Österreich haben alle Ursache, das Andenken eines Gelehrten zu ehren, dessen mathematischen Wissenszweigen wir seit mehr als einem halben Jahrhundert in so ausgedehntem Maße die sorgfältigste Pflege zutheil werden lassen und welchem wir auch so hervorragende Erfolge auf den Gebieten der technischen Künste, der Industrie und des nationalen Wohlstandes verdanken.[1]) War es doch der heimatliche Boden unseres Vaterlandes,

---

[1]) Vergl. die interessanten Artikel „Die Hauptperioden des wirtschaftlichen Erziehungswerkes in Frankreich," „Die exacten Wissenschaften und ihre volkswirtschaftliche Bedeutung in Frankreich" und „Die geistigen Strömungen des achtzehnten Jahrhundertes" in Armand Freiherr von Dumreichers Werk „Über den französischen National-Wohlstand als Werk der Erziehung." Wien 1879. S. 3, 139 und 150; ferner „Über die Aufgaben der Unterrichtspolitik im Industriestaate Österreich." Wien 1881, von demselben Verfasser. — S. a.: „Die Kunstbewegung in Österreich." Im Auftrage des k. k. Unterrichts-Ministeriums dargestellt von R. von Eitelberger, Wien 1878, und „Die Verwaltung der österreichischen Hochschulen." (Art. „Technische Hochschulen und Hochschule für Bodencultur." S. 308—358). Im Auftrage des k. k. Ministers für Cultur und Unterricht dargestellt von Dr. Karl Lemayer, Sectionschef im k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht, Wien 1878. — S. a.: Egon Zöller, „Die Universitäten und technischen Hochschulen." „Ihre geschichtliche Entwickelung und ihre Bedeutung in der Cultur, ihre gegenseitige Stellung und weitere Ausbildung." Berlin 1891. — Nebenius: „Über technische Lehranstalten in ihrem Zusammenhange mit dem gesammten Unterrichts-

auf welchem von allen europäischen Staaten zuerst die große, volks- und staatswirtschaftliche Bedeutung der neuen, französischen Culturpolitik, die mit der Errichtung der École polytechnique inauguriert wurde, erkannt, und auf welchem durch die Errichtung der polytechnischen Institute in Prag (1806), Graz (1811) und Wien (1815) die nächste Anregung zur systematischen Pflege der exacten und der technischen Wissenschaften für die gesammte deutsche Culturwelt gegeben wurde.

Der Gedanke, die Volksbildung nicht bloß auf humanistische sondern auch auf reale Wissenschaften zu stützen, blieb selbstverständlich nicht allein auf Frankreich beschränkt — er fand auch frühzeitig in Österreich und Deutschland patriotische und hochherzige Männer, die ihn zum Segen der Bürgerschaft bald zur Verwirklichung brachten. Schon im Jahre 1717 erhielten die böhmischen Landstände durch das Decret vom 9. November von Kaiser Karl VI. eine Professur für „Militär- und Civil-Ingenieurkunst," welche sich durch Heranziehung von technischen Hilfslehrern allmählig zu einer eigentlichen Ingenieurschule erweiterte. Mit diesen ersten technischen Vorträgen, die an der Prager Universität abgehalten wurden und insbesondere die „Fortification" zum Gegenstande hatten, wurde der landschaftliche Ingenieur Christian Josef Willenberg, der seit 1706 den Titel eines kaiserlichen Ingenieurs führte, betraut. Ingenieur Willenberg, der von 1718 bis 1731 die ersten militär-technischen Vorträge an der Prager Universität hielt, und den sogenannten europäischen General-Ingenieur von M. Stahl als Leitfaden für seine Vorlesungen benützte, folgte Johann Ferdinand Schor, der schon im Jahre 1734 seine ordentlichen Vorlesungen über Ingenieurkunst in „Geometriam elementarem und practicam, Trigonometria, Statica, Mechanica, Optica, Vertical- Horizontal- und Parallel-

wesen." Karlsruhe 1833. — Pinet: „Histoire de l'École polytechnique." Paris 1887 und Mortimer d'Ocagne: „Les grandes Écoles de France." Paris 1887. — E. Dobbert, „Bau-Akademie, Gewerbe-Akademie und technische Hochschule zu Berlin." (Festschrift der königl. tech. Hochschule Berlin 1884). — Dr. F. Grashof, „Über die der Organisation von polytechnischen Schulen zu Grunde zu legenden Principien." Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. Berlin 1864. — Regierungsrath Joh. G. Schoen, o. ö. Professor der k. k. tech. Hochschule in Wien, „Die technischen Hochschulen und deren Organisation in Österreich." Leipzig 1883. — Prof. Franz Tilšer, „Kritische Bemerkungen zur Einführung in die Anfangsgründe der Géométrie descriptive." Wien 1883. Vorwort, pag. I—XLIX. — Regierungsrath Dr. G. A. V. Peschka, o. ö. Professor an der k. k. tech. Hochschule in Wien, „Wert und Bedeutung des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie an Mittelschulen." Vortrag gehalten in der 42. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Wien. Mai 1893. (Sonderabdruck, Leipzig 1894). — Prof. Wilhelm Exner, „Die Unterrichts-Politik in Frankreich." Wiener-Zeitung vom 7., 8. und 10. April 1894, etc.

Perspectiva, Militär-Architektur, etc." specificierte. Diese technischen Vorlesungen an der Prager Universität waren anfangs nur adeligen und erst seit dem Jahre 1734 auch bürgerlichen Zöglingen zugänglich.

Die nächste, sogenannte technische Schule in Österreich war die im Jahre 1770 in Wien errichtete Real- und Handels-Akademie bei St. Anna — eine Mittelschule — welche hauptsächlich die Heranbildung ihrer Zöglinge für den baugewerblichen und kaufmännischen Stand zum Zwecke hatte. Hier wirkte als Lehrer der Physik und Chemie J. J. Prechtl, der nachmalige erste Director des 45 Jahre später errichteten polytechnischen Institutes in Wien.

Ebenso wie Prag besass Braunschweig in seinem im Jahre 1746 errichteten „Collegium Carolinum" eine technische Abtheilung, welche am Ende des XVIII. Jahrhundertes zum architektonischen Institut erhoben wurde. Im Jahre 1790 wurde die „Architektonische Lehranstalt bei der Akademie der Künste" in Berlin, 1799 die Bauakademie und 1821 die Gewerbeakademie gegründet — technische Institute — welche erst später den Charakter einer polytechnischen Hochschule erhielten, u. z. als „Allgemeine Bauschule" über Anregung des französischen Staatsrathes Cousin unter dem Cultusminister Freiherr von Altenstein durch das königl. Schreiben vom 29. August 1831.[1])

Eine polytechnische Schule im eigentlichen Sinne besass bis zum Jahre 1806 nur Paris in seiner École polytechnique, nach deren Muster die böhmischen Stände auf ihre Kosten im Jahre 1803 die Erweiterung der Ingenieurschule zum polytechnischen Institute beschlossen, das im Jahre 1806 eröffnet wurde. An der Begründung dieser ersten polytechnischen Schule in Deutschland nahm der Professor der Mathematik an der Prager Universität, J. von Gerstner, den Graf Rottenhann im Jahre 1795 in die Studien-Revisions-Commission berufen hatte, hervorragenden Antheil. Von ihm, dem ersten Director des Prager Polytechnikums, stammt auch der erste Organisations-Entwurf der Anstalt.

An der Spitze jener edlen Geister, denen das Wohl des österreichischen Bürgerstandes so sehr am Herzen lag und welche den Segen

---

[1]) Vergl.: Jacobis Vortrag: „Über die Pariser polytechnische Schule," gehalten am 22. Mai 1855 in der phys. ökon. Gesellschaft zu Königsberg. (S. a. C. G. J. Jacobis Gesammelte Werke. VII. Bd. S. 355. Berlin 1891). — Egon Zöller, „Die Universitäten und technischen Hochschulen." „Ihre geschichtliche Entwickelung und ihre Bedeutung in der Cultur, ihre gegenseitige Stellung und weitere Ausbildung." Berlin 1891. S. 51, 53, 82, etc.

der Naturwissenschaften dem Volke zugewendet hatten, stand in erster Linie Seine kais. u. königl. Hoheit der durchlauchtigste Herr Erzherzog Johann. Dieser edle, kunstsinnige und in den Wissenschaften hochgebildete Prinz unseres Allerhöchsten Kaiserhauses, den sein Bruder, Seine Majestät Kaiser Franz I. schon im Jahre 1801 als General-Director des Genie- und Fortificationswesens und als Director der Ingenieur-Akademie in Wien und der Militär-Akademie in Wiener-Neustadt die oberste Leitung und Pflege der militär-technischen Wissenschaften übertragen hatte, hatte bereits im Jahre 1804 die Absicht, mit Benützung seiner wertvollen Sammlungen in Innsbruck ein wissenschaftliches National-Institut zu gründen. Doch vereitelten die Wirren des französischen Krieges, dem Innsbruck und das schöne Land Tirol zum Opfer fielen, diesen hochherzigen Plan. Aber schon am 16. Juli 1811 schuf der edle Fürst im Vereine mit den steirischen Ständen in Graz das nach ihm benannte „Joanneum", aus welchem die jetzige k. k. technische Hochschule entstanden ist. Das Joanneum in Graz, zunächst als „Museum für Naturgeschichte, Physik, Chemie, Ökonomie und Technologie" begründet, dann als „naturwissenschaftliche Lehranstalt" mit dem Grazer Lyceum vereinigt, wurde in den Jahren 1825 — 1850 durch eine allmälig vollzogene Aufnahme technischer Lehrgegenstände zum landschaftlichen technischen Institute" erweitert, 1869 zur landschaftlich-technischen Hochschule erhoben und am 1. Jänner 1874 als „k. k. technische Hochschule" in die Staatsverwaltung übernommen. Zum ersten Studien-Director der Anstalt wurde im Jahre 1827 der Abt Ludwig zu Rein ernannt.

Hier am Grazer Joanneum wirkte in den Jahren 1811 bis 1818 als Custos und Professor der Mineralogie und Kristallographie Friedrich Mohs, der Begründer der nach ihm benannten Projectionsmethode tessularer Kristallgestalten. Hier erhielt auch sein berühmter Schüler, der nachmalige Director der geologischen Reichsanstalt in Wien, Hofrath Wilhelm Haidinger, im Jahre 1812 von Mohs seine erste naturwissenschaftliche Ausbildung.

Die hervorragendste, öffentliche Pflegestätte der Ingenieur-Wissenschaften im allgemeinen und der darstellenden Geometrie im besonderen war aber in Österreich das von Kaiser Franz I. mittelst Hofdecretes vom 26. März 1813 und Allerhöchster Entschließung vom 26. Mai 1815 ins Leben gerufene kais. königl. polytechnische Institut in Wien. Dieses Institut — „der Pflege, Erweiterung, Veredlung des Gewerbefleißes, der Bürgerkünste, des Handels" — gewidmet, war die centrale Pflanzstätte, aus welcher der größte Theil der Lehrer für darstellende Geometrie hervorgiengen. Der Lehrplan des Wiener polytechnischen Institutes war schon im Jahre 1810 im Auftrage der Regierung von seinem verdienstvollen, ersten Director J. J. Prechtl entworfen worden.[1])

Zu seinen genialsten Hörern gehörte auch Ferdinand Jakob Redtenbacher (1809—1863), dessen Namen mit dem technischen Hochschulwesen Deutschlands und insbesondere mit jenem der polytechnischen Schule in Karlsruhe untrennbar verbunden ist. Ein wesentlicher Vorzug im Organisationsplan des Wiener polytechnischen Institutes im Gegensatze zur École polytechnique in Paris bestand darin, dass das österreichische Polytechnikum dahin strebte, die gesammten technischen Wissenschaften als eine Einheit zu umfassen und dieselben nach den einzelnen Gebieten der Technik zu gliedern, während Frankreich das große Gebiet der Technik auf eine Anzahl nur in losem Zusammenhange stehender Einzelnschulen vertheilte.[2])

Aus diesem Grunde wurden am kais. königl. polytechnischen Institute in Wien schon frühzeitig aus den einzelnen Lehrfächern die Studienpläne der Hörer je nach der Verschiedenheit ihrer gewählten Berufe gebildet. Wie Paris für die gediegene, streng wissenschaftliche Pflege und Lehre der Mathematik, der darstellenden Geometrie und der Naturwissenschaften, so wurde Wien das Vorbild für den Ausbau der technischen Schulen zu organisch gegliederten Lehr- und Pflegestätten für das große Gesammtgebiet der Technik. Von dieser neuen Centrale der technischen Wissenschaften brach sich auch die Lehr- und Lernfreiheit allmählich Bahn. Der Einfluss des Wiener Polytechnikums kam auch bald dadurch zur Geltung, dass an anderen Orten Deutschlands die einzelnstehenden und in technischer Beziehung isolierten Fachschulen vereinigt und die das Gesammtgebiet der Technik umfassenden Schulen neu organisiert und den technischen Fortschritten entsprechend eingerichtet wurden. So wurde zu Karlsruhe im Jahre 1825 von dem um die Entwicklung der technischen Lehranstalten hochverdienten Staatsrathe Nebenius aus dem Zusammenschlusse der Tullaschen Ingenieurschule, des von dem Architekten Weinbrenner Ende des XVIII. Jahrhundertes gegründeten architektonischen Institutes und einer in Freiburg bestehenden Gewerbeschule eine einzige Lehranstalt, die „polytechnische Schule“ gebildet.[3])

---

[1]) S.: Joh. Jos. Prechtl, Jahrbücher des kais. königl. polytechnischen Institutes in Wien. Bd. I—XX. Wien 1819—1839. — „Geschichte des polytechnischen Institutes in Wien.“ Ibid. Bd. I (1819), V (1824) u. X (1827).

[2]) Vergl.: Egon Zöller, „Die Universitäten und technischen Hochschulen.“ Berlin 1891. S. 59.

[3]) Vergl.: Egon Zöller, „Die Universitäten und technischen Hochschulen. Berlin 1891. S. 60.

So entstanden nach dem Vorbilde der im Jahre 1794 in Paris gegründeten École polytechnique und mit besonderer Berücksichtigung der steten Wechselwirkung von Wissenschaft und Praxis im technischen Leben die polytechnischen Institute und Hochschulen in Prag (1806), Graz (1811), Wien (1815), Berlin (1821, bez. 1831), Karlsruhe (1825), München (1827), Dresden (1828), London (die Engineering Section am Kings College 1828), Petersburg (1828), Stuttgart (1829), Kassel (1830), Hannover (1831), Augsburg (1833), Lüttich (1835), Gent (1835), Darmstadt (1836), Ofen-Pest (1846), Krakau (1846), Brünn (1850), Zürich (1855, Industrieschule 1832), Braunschweig (1861), Riga (1862), Aachen (1870), Lemberg (1871), Warschau (1895), etc.[1]) Aber auch Italien, Spanien, Portugal und die anderen Staaten des Continentes sorgten frühzeitig für eine gründliche Ausbildung ihrer Ingenieure in den exacten Wissenschaften. Insbesondere war es Italien, dessen Ingenieure sich seit Jahren eines sehr guten Rufes erfreuen.[2]) Es sind dies zumeist Ingenieure, die ihre wissenschaftliche Ausbildung in dem berühmten „Regio Istituto tecnico superiore" zu Mailand erhielten, dem einer der hervorragendsten Gelehrten Europas, Herr Francesco Brioschi, als Director vorsteht. Außer dieser technischen Hochschule besitzt Italien technische Institute (Ingenieurschulen) in Turin, Florenz, Padua, Bologna Neapel, Rom, Palermo, Pavia, Pisa, Genua u. Venedig. Ingenieurschulen besitzen ferner Madrid, Lissabon, Porto, etc., bei deren Errichtung die École polytechnique in Paris als Vorbild diente und deren militärischen Charakter sie noch heute besitzen.

Wie Paris und Wien, so erhob sich im Laufe der dreißiger Jahre Karlsruhe mit seinem vorzüglich eingerichteten Polytechnikum zu einer weit über die Grenzen des Landes hinausreichenden Bedeutung. Mit seiner Organisation vom Jahre 1832, die eine streng-wissenschaftliche

---

[1]) S. d. u. Karl Kořistka, „Der höhere polytechnische Unterricht in Deutschland, in der Schweiz, in Frankreich, Belgien und England," Gotha 1863; Dr. K. Jelinek, „Das ständisch-polytechnische Institut zu Prag" (1856); Dr. G. Göth, „Das Joanneum in Graz" (1861); ferner die bereits genannten Werke von Dumreicher, Lemayer, sowie die bisher erschienenen Jubiläums-Festschriften der tech. Hochschulen, insbesondere die 1884 erschienene Festschrift der königlichen technischen Hochschule in Berlin, welche seit dem Jahre 1884 in einem großartigen Unterrichtspalast untergebracht und glänzend ausgestattet ist.

S. f.: Joh. G. Schön, „Die technischen Hochschulen und deren Organisation in Österreich." Leipzig 1883. – Egon Zöller: „Die Universitäten und technischen Hochschulen." Berlin 1891.

[2]) S. d. Artikel: „Die Ausbildung der Techniker in Italien." Centralblatt der Bauverwaltung. Herausgegeben vom Minister der öffentlichen Arbeiten. Jahrg. VII, S. 165 Berlin 1887. — S. a. S. 205 Jahrg. X Berlin 1890.

Pflege der technischen Künste durch ausgezeichnete Lehrkräfte zur Grundlage hatte, wurde das Polytechnicum in Karlsruhe ein Muster für die übrigen technischen Lehranstalten Deutschlands. Ebenso erhielt die im Jahre 1855 errichtete polytechnische Schule in Zürich eine vollständige und durchgreifende Fachgliederung. Diese Anstalt war nach Karlsruhe die erste, deren Organisation modernen technischen und wissenschaftlichen Anforderungen entsprach. Insbesondere war es der Maschinenbau und die mechanische Technologie, die von drei österreichischen Technikern Redtenbacher (1841 — 63) in Karlsruhe, Schneider in Dresden und Karmarsch in Hannover eine den Anforderungen der Neuzeit entsprechende wissenschaftliche Pflege fanden. Aber auch die theoretischen Gegenstände hatten berühmte Lehrer. Wir nennen nur Schell (Math. u. Geom.), Dienger (Diff. u. Integralr.), G. Schreiber und Chr. Wiener (darst. u. prakt. Geom., Math.), Eisenlohr (Phys.) und Clebsch (analyt. Mech.) in Karlsruhe; Ohm (Analysis, analyt. u. darst. Geom., Perspective), Dirichlet (Analysis, analyt. u. darst. Geom.), Minding (höhere Math., Geom. u. Dynamik), Aronhold (Math.), Weierstrass (analyt. Geom., Differ.- u. Integralr.), Pohlke u. Hauck (darst. Geom., Perspective u. Schattenlehre), Berghaus (prakt. Geom. u. Geodäsie) und Weingarten (Math.) in Berlin; Fort (analyt. Geom.), Schlömilch und A. Harnack (höh. Math.), in Dresden; Bischof (Analysis, analyt. Geom.), Kleinfeller (darst. Geom.), Bauernfeind (Geodäsie), A. Voss (Math.) in München; Degen (analyt. Geom.), Gugler (analyt. u. darst. Geom., zuerst in Nürnberg), Weyrauch (mech. Wärmetheorie) in Stuttgart; Klingenfeld und Gugler (darst. Geom.) in Nürnberg; A. Brill, A. Harnack, L. Kiepert, K. Rodenberg, E. Schröder, R. Sturm und Voss (Math), Külp und Kohlrausch (Phys.), Rössler und Schröder (darst. Geom.) in Darmstadt, dann Kiepert und Rodenberg in Hannover; Clausius (Phys.), Deschwanden (darst. Geom.) und Schröter (Maschinenkunde) in Zürich, etc. etc.

Ebenso wie die Geburtsstätte der descriptiven Geometrie die berühmte Kriegsschule zu Mézières war, so waren auch ihre ersten Pflegestätten in Europa die bereits auf einer hohen, geistigen Entwickelungsstufe stehenden militär-technischen Institute. Die Anwendung der abwickelbaren Flächen für die Defilierung der Festungswerke, welche eine directe Beschießung derselben auf Kanonenschussweite verhindern sollen, sowie viele andere mit der descriptiven Geometrie zusammenhängende Fragen des Festungsbaues, waren eben Fortificationsprobleme von internationalem Interesse und großer militär-technischer Bedeutung. Bald nach ihrer Begründung und Veröffentlichung fand die descriptive

Geometrie in Österreich in dem im Jahre 1717 in Wien als Ingenieurschule errichteten, von der großen Kaiserin Maria Theresia im Jahre 1756 zur Ingenieur-Akademie erhobenen und 1851 als Genie-Akademie nach Klosterbruck bei Znaim verlegten militär-technischen Institute, sowie in der 1752 begründeten, 1756 zur Akademie erhobenen und 1806 nach Wiener-Neustadt verlegten Theresianischen Militär-Akademie die sorgfältigste Pflege. Ähnliche Verhältnisse bestanden selbstverständlich in Deutschland. Dieser innige geistige Zusammenhang der descriptiven Geometrie mit zahlreichen Problemen der Militär-Technik brachte es auch mit sich, dass mehrere von den ersten hervorragenderen Lehrern und Schriftstellern für darstellende Geometrie dem technischen Militärstande angehörten.

So war Guido Schreiber[1]) (geb. 1799, gestorb. 1871) — der bedeutendste deutsche Schriftsteller über darstellende Geometrie in der ersten Hälfte dieses Jahrhundertes — bevor er als Professor für die geometrische und topographische Zeichnung an die polytechnische Schule nach Karlsruhe berufen wurde, Lieutenant in der großherzoglich-badischen Artillerie. Von historischem Interesse ist auch die deutsche Autographie „Elemente der darstellenden Geometrie, Karlsruhe 1839" (77 Folio-Seiten), welche der Artillerie-Hauptmann Ludwig bearbeitete und als Leitfaden seiner Vorträge an der großherzoglichen Artillerieschule benützte. Der Verfasser behandelt den Lehrstoff der darstellenden Geometrie in gedrängter Kürze nach Monge, Vallée, Schreiber und Cloquet, deren Werke besonders empfohlen werden, und schließt seinen Leitfaden nach Behandlung des ebenen und gegenseitigen Schnittes krummer Flächen (Kugel, Kegel und Cylinder) mit der Darstellung der Schraube mit flachem und scharfem Gewinde. Die „Elemente der entwerfenden Geometrie, nebst einem Anhange von der Bestimmung der Schattenumrisse," welche im Jahre 1825 im Verlage von J. G. Heubner in Wien erschienen und für jene Zeit als ein vorzügliches Werkchen über darstellende Geometrie bezeichnet werden müssen, haben W. von Alemann, einen Unterlieutenant im k. k. österreichischen Pionnier-Corps und ehemaligen Zögling der Wiener Neustädter Militär-Akademie, zum Verfasser. In Prag hielt 1830—33 Herr Karl Wiesenfeld, k. k. Lieutenant im Pionnier-Corps und suppl. Professor der Baukunst am ständisch-polytechnischen Institute die ersten außerordentlichen Vorlesungen über darstellende Geometrie. Das im Jahre 1847 in Wien erschienene, umfangreiche (638 Seiten und 395 Figuren)

---

[1]) S. s. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Karlsruhe u. Freiburg 1828 und 1829, etc.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie und ihrer Anwendungen auf die Schattenbestimmung, Perspectivlehre und den Steinschnitt hat den Hauptmann im k. k. Ingenieurcorps und Professor an der k. k. Ingenieur-Akademie Josef Stampfl zum Verfasser. Herr Hochschulprofessor Franz Tilscher in Prag war vor seiner Berufung an das polytechnische Institut Hauptmann im k. k. Genie-Stabe und fungierte als Professor der darstellenden Geometrie an der k. k. Genie-Akademie in Klosterbruck bei Znaim.[1]) Bekanntlich gehört auch der hervorragendste darstellende Geometer Frankreichs der Gegenwart, Herr A. Mannheim, Professor der „Géométrie descriptive" an der École polytechnique in Paris, dem Artillerie-Corps als Oberst an.

War bei der Begründung der polytechnischen Institute in Wien und Prag die École polytechnique in Paris vielfach das Vorbild, so bestand doch zwischen dem französischen und den österreichischen Instituten bezüglich der Ausbildung ihrer Zöglinge in den theoretischen Wissenschaften ein scharfer Gegensatz darin, dass man in den ersten Jahren ihres Bestandes der Mathematik, der descriptiven Geometrie und den Naturwissenschaften nur jenen Wirkungskreis einräumte, der zum Verständnis der Mechanik und der bautechnischen Fächer nothwendig war. So wurde das Wiener Polytechnicum, in dessen Lehrplan auch die höhere Mathematik aufgenommen wurde, ein Vorbild für die sorgfältigste Pflege der Ingenieur-Wissenschaften in ganz Europa. Wir haben bereits im dritten Abschnitte dieser math.-historischen Studie darauf hingewiesen, welche hohe Würdigung der descriptiven Geometrie und Mathematik an der École polytechnique in Paris zutheil wurde und welche sorgfältige und streng wissenschaftliche Pflege diese beiden Disciplinen durch Monge und Lagrange, später durch Hachette, Poncelet und Cauchy erfuhren.

Bei der Begründung (1825) der polytechnischen Schule in Karlsruhe, die ihre Entstehung dem geistvollen, an der École polytechnique in Paris ausgebildeten Ingenieur Tulla verdankt, suchte man die Vorzüge beider Hochschulen, sowohl des Pariser als auch des Wiener Polytechnicums zu vereinen, und legte den Schwerpunkt ihres drei bis fünf Jahre umfassenden Unterrichtes auf eine gediegene Ausbildung in der Mathematik, der darstellenden Geometrie und in den Naturwissenschaften, zugleich aber auch — nach dem Vorbilde von Wien — auf eine sorgfältige, organisch-gegliederte Pflege des großen Gesammtgebietes der modernen Technik. So fanden die Mathematik und die

[1]) S. a. Lithographie: Darstellende Geometrie für den Gebrauch der k. k. Genie-Akademie. Klosterbruck bei Znaim. 1862.

descriptive Geometrie — zuerst unter Guido Schreiber (1827—1851), dann unter Geheimrath Dr. Christian Wiener — gleichwie an der École polytechnique in Paris eine ihrer Bedeutung für die technischen Wissenschaften entsprechende, vorzügliche Pflege.

Ihre beiden Werke „Lehrbuch der darstellenden Geometrie“ Karlsruhe und Freiburg 1828 und 1829 und Leipzig 1884 und 1887 nehmen die ehrenvollsten Plätze in der Literatur der darstellenden Geometrie ein. Während das erstere noch ganz im Geiste Monges verfasst ist, ruht das zweite auf historischer Grundlage und baut die darstellende Geometrie in streng wissenschaftlicher und systematischer Weise mit besonderer Berücksichtigung neugeometrischer Forschungen einfach und elegant auf. Wieners Lehrbuch, das die erste „Geschichte der darstellenden Geometrie“ enthält, ist ein ausgezeichnetes Werk und bildet heute eine auf projectiver Geometrie ruhende Grundlage für das geistige Schaffen des modernen Technikers.

Während an der École polytechnique schon in den ersten Jahren ihres Bestandes der descriptiven Geometrie eine hervorragende Rolle im polytechnischen Unterrichte zugewiesen und ihre große Bedeutung für die technischen Wissenschaften dadurch anerkannt wurde, dass der Pflege dieser Wissenschaft fast die halbe Unterrichtszeit gewidmet wurde — eine Würdigung — die der descriptiven Geometrie bei der Gründung des polytechnischen Institutes in Karlsruhe auch in entsprechender Weise zutheil wurde, musste sich die darstellende Geometrie — deren wissenschaftliche Bedeutung bei der Gründung des Wiener polytechnischen Institutes keinesfalls unterschätzt wurde — im Lehrplane dieses und auch des Prager Institutes mit einem recht bescheidenen Plätzchen begnügen. Es fehlte eben unserem durch kriegerische Ereignisse financiell und wirtschaftlich arg geschädigten Vaterlande ein Monge, welcher der darstellenden Geometrie im Lehrplane des 1815 errichteten k. k. polytechnischen Institutes in Wien jene den Ingenieur-Wissenschaften ebenbürtige Stelle verschafft hätte, die ihr erst siebenundzwanzig Jahre später eingeräumt wurde. Erst am 1. October des Jahres 1842 wurde am k. k. polytechnischen Institute in Wien die Lehrkanzel für darstellende Geometrie errichtet und Herr Wilhelm Engerth — nachheriger General-Director der österr. Staats-Eisenbahn-Gesellschaft — zum Supplenten dieser neuen Lehrkanzel ernannt.

Bis zu diesem Zeitpunkte waren die Vorträge über beschreibende Geometrie seit der Gründung des k. k. polytechnischen Institutes in Wien mit den von Herrn Professor Johann Arzberger gehaltenen Vorträgen über Mechanik und Maschinenlehre vereinigt und noch im Studienjahre 1840—41 lief den von Herrn Professor Adam Burg gehaltenen Vorträgen über Mechanik und Maschinenlehre die auf beschreibende Geometrie gegründete Maschinenzeichnung unter Aufsicht des Assistenten parallel.[1])

Diesem auf die beschreibende Geometrie gegründeten Maschinenzeichnen am k. k. polytechnischen Institute in Wien verdanken wir das erste österreichische Lehrbuch über darstellende Geometrie. Es ist die „Constructionslehre mit ihren Anwendungen auf Schattenconstruction, Perspectiv und Maschinenzeichnung", welche 1824 bei Karl Gerold in Wien erschien und den Assistenten der Maschinenlehre und Maschinenzeichnung Josef Arbesser zum Verfasser hat.

Dieses erste österreichische Lehrbuch der darstellenden Geometrie, welches Arbesser als Vorbereitung zu Monges und Hachettes Werken verfasst und seinem Lehrer Johannes Arzberger, Professor der Maschinenlehre am k. k. polytech. Institute in Wien gewidmet hatte, behandelt den Gegenstand auf 114 Seiten und 7 Tafeln mit 88 Figuren. In der vom März 1823 datirten Vorrede spricht der Verfasser auch die Absicht aus, bald seine deutsche Übersetzung von Monges und Hachettes „Géométrie descriptive" veröffentlichen zu wollen. In der Einleitung wird im Sinne Monges auf den innigen Zusammenhang der Projectionslehre mit der Analysis hingewiesen und betont, dass erstere besonders geeignet sei beim Studium der letzteren Klarheit zu verschaffen. Der Verfasser weist auf S. 2 auch auf Creizenachs „Darstellende Geometrie" hin, welche 1821 bei Kupferberg in Mainz erschien und die neuen Principien der Géométrie descriptive zuerst in der deutschen Literatur dieser Wissenschaft veröffentlicht hat. Im ersten Abschnitte „Allgemeine Principien der Projectionslehre" (S. 4—18, Fig. 1—17) werden die Fundamentalaufgaben nach Monge gelöst.

Der zweite Abschnitt behandelt: „Allgemeine Betrachtungen über Oberflächen, insbesondere der conischen und cylindrischen, als nachmaliger Begründung der Beleuchtung bei Sonnenlicht und Lampen- oder Mondlicht (Parallel- und Centralbeleuchtung). S. 19—57 (Fig. 18—39) beschäftigt sich mit den Enveloppierungen (Einhüllungen) und Tangierungen (Berührungen). Unter den diesbezüglichen Constructionsaufgaben finden wir die Bestimmung der Tangentialebenen an cylindrische (S. 23—25, Fig. 18—20) und an conische Oberflächen (S. 25—26, Fig. 21 u. 22); ferner an das Rotationsellipsoid (S. 27—28, Fig 23 u. 24). In Fig. 25

[1]) S. d.: „Vorlesungen" (Programme) am k. k. polytechnischen Institute in Wien für die Studienjahre 1815—41 und die Jahrbücher des kais. königl. polytech. Institutes in Wien. Herausgegeben vom Director Joh. Jos. Prechtl. Bd. I—XX. Wien 1819—1839.

und 26, S. 28—30 wird der gegenseitige Schnitt von Cylinder-, Kegel- und Rotationsflächen besprochen. Bei den Schattenconstructionen (S. 30—54) wird als Lichtquelle die Sonne (Parallelbeleuchtung) und der Mond oder die Lampe (Centralbeleuchtung) angenommen, der Kernschatten (Rundungsschatten), der Schlag- und Halbschatten (Selbstschatten), die Glanzpunkte und Glanzkanten, die Fixlinien erklärt und die Schattenconstruction krummer Flächen auf den ebenen oder gegenseitigen Schnitt von Cylinder-, Kegel- und Rotationsflächen zurückgeführt.

Auf S. 38—40 (Fig. 27 u. 28) wird der Schatten eines schiefen Prismas auf eine Ebene und auf S. 40—44 (Fig. 29 u. 30) der Schlagschatten eines Kreises bestimmt. Den Schluss dieser Aufgaben bilden die Schattenconstructionen einer Kugel sowohl bei paralleler (S. 44—45, Fig. 31) als auch bei centraler Beleuchtung (S. 45—46, Fig. 32; ferner eines Ellipsoides (47—50, Fig. 33 u. 34) und die Schattenbestimmung eines Kreises auf eine Kegelfläche (S. 50 — 54, Fig. 35 u. 36). Die diesbezüglichen Entwickelungen werden dann auf S. 54—57 (Fig. 37, 38 u. 39) zur allgemeinen Darstellung der Kegelschnitte benützt.

Den nächsten Gegenstand dieses Abschnittes bildet die Bestimmung des ebenen Schnittes eines Cylinders und seine Developpierung (Ausbreitung) sammt der Schnittcurve (S. 57 — 59, Fig. 40 u. 41); ferner der Durchschnitt eines Kegels und Cylinders (S. 50 - 60, Fig. 42 u. 43), die Bestimmung des Schlagschattens einer Kugel auf eine zweite Kugel bei Sonnen- oder Lampenlicht (S. 60--63, Fig. 44 u. 45); der Schnitt eines Rotationsellipsoides mit einer Ebene (S. 63 — 64, Fig. 46), der Durchschnitt eines Cylinders oder Kegels mit einer Kugel (S. 64—65, Fig. 47 u. 48) und die Durchdringung eines Cylinders oder Kegels mit einem Rotationsellipsoide (S. 65—68, Fig. 49—50).

Auf S. 68—69 (Fig. 51) wird der Schnitt zweier Kugeln bestimmt und als Nachtrag die Durchstosspunkte einer Geraden mit einem Kegel gefunden (S. 69—73, Fig. 52—55). Die Bestimmung der Formen des Schattens und seiner Intensität bei paralleler und centraler Beleuchtung eines geraden Kreiscylinders (S. 73 — 75, Fig. 56 u. 57), sowie die Construction des Schlagschattens eines Kreises auf ein fünfseitiges Prisma (S. 75 — 77, Fig. 58) bilden die letzten Constructionsaufgaben des zweiten Abschnittes.

Der dritte Abschnitt ist der Perspective gewidmet (S. 78 — 92, Fig. 59—72). Nach einer entsprechenden theoretischen Entwickelung wird auf S. 83, Fig. 62 die Perspective eines Würfels und auf S. 84—89, Fig. 63--66 die Perspective von Prismen sammt Schattenconstructionen bestimmt. Die perspectivische Construction des Durchschnittes zweier Cylinder wird auf S. 90, Fig. 67 erörtert.

Am Schlusse des dritten Abschnittes wird die Abspiegelung im Wasser und das reflectierte Licht besprochen.

Der vierte Abschnitt (S. 93 — 111, Fig. 73 — 88) ist den bei Maschinenzeichnungen nöthigen Constructionen, dem Behandeln derselben und der Aufnahme von Maschinen gewidmet. Die Cycloide, Epi- und Hypocycloide, die Kreisevolvente, die Schraubenlinie, die sphärische Epicycloide und das Kugelnetz bilden die Einleitung zu diesem Abschnitte, welcher mit der technischen Behandlung der Maschinenzeichnungen, dem Modellzeichnen und der Aufnahme von Maschinen seinen Abschluss findet.

Ergänzende Anmerkungen auf S. 111 — 114 bilden den Schluss dieses interessanten, ersten österreichischen Lehrbuches der darstellenden Geometrie aus dem Jahre 1824.

Schon im folgenden Jahre erschien im Verlage von J. G. Heubner ein stattliches Werkchen unter dem Titel „Elemente der entwerfenden Geometrie, nebst einem Anhange von der Bestimmung der Schattenumrisse. Wien 1825“, welches — wie bereits bemerkt — den Unterlieutenant im k. k. Pionnier-Corps, W. von Alemann zum Verfasser hat, und von dem ehemaligen Zögling der Wiener-Neustädter Militär-Akademie dem Director dieses Institutes, Seiner Excellenz dem Herrn Feldmarschall-Lieutenant von Faber, gewidmet ist. Es würde uns zu weit führen, wollten wir auch den Inhalt dieses zweiten österreichischen Lehrbuches, dem französische und italienische Werke (Monge, Hachette, Bordoni[1]), etc.) zum Vorbilde dienten, einer eingehenden Besprechung unterziehen. Das treffliche Buch, aus fünf Abschnitten bestehend und 180 Seiten sammt 10 Tafeln mit 60 musterhaft ausgeführten Figuren umfassend, würde dies auch verdienen. Wir fanden es in der Wiener Universitäts-Bibliothek, wo ihm eine Burgsche Abhandlung aus der praktischen Geometrie sozusagen als Einleitung vorgebunden war. Die Darstellung dieses Werkchens ist eine gründliche und streng wissenschaftliche, die Sprache ist klar, kurz und bündig — wir könnten ebenso gut sagen „schneidig“ — denn sie verräth schon in den ersten Sätzen den strammen und wissenschaftlich-gebildeten, österreichischen Pionnier-Officier.

W. von Alemann löst im ersten Abschnitte (S. 1 — 59) die Fundamental-Aufgaben von Monge über Punkte, Linien und Ebenen und insbesondere die Probleme über die Winkelbestimmung mit einer überraschenden Einfachheit und Eleganz. Der zweite Abschnitt (S. 60—80)

[1]) A. Bordoni, „Sulla stereometria,“ Pavia 1823. „Sulle superficie,“ Instituto Lombardo. S. a. Giornale di fisica etc. Pavia 1823.

behandelt die einfach und doppelt gekrümmten Linien und krummen Flächen, u. zw. die kegelförmigen, cylindrischen und Umdrehungsflächen, die regelrechten und entwickelbaren Flächen, ihre Tangenten, Normalen und Tangentialebenen. Im dritten Abschnitte (S. 80—103) beschäftigt sich der Verfasser mit den Durchschnitten der Linien mit Flächen und diesen unter sich, und bestimmt im letzten Beispiele dieses Abschnittes (S. 103, Fig. 50) den Schnitt eines eiförmigen mit einem linsenförmigen Ellipsoide durch eine concentrische Kugelschar. Im vierten Abschnitte (S. 106—115) wird die Entwickelung oder Abwickelung der krummen Oberflächen u. zw. an geraden und schiefen Cylindern und Kegeln durchgeführt. Im fünften Abschnitte (S. 115—152) werden die Tangenten einiger krummen Linien (Durchdringungscurven von Kegel-, Cylinder-, Kugel- und Rotationsflächen) und die Construction der berührenden Ebenen krummer Flächen recht ausführlich behandelt und auf S. 138 das Berührungsproblem für drei Kugeln gelöst.

Im Anhange (S. 153—180), welcher sich recht eingehend mit der Bestimmung der Schattenumrisse von Cylinder-, Kegel-, Kugel-, Rotationsflächen und ringförmigen Oberflächen beschäftigt, wird auch der Selbstschatten einer Rotationsfläche mit eingezogener (convexer) Meridiancurve und der Schlagschatten in eine hohle Halbkugel (S. 177—180) bei paralleler Beleuchtung bestimmt.

Hyperboloide und Paraboloide sind in diesem Lehrbuche noch nicht vertreten. Dagegen findet aber das Princip der Collineation und Affinität — wenn auch noch nicht besonders ausgesprochen — vielfache Anwendung. Das Lehrbuch ist gediegen im Inhalt, die Erklärungen der Constructionen im Raume überaus anschaulich und die Zeichnungen mit musterhafter Sorgfalt ausgeführt. Alemanns Elemente der entwerfenden Geometrie werden stets einen ehrenvollen Platz in der Literaturgeschichte der mathematischen Wissenschaften einnehmen und dies umsomehr, als der Verfasser neben gründlicher Darstellung auch bemüht war, die bis dahin bestehende französische Terminologie durch eine deutsche zu ersetzen. Auch müssen wir den Wert von Arbessers Constructionslehre und Alemanns Elementen der entwerfenden Geometrie um so höher schätzen, als es in ganz Deutschland mit Ausnahme der noch bescheidenen und 108 Seiten umfassenden „Anfangsgründe der darstellenden Geometrie“ von M. Creizenach, welche 1821 in Mainz erschienen und 6 Tafeln mit 53 Figuren enthielten, kein deutsches Werk über die darstellende Geometrie gab und dass diese mathematische Disciplin nur aus den französischen Originalwerken von Monge, Hachette, Lacroix und Potier bekannt war.

Wie bereits bemerkt, wurde am 1. October 1842 Herr Wilhelm von Engerth[1]) mit der Supplierung des Lehrfaches der beschreibenden Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien betraut. Dieser Supplierung der neuerrichteten Lehrkanzel für darstellende Geometrie am Wiener polytechnischen Institute verdanken wir die Entstehung des Werkes „Grundzüge der darstellenden Geometrie nebst Anwendung auf Linear-Perspective“, welches im Jahre 1843 in Wien als Autographie erschien.

Das 172 Quartseiten umfassende Werk, in dessen Vorwort Monge als Begründer der Wissenschaft des Zeichnens — eines systematischen Zeichnens, ohne welches alle theoretischen Kenntnisse in den technischen Künsten und Gewerben unfruchtbar geblieben wären — ehrende Worte gewidmet sind, behandelt in dem ersten Abschnitte (S. 1—32) die Fundamentalaufgaben von Monge über Punkte, Gerade und Ebenen; ferner das körperliche Dreieck, die Aufgaben über Dachausmittelungen und die Construction von Geraden und Ebenen im Raume, die mit den Projectionsebenen gegebene Winkel einschließen.

Im zweiten Abschnitte (S. 1—60) werden die krummen Linien und die krummen Flächen behandelt. Der erste Theil dieses Abschnittes beschäftigt sich mit den Eigenschaften und der Construction der Ellipse (als orthogonale Projection des Kreises), der Hyperbel und Parabel;

---

[1]) Wilhelm Ritter von Engerth, der erste Wiener Docent für darstellende Geometrie und nachherige General-Director der österreichischen Staats-Eisenbahn-Gesellschaft, wurde am 26. Mai 1814 zu Pless in Schlesien geboren. Er widmete sich seit 1834 am Wiener k. k. polytechnischen Institute zuerst dem Baufach, später dem Maschinenfach und wirkte dann als Architekt in Galizien mit hervorragendem Erfolge. Seiner Vorliebe für das Maschinenbaufach folgeleistend, kehrte Engerth wieder nach Wien zurück, wo er zuerst als Assistent der Mechanik, dann (1842—43) als Supplent des Lehrfaches der beschreibenden Geometrie am polytechnischen Institute wirkte. Im folgenden Jahre (1844) wurde Engerth als Professor der Mechanik und der Maschinenlehre an das Joanneum in Graz berufen, und 1850 zum technischen Rath bei der General-Direction für Eisenbahnen und später zum Ministerial-Referenten für das Maschinenwesen ernannt. In diese Zeit (1854) fällt die Erfindung des nach ihm benannten Systemes der Tender-Lastzugs-Locomotiven, welches sich in den folgenden Jahren bei der Semmering-Bahn und anderen Bahnen trefflich bewährte. — Ritter von Engerth trat im Jahre 1855 als Central-Director bei der österr. Staats-Eisenbahn Gesellschaft ein, deren General-Director er später wurde. Eine segensreiche Thätigkeit entfaltete Engerth auch im höheren Unterrichtswesen, indem er an der Organisierung der technischen Studien in Österreich hervorragenden Antheil nahm. Er war auch ein eifriger Förderer der Donau-Regulierung. Im Jahre 1874 wurde Engerth als Mitglied in das Herrenhaus des österreichischen Reichsrathes berufen und im Jahre 1875 in den Freiherrnstand erhoben. Wilhelm Freiherr von Engerth starb am 4. September 1884.

ihren Achsen, conjugierten Durchmesser, Tangenten und Normalen; ferner mit der sphärischen Epicycloide, der ebenen Epicycloide, Hypocycloide und gemeinen Cycloide, sowie mit der Kreisevolvente, der Neoide oder Spinnlinie und der logarithmischen Spirale. Im zweiten Theile wird die Erzeugung der Kugel-, Cylinder- und Umdrehungsflächen im allgemeinen und der Flächen zweiten Grades (der beiden Ellipsoide, Hyperboloide und Paraboloide) erörtert, und die Construction ihrer Berührungsebenen durchgeführt. Der dritte Abschnitt (S. 1—56) beschäftigt sich mit dem Durchschnitt krummer Oberflächen mit Ebenen, ihrem gegenseitigen Schnitt, der Construction von Berührungsebenen krummer Flächen, wenn der Berührungspunkt nicht gegeben ist, und behandelt im letzten Theile die entwickelbaren und windschiefen Flächen, die Schraubenfläche, sowie die scharfgängige und flachgängige Schraube.

Im Anhange (S. 1–24) entwickelt der Verfasser nach einer recht eingehenden historischen Übersicht die „Grundzüge der freien Linear-Perspective.“ Der Verfasser weist in dem Vorworte auf die Scenographie der Griechen und Römer hin, bespricht die Verdienste, welche sich Pietro della Francesca, Albrecht Dürer, Guido Ubaldo und Brook Taylor um die Begründung der Perspective erworben haben, und gedenkt insbesondere jener von Monge, der sich durch die Anwendung der unwandelbaren Gesetze der Mathematik und ihrer abstracten Theoreme auf die praktische Zeichenkunst für immerwährende Zeiten den Namen der Unsterblichkeit erworben hat. Monge hat alle Zeichner eine beredte und deutliche Sprache gelehrt, und die wohlthätigen Folgen seines Lehrsystemes der darstellenden Geometrie trugen auch in diesem, nicht blos als Zierde, sondern auch zum Bedürfnis gewordenen Zweige der Zeichenkunst die schönsten Früchte.

Von dem Standpunkte ausgehend, dass der Lehrer der Perspective die theoretischen Lehrsätze sofort an den entsprechenden einfachen Beispielen der Praxis zur Anwendung bringe, geht der Verfasser in seinen bautechnischen Anwendungen rasch vorwärts und verwendet am Schlusse seiner perspectivischen Darstellungen auch aliquote Theile der Augdistanz.

Am 7. October 1843 wurde Herr Johann Hönig zum ordentlichen Professor der Lehrkanzel für darstellende oder beschreibende Geometrie ernannt. Als solcher lehrte er die Schüler der Elementar- und höheren Mathematik das geometrische, architektonische und das Maschinenzeichnen (täglich von 11—1 Uhr) und hielt für die Hörer der höheren Mathematik (3mal die Woche von 8—9 Uhr) mündliche Vorträge über die beschreibende Geometrie oder Projectionslehre, welchen Vorträgen sein 1845 erschienenes Werk „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie" (Wien 1845, Druck und Verlag bei Karl Gerold) zur Grundlage diente. Um der darstellenden Geometrie möglichst rasche Verbreitung in der Bürgerschaft zu verschaffen, hielt Herr Prof. J. Hönig jeden Sonn- und Feiertag populäre Vorträge über Projectionslehre und lehrte im Anschlusse an dieselben in zwei aufeinander folgenden Stunden die Maschinenzeichnung.

Herr Professor Johann Hönig, geb. am 9. Mai 1810 in Karlsbrunn, gest. am 26. October 1886 in Wien, entfaltete während seines 27-jährigen Wirkens vom Jahre 1843 bis 1870 am kais. königl. polytechnischen Institute in Wien eine so segensreiche Lehrthätigkeit, dass wir ihn mit vollem Rechte als den Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft in Österreich bezeichnen können. Ihm, dem geistreichen Gelehrten und überaus anregenden Lehrer, der es trefflich verstand, Wissenschaft und Humanität in seinem Amte harmonisch zu vereinen, und seinen ausgezeichneten Schülern und späteren Hochschulprofessoren Niemtschik, Staudigl, Skuhersky und Peschka verdankt in erster Linie Österreich in der Gelehrtenwelt des Auslandes die ehrenvolle Apposition „das Land der darstellenden Geometrie."

Fast dreißig Jahre beherrschte sein umfangreiches Werk „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie" den literarischen Boden unseres technischen Schulwesens und war der geistige und gute Kern für die meisten unserer ersten Lehrbücher über diese Wissenschaft. Erst als die neugeometrischen Forschungen sich in den letzten Decennien auch in Österreich mächtig Bahn brachen, überließ es nach ehrenvoller Vergangenheit den neuen und ausgezeichneten Werken von Dr. Wilhelm Fiedler, Dr. G. A. V. Peschka, A. Mannheim, Dr. Chr. Wiener, etc. seinen Platz.

Hönigs Werk bildete mit den Werken von Olivier und Leroy auch die Grundlage für die Vorlesungen, welche Professor Rudolf Skuherský, ein Schüler Hönigs, am ständisch-polytechnischen Institute in Prag hielt, der sich noch im Jahre 1850 selbst als einen Anfänger in der darstellenden Geometrie bezeichnete. [1])

Prof. Hönigs „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie," 513 Seiten und 26 Tafeln mit 376 Figuren umfassend, wurde mit Benützung der Werke von Monge, Hachette, La Vallée, Leroy, Olivier, Thibaut, Schreiber, Schaffnit, Wolf, Kaufmann, etc. verfasst und behandelt den Lehrstoff der darstellenden Geometrie

S.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. V. Band, Jahrg. 1850, S. 326 und 343. (Sitzung vom 31. October 1850).

in fünf Abtheilungen. Die erste Abtheilung umfasst sammt der Einleitung 154 Seiten (Fig. 1—162) und beschäftigt sich eingehend mit den Grundbegriffen und den Elementaraufgaben der darstellenden Geometrie.

Die zweite Abtheilung (S. 155—219, Fig. 163—208) umfasst die Darstellung der von Ebenen begrenzten Körper, die Construction ihrer ebenen Schnitte und ihre Netze. In der dritten Abtheilung (S. 220—307, Fig. 209—279) werden die krummen Linien und ihre Beziehungen zu geraden Linien und Ebenen nach der analytischen Methode untersucht. Die vierte Abtheilung (S. 308—452, Fig. 280—353) beschäftigt sich mit den krummen Flächen, ihrer Erzeugung und Darstellung, sowie mit ihren Beziehungen zu dem Punkte, der geraden und krummen Linie, der Ebene und ihren gegenseitigen Beziehungen. Nach den abwickelbaren Flächen werden die windschiefen Flächen, ferner die Umhüllungs- und Umdrehungsflächen und zum Schlusse die Entstehung und Darstellung der Flächen zweiter Ordnung behandelt. Da diese „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie“ hauptsächlich technischen Zwecken dienen sollte, so legte der Verfasser einen besonderen Wert auf eine reiche Auswahl von Beispielen und beschränkte sich bei den Flächen nur auf die Constructionsaufgaben, ohne in die Theorie der Flächen tiefer einzugehen.

Die fünfte Abtheilung (S. 453—513, Fig. 354—376) ist der schiefen und der perspectivischen Projection gewidmet und enthält auch einige Constructionen von Linien gleich starker Beleuchtung, insbesondere die Construction der Lichtgleichen der Kugel und der Ringfläche, wobei die letzteren in einfachster Weise aus denen der eingehüllten Kugel abgeleitet werden. Eine gleichmäßige Abstufung der verschiedenen Lichtgleichen wurde in diesem Werke noch nicht durchgeführt. Dieses theoretisch-interessante und praktisch-wichtige Beispiel (s. S. 470—472, Fig. 361), welches zuerst Bordoni in seiner Abhandlung „Sopra le linee uniformemente illuminate“ (Giornale di fisica etc., Pavia 1823) auf analytischem Wege löste, sowie eine ganze Reihe anderer Aufgaben dieses an Beispielen reichen Lehrbuches zeigen uns, mit welchem besonderen Interesse Österreichs erster darstellender Geometer die weitere Entwickelung von Monges Géométrie descriptive verfolgte.

Professor Johann Hönig, welcher die Lehrkanzel für darstellende Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien von 1843 bis zum Jahre 1870 inne hatte, erfüllte seine Aufgabe, wissenschaftlich gebildete und vor allem in der darstellenden Geometrie gewandte Techniker heranzubilden, in vorzüglichster Weise. Insbesondere aber hatte Hönig, nachdem er für technische Unterrichtszwecke ein treffliches Lehrbuch geschaffen, eine ganz stattliche Schar tüchtig geschulter

Lehrer für darstellende Geometrie herangebildet, welche bei den in den Fünfziger Jahren zahlreich errichteten Realschulen vielfache Verwendung fanden.

Sein Nachfolger auf der Lehrkanzel für darstellende Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien war sein ehemaliger Assistent, Herr Rudolf Niemtschik, Professor der darstellenden Geometrie am Joanneum in Graz, der trotz seiner ausgezeichneten Literaturkenntnis und seiner hervorragenden literarischen Thätigkeit auf dem Gebiete der Curven und Flächen zweiter Ordnung — gleich seinem Lehrer und Vorgänger, Professor Johann Hönig, — bis an sein Lebensende (1877) jener Richtung der darstellenden Geometrie treu blieb, wie sie Monge vor hundert Jahren an der polytechnischen Schule zu Paris begründet hatte.

Während der ersprießlichen Lehrthätigkeit dieser beiden hervorragenden Lehrer der darstellenden Geometrie am Wiener polytechnischen Institute vollzog sich aber sowohl auf dem Gebiete der analytischen als auch der synthetischen Geometrie durch die Werke der größten Mathematiker in Frankreich, Deutschland, England und Italien jener gewaltige wissenschaftliche Umschwung, den man seit mehreren Decennien als die Begründung der neueren Geometrie bezeichnet. Wir haben schon in der Einleitung auf die durch Rechnung erzielten Erfolge hingewiesen, welche Carnot, ein Schüler Monges, in seinem Werke „La Géométrie de position, Paris 1803“ bezüglich der Geometrie der Lage erreichte. Carnot, dessen Abhandlung „De la corrélation des figures de géomètrie“ im Jahre 1801 in Paris erschien und die Lehre von den Figuren von dem neuen Standpunkte der Geometrie der Lage aus behandelte, begründete die theilweise schon den Griechen (Pappus, Menelaus) bekannte Theorie der harmonischen Punkte und ihren innigen Zusammenhang mit den harmonischen Strahlen in seinem „Essai sur la théorie des transversales, Paris 1806“, in welchem er zuerst die Aufmerksamkeit der Geometer auf die Vollständigkeit oder das Umfassende geometrischer Figuren (quadrilatère complète, etc.) gelenkt hat. In dieser Abhandlung finden wir auch die ersten Sätze über vollständige n-Ecke und n-Seite.

Den Weg, den Monge in seiner Géométrie descriptive durch räumliche Anschauung und in seiner Application durch die Analysis eröffnete, betraten mit Erfolg seine Schüler Dupin, Brianchon, Gergonne, Bobillier und Poncelet, von welchen insbesondere der Letztgenannte — fern von seiner Heimat, entblößt aller äußeren Hilfsmittel — als russischer Kriegsgefangener in den Gefängnissen von Saratow seinen „Traité des propriétés projectives des figures“ entworfen hatte, der im Jahre 1822 in Paris veröffentlicht, seinem Verfasser den ersten Rang unter den französischen Geometern seiner Zeit gesichert hat. War schon Monge in seinen beiden Werken bemüht, mittelst der Analysis und Synthesis die Geheimnisse der Mathematik und insbesondere jene der Geometrie von einem gemeinsamen Gesichtspunkte aus zu betrachten, so war es Poncelet in seinem großen Werke zum erstenmale in erfolgreicher Weise gelungen, die ungeheure Anzahl von Lehrsätzen, die im Laufe der Jahrhunderte über die geradlinigen Figuren, den Kreis und die Kegelschnitte abgeleitet worden waren, auf wenige Fundamentalsätze und Grundprincipien zurückzuführen.

Schon Poncelet verstand es in ausgezeichneter Weise in seinen zahlreichen Resultaten die Methoden zu vereinen, die sich aus Monges Géométrie descriptive durch reine Anschauung und aus Carnots Géométrie de position durch Rechnung ergeben hatten. Beide Werke hatten das gemeinsame Ziel, der Geometrie diejenige Allgemeinheit zu verschaffen, welche man bis zum Beginn des XIX. Jahrhundertes nur der Analysis zugetraut hatte, und beide Werke trugen nicht wenig dazu bei, jenen Aufschwung der reinen Geometrie vorzubereiten, welchen man von dem Erscheinen von Poncelets berühmten Werke „Traité des propriétés projectives des figures" (Paris 1822, II^e édit. 1865 et 1866) datieren kann. In diesem umfangreichen Werke tritt zuerst die Macht der Centralprojection als einer Methode der Darstellung und das Princip der Continuität als wertvolles Untersuchungsmittel der Geometrie in den Vordergrund.

Drei große geometrische Principien, von welchen man bis dahin nur in vereinzelnten Fällen Gebrauch gemacht hatte, wurden von Poncelet zum erstenmale in ihrer vollen Bedeutung erkannt und dargestellt und damit namentlich Anregungen von Monge und Brianchon zu fundamentalen Hilfsmitteln der Geometrie erhoben. Der geniale Schüler Monges beschäftigte sich zunächst mit denjenigen Eigenschaften der ebenen Figuren, die durch eine Centralprojection unverändert bleiben und trug mit Hilfe derselben die wesentlichsten Eigenschaften des Kreises unmittelbar auf die Kegelschnitte über. Im weiteren Verlaufe seiner wertvollen Untersuchungen zeigt Poncelet auf Grundlage der Theorie von Pol und Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt, dass jedem projectivischen Satze der ebenen Geometrie ein anderer gegenüber gestellt werden kann, indem man Punkte mit Geraden, Punkte in einer Geraden mit Geraden durch einen Punkt, u. s. w. vertauscht. Bekanntlich führte das tiefere Studium seines Princips der Homologie zweier ebenen oder räumlichen Systeme zum Begriffe der Correspondenz zwischen zwei Mannigfaltigkeiten von zwei oder drei Dimensionen. Hier finden wir auch die Kenntnisse der Alten über die

Polarität in Bezug auf einen Kegelschnitt und die von der Mongeschen Schule gewonnenen Lehren über die Polarität in Beziehung auf eine Fläche zweiter Ordnung zuerst vereinigt. Diese Sätze bilden eine wissenschaftlich wertvolle Vorbereitung zu dem schönen Gesetze der Dualität, welches vier Jahres päter Gergonne in seinen Annales de Mathématiques (Tome XVII Nismes 1826) in seiner ganzen Allgemeinheit ausgesprochen hat. Poncelet war es auch, der zuerst in seinem Werke die Geometer auf das Princip der Continuität als eines wertvollen Untersuchungsmittels bei geometrischen Forschungen lenkte, indem er wiederholt von der Bemerkung Gebrauch gemacht hatte, dass in dem ganzen Gebiete, welches hier in Betracht kam, die Richtigkeit eines geometrischen Satzes durchaus nicht davon abhänge, ob die zu seinem Beweise nothwendigen Hilfsfiguren reell oder imaginär seien. Zu den schönsten Anwendungen der projectiven Eigenschaften der Flächen zweiten Grades gehört auch die Bestimmung ihrer Kreisschnitte, welche Poncelet in seinem Traité des propriétés projectives, Paris 1822 in Nr. 621 mit Benützung des imaginären Kugelkreises durchgeführt hat.

Wohl fand Poncelet in Cauchy — einem reinen Analysten — der mit nicht zu leugnendem Übelwollen an der nicht immer klaren oder mangelhaften Schärfe der Beweise Anstoss fand, einen heftigen Gegner, dessen Autorität aber ebensowenig fähig war, das Princip der Continuität außer Kraft zu setzen, als es Gergonne, einem zweiten leidenschaftlichen Gegner von Poncelet, ebensowenig gelingen sollte, mit seinem allerdings umfassenderen, aber noch nicht vollkommen begründeten Princip der Dualität die Theorie der reciproken Polaren zu verdrängen. [1])

Von besonderem wissenschaftlichem Interesse waren in Poncelets Werk auch die eleganten Untersuchungen und Sätze über einem Kegelschnitt gleichzeitig ein- und umgeschriebene Polygone, welche Jacobi, Richelot und anderen hervorragenden Mathematikern Gelegenheit gaben, hievon die geistreichen Anwendungen in der Theorie der elliptischen Functionen zu machen. [2]) In seinem Supplemente versuchte auch Poncelet von der Ebene in den Raum zu übergehen und zeigte zum erstenmale, dass in einem Flächenbüschel zweiten Grades vier

[1]) S.: Annales de Mathém. Tome XVII. Nismes 1826 und Traité des propriétés projectives des figures. Pag. 122, Paris 1822. — Mémoires sur la théorie des polaires réciproques. Crelles Journal. Bd. IV, S. 1–71, Berlin 1829. — S. a.: Férussac, Bulletin universel, Paris 1827, pag. 109, sowie Gergonne, Annales de Mathém. Tom. XVIII, Nismes 1827.

[2]) S.: Crelles Journal für die reine und angew. Mathematik. Bde. III, und XXXVIII, etc.

Kegel enthalten sind, deren Scheitel in innigster Beziehung zu den harmonischen Eigenschaften der betrachteten Flächen stehen.

Poncelets bahnbrechende Forschungen in der Theorie der harmonischen Mittel, der reciproken Polaren und der Transversalen [1]) führen uns direct zu Chasles unübertrefflichem Werke „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Bruxelles 1837," in welchem der Autor in bewundernswerter Form Alles das zusammengestellt hat, was das geistige Erbtheil der reinen Geometrie bis zu diesem Zeitpunkte bildete. Mit diesem Werke und seinen originellen Untersuchungen hat sich Chasles (geb. 1796, gest. 1880 in Paris) zum Beschützer der reinen Geometrie aufgeworfen, zu einer Zeit, wo sie bei den blinden Anbetern der Analysis kaum eine Beachtung gefunden hatte. Von den Abhandlungen Chasles, welche dieses Werk bilden, verdient insbesondere jene, welche den Titel trägt „Sur deux princips généraux de la science" [2]) eine besondere Erwähnung, weil sie die allgemeine Theorie der Homographie (Collineation) und der Reciprocität, sowie die Untersuchungen jener beiden Fälle, in welchem diese involutorisch ist, und die Anwendung dieser Transformationen auf das Studium der Flächen zweiten Grades und der geometrischen Oberflächen überhaupt enthält. Wissenschaftlich wertvoll sind auch die zahlreichen Noten dieses Werkes, welche eingehende historische Studien und geometrische Untersuchungen von großer Bedeutung enthalten. Von den letzteren erinnern wir nur an die Theorie des Doppel- oder anharmonischen Verhältnisses und der Involution, ferner an die anharmonischen Eigenschaften der Kegelschnitte, die Focaleigenschaften der Flächen zweiten Grades, viele Lehrsätze über cubische Raumcurven und glückliche Versuche, die Sätze von Pascal und Brianchon auf die Flächen des zweiten Grades auszudehnen. Nicht unerwähnt können wir die Verallgemeinerung der stereographischen Projection lassen. [3])

Schon Pappus, der geniale Erforscher der Eigenschaften der Schraubenlinie und der windschiefen Schraubenfläche, begründete in seinen Collectiones mathematicae den für die Curventheorie so wichtigen Satz von der Involution der Punktreihe, in welcher eine Transversale

[1]) J. V. Poncelet, Ingénieur-Général à Paris, Mémoires sur les centres de moyennes harmoniques. Crelles Journal Bd. III, S. 213. Berlin 1828. — Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques. Ibid. Bd. IV, S. 1—71. Berlin 1829. — Analyse des transversales, appliquée à la recherche des propriétés projectives de lignes et surfaces. Ibid. Bd. VIII, S. 1, 21, 117, 213, und 370. Berlin 1832.

[2]) S. a.: M. Chasles, Mémoire de géométrie sur deux princips généraux de la science. Mémoires couronnés par l'Académie Royal de Bruxelles. Tom. XI, pag. 582, 1837.

[3]) Aperçu historique, Note 28. Bruxelles 1837.

ein Vierseit durchschneidet. Der ausgezeichnete französische Geometer M. Chasles, welcher wegen Unkenntnis des Deutschen in seinem Werke „Aperçu historique" die Forschungen deutscher Mathematiker aus den ersten drei Jahrzehnten dieses Jahrhundertes ganz unberücksichtigt lassen musste, fasste in seinen bald folgenden Untersuchungen die beiden wichtigen Hauptsätze der neueren Geometrie über die homographische Theilung und die Involution, welche er mittelst des anharmonischen Verhältnisses einer Punktreihe begründet hatte, von neuen Gesichtspunkten auf, entwickelte in seinen Vorlesungen an der Pariser Faculté des Sciences zuerst die Vortheile dieser neuen Auffassung und machte in seinem berühmten „Mémoire sur les surfaces du second degrée" (Comptes rendus, tome XLI, pag. 1097, Paris 1855) diese beiden Sätze zu wahren Fundamentalsätzen der neueren Geometrie. Die Definition über die homographische Theilung gestützt auf das anharmonische Verhältnis von vier beliebigen Punkten und die Theorie der Involution von sechs Punkten bildeten schon in seinem „Traité de géométrie supérieure, Paris 1852 (Nr. 99 et Nr. 182 et 243, II[e] édit. Paris 1880) die wichtige Grundlage für neugeometrische Forschungen. Selbstverständlich machte Chasles von diesen beiden Sätzen in seinem „Traité de sections coniques, Paris 1865" vielfache und interessante Anwendungen. In der Theorie der Flächen zweiten Grades gelangte er in dem bereits erwähnten Memoire auch zu dem schönen Satze, dass die vier Erzeugenden der einen Art des elliptischen, eintheiligen Hyperboloides auf jeder beliebigen Erzeugenden der anderen Art eine Punktreihe bestimmen, deren anharmonisches Verhältnis einen constanten Wert besitzt und von der Lage der Erzeugenden der zweiten Art ganz unabhängig ist.

Der geistige Ausgangspunkt mehrerer wissenschaftlich wertvoller Abhandlungen in der Theorie der höheren Curven waren in den letzten Jahrzehnten auch die von Chasles in den Comptes rendus von 1853—1871 nicht selten ohne Beweis veröffentlichten Sätze über cubische und biquadratische Curven.[1]) So bildeten z. B. die kurzen Andeutungen von Chasles (Comptes rendus, Paris 1853) und anderen hervorragenden

---

[1]) S.: M. Chasles, Construction de la courbe du 3[me] ordre etc. Comptes rendus, Tome XXXVI pag. 951, Paris 30. Mai 1853. — Construction de la courbe du 3[me] ordre déterminée par neuf points. Ibid. Paris 1853. — Sur les courbes du 4[me] et du 3[me] ordre etc. Ibid. 16 août 1853. — Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres. Ibid. 28 déc. 1857, etc.

S. a.: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (Présenté à l'Académie de Bruxelles en janvier 1830). Bruxelles 1837 Note 33 et Liouville Journal de Mathém. Tome XIX, Paris 1854.

Geometern (Steiner und Jonquières) über die Entstehung der algebraischen Curven vermittelst projectiver Büschel von Curven niederer Ordnung die Grundlage zu Cremonas berühmtem Werke „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane," welches in den Bologna Memoiren vom Jahre 1862 veröffentlicht wurde. Ebenso bildeten die von Chasles in den Comptes rendus vom Jahre 1861 (Tom. LIII.) veröffentlichten Sätze über die auf dem einschaligen Hyperboloide gelegenen cubischen Curven die Grundlage für die allgemeine Theorie der cubischen Raumcurven, welche Cremona in den Annali di Matematica pura ed applicata (Tomo IV", pag. 22, Roma 1861) weiter ausgebildet hat.[1]) Nicht ohne Einfluss auf den weiteren Ausbau der neueren Geometrie blieben selbstverständlich auch die beiden Abhandlungen „Recherches sur les lignes et les surfaces du second degré" und „Mémoires sur les propriétés générales des cônes du second degré," welche Chasles schon in den Mémoires de l'Académie de Bruxelles vom Jahre 1829 bez. 1830 veröffentlicht hatte.

Den wertvollen Forschungen von Chasles folgten in Frankreich weitere, für die Curven- und Flächentheorie sehr wichtige Untersuchungen, auf welche wir noch zurückkommen werden.

Während sich in Frankreich zwischen Poncelet und Gergonne eine unerquickliche Polemik über die Vorzüge der Theorie der reciproken Polaren und über das Princip der Dualität entsponnen hatte, zog der scharfsinnige deutsche Mathematiker A. F. Möbius, Professor an der Universität Leipzig, (geb. 1790, gest. 1868) die auf französischem Boden angeregten Fragen in seine stillen Gedankenkreise und gab uns in seinem Werke „Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827"[2]) über manche der von den Mathematikern Frankreichs bestrittenen Fragen klaren und präcisen Aufschluss. Aber das an geistvollen Ideen reiche Werk, das jedem kundigen Zeitgenossen den scharfsinnigen und classischen Meister der Geometrie hätte verkünden sollen, blieb wenig beachtet und Möbius barycentrischer Calcul kam erst dann zu seiner vollen Geltung, bis Deutschlands genialster Geometer, Jakob Steiner auf den Kampfplatz trat und unserer Wissenschaft in des Wortes vollster Bedeutung neue Bahnen wies.

In umfassendster Weise fand in Möbius barycentrischem Calcul die projective Eigenschaft des Doppelschnittverhältnisses von vier

[1]) S.: Courbes gauches décrites sur la surfaces d'hyperboloide à une nappe. (S. a. Comptes rendus, Tome LIII. Paris 1861).

[2]) S. a.: A. F. Möbius, Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von Baltzer, Klein und Scheibner. IV Bde. Leipzig 1885—87.

Punkten in einer Geraden und von vier Strahlen durch einen Punkt, welches von Pappus, „Collectiones mathematicae" bis auf Brianchons „Mémoire sur les lignes du second ordre," sowie in Poncelets und anderen geometrischen Arbeiten immer und immer eine wissenschaftlich begründete Rolle gespielt hatte, eine ganz besonders scharfsinnige Würdigung. Bekanntlich bildete auch Chasles das von Möbius unter dem Namen der Collineation bezeichnete Verwandschaftsverhältniss geometrischer Grundgebilde in den folgenden Jahren unter dem Namen Homographie weiter aus.[1]) Dieser scharfblickende deutsche Geometer, welchem wir die strengwissenschaftliche Begründung der Lehre von der Affinität der Gebilde verdanken, war es auch, der die schon von Desargues in seinem „Brouillon project d'une atteinte aux événements de rencontre d'une cône avec un plan, Paris 1639[2])" zuerst aufgestellte und unter dem Namen der Involution bekannte Beziehung von sechs Punkten oder von sechs Strahlen in seiner hohen geometrischen Bedeutung für die reine Geometrie erkannte und weiter ausgebildet hat.[3]) Schon im Jahre 1833 begründete Möbius sein Nullsystem,[4]) welches in den letzten Decennien von hervorragenden Geometern Deutschlands zum höheren Nullsystem oder Punktebenensystem, sowie zum Flächensystem erweitert wurde.[5])

Einen überaus anregenden Einfluss auf die Entwickelung der synthetischen Curven- und Flächentheorie nahmen Plückers Werke und Abhandlungen.

Es sind dies insbesondere seine „Analytisch-geometrische Entwickelungen, Essen 1828—1831," sein „System der analytischen Geometrie mit einer Theorie der Curven dritter Ordnung, Berlin 1835," ferner das für die Curventheorie bahnbrechende Werk „Theorie der algebraischen Curven, Bonn 1839" und sein „System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846." In diesen Werken, sowie in den mit ihnen zusammenhängenden, theils in Gergonnes Annales de Mathématiques, theils im

[1]) „Mémoire de géométrie sur deux princips généraux de la sciences: la dualité et l'homographie." Mémoires couronnés par l'Académie Royal de Bruxelles. Tome XI, pag. 582, 1837. (S. a. den Anhang zum Aperçu historique).

[2]) S. a.: G. Desargues, Oeuvres, publiés par Poudra. II vol. Paris 1864.

[3]) A. F. Möbius, Über Involutionen höherer Ordnung und Theorie der collinearen Involutionen. Ber. d. königl. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. Leipzig 1855—56.

[4]) A. F. Möbius, über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume. Crelles Journal, Bd. X, S. 317. Berlin 1833. (S. a. Lehrbuch der Statik. Bd. I, §. 69 und 84).

[5]) S. d. diesbezüglichen Abhandlngen von Ameseder (Wiener-Sitzungsberichte 1881 und Journal für Math. Bd. 97), Sturm (Math. Annalen, Bd. 19 und 28), Voss (Ibid. Bd. 23) und Reye (Journal für Math. Bd. 82), etc.

Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle veröffentlichten Abhandlungen hat dieser berühmte Professor der Mathematik an der Universität zu Bonn, mit seinem deutschen Fachcollegen Möbius die analytische Geometrie mit Methoden bereichert, deren Macht und Eleganz man nicht genug bewundern kann.[1])

In dem im Jahre 1835 von Plücker (geb. 1801, gest. 1868) veröffentlichten „System der analytischen Geometrie" ist schon von der Methode der abgekürzten Bezeichnung Gebrauch gemacht und dieselbe für die Vervollständigung der Classification der cubischen ebenen Curven benützt worden, mit welcher sich viele ausgezeichnete Geometer so vielfach beschäftigt haben. In dem vier Jahre später gedruckten Werke „Theorie der algebraischen Curven" findet sich dann noch außer der Aufzählung der ebenen Curven" vierter Ordnung, welche Bragelogne in den Mémoires de l'Académie des sciences de Paris (prés. 1730—32) und Euler in seinem Werke „Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748" nur versucht hatten, jene berühmte Lösung der für die Curventheorie so wichtigen Frage, durch welche die Beziehungen zwischen den Zahlen der gewöhnlichen Singularitäten einer ebenen Curve gefunden werden können. Schon Poncelet war es im Jahre 1818 gelungen, den Zusammenhang zwischen der Ordnung und der Classe einer allgemeinen Curve festzustellen und den Einfluss eines Doppelpunktes zu bestimmen. Indem er nun auf diese Resultate das Princip der Dualität anwandte, stieß er auf jenen scheinbaren Widerspruch, welchen wir heute das Poncelet sche Paradoxon nennen, ohne dass es ihm gelang, dafür eine vollständige Erklärung zu finden. Dies gelang Plücker, diesem ausgezeichneten deutschen Geometer, vermittelst der berühmten und nach ihm benannten Formeln, welche gestatten, drei Charakteristiken einer Curve (Ordnung, Classe, Zahl der Doppelpunkte,

---

[1]) Hierher gehört auch die in Crelles Journal Bd. V. im Jahre 1830 veröffentlichte Abhandlung über die Correspondenz zwischen den einem Kegelschnittsbüschel conjugierten Punkten, wo jeder Geraden in der einen Ebene ein Kegelschnitt in der anderen entspricht und die in den Annali di Matematica, Tomo II° über geradlinige Flächen höherer Ordnung veröffentlichte Abhandlung.

S. a.: „Über Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung." Crelles Journal Bd. 34, S. 329. Berlin 1847. — „Note sur le théorème de Pascal." Ibid. S. 337. — „Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe." Ibid. S. 360. — „Über eine neue mechanische Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Classe" Ibid. S. 357 etc. — Julius Plücker, Gesammelte Wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrage der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegeben von A. Schoenflies. — Fr. Pockels. II. Bde. Leipzig 1895 und 1896.

der Doppeltangenten, Zahl der Wendetangenten und der Rückkehrpunkte) zu finden, wenn man die übrigen kennt. Bekannt ist ja auch die merkwürdige Art, in welcher Deutschlands größter Geometer bald darauf Plückers berühmte Formeln in seine Abhandlungen einführte, und bekannt ist auch der große Erfolg, den dieser geniale deutsche Gelehrte, dessen Forschungen wir gleich zum Gegenstande unseres historischen Rückblickes machen werden, mit diesen Formeln erzielte.

Plücker ist bekanntlich auch der Begründer der Theorie der linearen Complexe und Congruenzen, deren synthetische Behandlung und Erweiterung besonders in den letzten Jahren den interessanten Gegenstand vielfacher Untersuchungen der hervorragendsten deutschen Geometer der Gegenwart auf dem Gebiete der modernen Liniengeometrie bildete. Die ersten Mittheilungen über diesen Gegenstand, welche im Jahre 1865 der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu London von dem großen deutschen Geometer gemacht wurden, enthalten die Sätze über einige allgemeine Eigenschaften der Complexe, Congruenzen und Regelflächen und einige specielle Eigenschaften der linearen Complexe und Congruenzen.[1]) Die Beweise dieser Sätze, welche sofort zur geistigen Quelle wichtiger, mittelst der Coordinaten einer Geraden durchgeführten und auf die Complexe zweiten und höheren Grades ausgedehnten Arbeiten wurden, hat Plücker zuerst nur angedeutet und dann selbst in seinem vor acht Jahren von Prof. A. Clebsch und F. Klein veröffentlichten Werke „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, Leipzig 1868—69“ weiter ausgeführt. So erhielt die Geometrie, in welcher die Griechen den Punkt zuerst als das erzeugende Element aller Figuren betrachtet hatten, und dessen Bestimmung durch Rechnung Descartes im XVII. Jahrhundert zur Grundlage aller analytischen Untersuchungen gemacht hatte, nach Einführung des Princips der Dualität zwei neue mathematische Wissenszweige, in welchen Plücker die Ebene und die Gerade als erzeugende Elemente der Raumgebilde einführte und so die Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der Ebene und der geraden Linie als Raumelemente, geschaffen hatte.

Plücker, dem das Schicksal einen so wichtigen Antheil an der Förderung der modernen Geometrie zugetheilt hatte, überließ infolge besonders fesselnder physikalischer Forschungen durch fast zwanzig Jahre (1845—65) das Studium der neueren analytischen Geometrie ganz

---

[1]) S.: J. Plücker, On a new Geometry of Space. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, pag. 725 and 1866, pag. 361.

seinen gelehrten deutschen Zeitgenossen und kehrte erst wenige Jahre vor seinem 1868 erfolgten Tode zur neueren Geometrie zurück. In diesem Zeitraume widmete er sich insbesondere der Erforschung der Theorie der Complexe zweiten Grades, die er nicht mehr zum Abschlusse bringen sollte. Der Tod traf ihn, als er gerade im Begriffe stand, den zweiten Theil seines Werkes zu veröffentlichen. Diese letzten, unvollendet gebliebenen Untersuchungen bilden den Gegenstand der schönen Abhandlungen, die sein gewesener Schüler, Herr Prof. F. Klein in den Mathematischen Annalen zu Ende geführt und veröffentlicht hat. [1])

Die Neugestaltung der von Monge als Wissenschaft begründeten darstellenden Geometrie auf projectiver Grundlage verdanken wir aber in erster Linie einem deutschen Gelehrten, der vor hundert Jahren auf schweizerischen Boden das Licht der Welt erblickte.

Jakob Steiner, der größte und scharfsinnigste Geometer Deutschlands wurde am 18. März 1796 zu Utzensdorf bei Solothurn im Canton Bern geboren. Ein Jahr zuvor hatte bekanntlich Monge an der École polytechnique in Paris die darstellende Geometrie als Unterrichtsgegenstand eingeführt. Steiners Vater, ein schlichter Berner Unterländer, der im Jahre 1797 auch dabei gewesen sein dürfte, als der General Bonaparte auf seiner Reise durch die Schweiz von den bernischen Bauern mit dem Rufe angehalten wurde: „Du donners Schelm, en jiedere Schelm blib i sym Land," besass eine bescheidene Bauernwirtschaft und Jakob „der erste Fall in seinem Hause" war bestimmt durch die Pflege des kleinen Schafhandels für das Material der Wollstrümpfe seiner lieben Angehörigen zu sorgen. So kam es, dass Deutschlands größter Geometer erst in seinem vierzehnten Lebensjahre schreiben lernte. Mit der ersten Schulbildung in dem benachbarten Burgdorf erwachte in dem hochbegabten Knaben auch das Streben nach einem höheren Ziele. Eine unwiederstehliche Anziehungskraft übte auf den kräftig gebauten Jüngling die mächtige Gestalt des Reformators der Erziehungskunde, des großen Pädagogen Pestalozzi aus, der zuerst mit der moralischen Unterstützung der französischen Behörden in dem benachbarten Burgdorf gewirkt und später unter dem Beistande der schweizerischen in dem altehrwürdigen, vom Herzog Konrad von Zähringen schon im Jahre 1135 erbauten Schlosse zu Iferten seine berühmte Erziehungsanstalt errichtet hatte, die sich wegen ihrer großen pädagogischen Erfolge eines Weltrufes erfreute. Hier erhielt der junge

[1]) S.: Math. Annalen, Bd. 2, 5, 7, 22, 23 und 28.

Steiner seinen ersten, wenn auch nicht gründlichen wissenschaftlichen Unterricht, und hier gab der hochbegabte Student die erste Probe von seinem geradezu phänomenalen Vorstellungsvermögen, indem er seinen berühmten Lehrer Pestalozzi, der einen großen Wert darauf legte, den Unterricht mit der Übersetzung geometrischer Anschauungen in Zahlen beginnen zu lassen, belehrte, dass durch drei Ebenen nicht ein, sondern acht körperliche Dreiecke bestimmt seien.

Es ist leicht erklärlich, dass die schöpferische Phantasie des wissbegierigen Jünglings, der mit Unterstützung seiner reicheren Landsleute und Studiengenossen von 1818 bis 1821 seine Studien an der Universität zu Heidelberg fortsetzte, an dem geistig-bescheidenen Inhalte der mathematischen Vorlesungen von Prof. Schweins[1]) keinen Gefallen finden konnte, so dass er sich schon hier — nach einer derben Berner-Kritik der Geometrie seines Lehrers — entschloss, seinen Wissensdurst durch gründliche Privatstudien zu stillen.

Nach Beendigung seiner Universitätsstudien in Heidelberg gieng Steiner nach Berlin, wo er in der Plamanschen Privat-Erziehungsanstalt die Stelle eines Lehrers annahm. Ein Versuch, am dortigen Friedrich-Werderschen Gymnasium eine Lehrstelle zu erlangen, scheiterte an dem noch wenig salonfähigen Auftreten des genialen Berner Unterländers. Dieses ablehnende Verhalten des feineren Berliner Gymnasial-Directors hätte Steiner bald veranlasst, Berlin wieder den Rücken zu kehren, wenn ihm nicht sein ausgezeichneter Ruf als Privatlehrer in das Haus des Geheimen Staatsministers Wilhelm Freiherrn von Humboldt geführt hätte, wo ihm die Erziehung des ältesten Sohnes anvertraut wurde. Wilhelm von Humboldt, der bald Steiners hohe Geistesanlagen schätzen gelernt und ihn mit seinem Bruder Alexander von Humboldt, dem grössten Universalgelehrten Deutschlands bekannt gemacht hatte, war von diesem entscheidenden Momente der gute Stern, der Steiners Leben und sein wissenschaftliches Streben in so schöne Bahnen lenkte. Durch Wilhelm von Humbolds Unterstützung erhielt Steiner eine besser dotierte Lehrstelle an der städtischen höheren Gewerbeschule, die er durch volle zehn Jahre (1824—34) bekleidete. Hier in Berlin, wo Steiner mit kurzen Unterbrechungen mehr als vierzig Jahre seines Lebens zugebracht hatte, trat er auch in den freundschaftlichsten Verkehr mit dem Oberbaurathe A. L. Crelle und ein Band herzlichster Freundschaft verband ihn hier mit dem norwegischen Mathematiker

[1]) S.: F. Schweins, Geometrie, II Bde., Göttingen 1805 und System der Geometrie, Göttingen 1808.

Niels Henrik Abel, welcher in Berlin zu seiner weiteren wissenschaftlichen Ausbildung weilte. Fast gleichzeitig entwickelten sich die innigsten Beziehungen zwischen Steiner und dem hochgelehrten Mathematiker C. G. J. Jacobi, dessen außerordentliches Wissen auf Steiners Forschungen nicht ohne Einfluss bleiben konnte. Im Vertrauen auf Steiners und Abels mathematische Productionskraft gründete Oberbaurath Crelle im Jahre 1826 das berühmte Berliner Journal für die reine und angewandte Mathematik, in welchem Steiner seine ersten wissenschaftlichen Arbeiten veröffentlichte.

Wenn auch die frühesten in den ersten Bänden von Crelles Journal und in Gergonnes Annales de Mathématiques veröffentlichten Arbeiten Steiners noch nicht den bahnbrechenden Genius verrathen, so bekunden sie doch bereits den Meister im vielseitigen Anschauen gegebener einfacher Figuren. Die gediegenen Abhandlungen, welche aber Steiner seit dem Jahre 1835 in dieser mathematischen Zeitschrift veröffentlichte, haben mit den berühmten Abhandlungen von Abel und Jacobi in erster Linie dazu beigetragen, den Weltruf des Crelleschen Journals zu begründen.

Die erste Abhandlung „Einige geometrische Sätze" (Crelles Journ. Bd. I, S. 38, Berlin 1826; Gesammelte Werke, Bd. I, S. 1—16) [1]) beschäftigt sich mit den Lehrsätzen über die Schnitte von Pyramiden, sowie mit jenen der Kegel und der Flächen zweiter Ordnung überhaupt. Die zweite Abhandlung „Einige geometrische Betrachtungen" (Crelle Bd. I, S. 161 u. 252; Ges. Werke Bd. I, S. 17—76) ist reichhaltig an Sätzen über die harmonische Proportion und die perspectivische Projection und bildet eine mustergiltige Behandlung der Eigenschaften von Kreisen und Kugeln, zu welcher das zweite Capitel des später erschienenen geistreichen Schriftchens „Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833" gewissermaßen als Einleitung dienen kann.

Hier hat sich Steiner schon im J. 1826 zuerst mit der eindeutigen Correspondenz beschäftigt, welche jede Gerade in einen Kreis, und jeden Kreis wieder in einen Kreis verwandelt und jetzt unter dem Namen „Transformation durch reciproke Radien" oder „Inversion" allgemein bekannt ist.

Die weitere Ausbildung dieser eindeutigen Correspondenz als geometrischer Verwandtschaft zwischen zwei ebenen Punktfeldern

---

[1]) S.: Jakob Steiners Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Weierstrass. I. Bd. Berlin 1881 u. II. Bd. Berlin 1882.

verdanken wir bekanntlich G. Bellavitis,[1]) Stubbs[2]) und Sir William Thomson.[3]) Durch diese linearen oder quadratischen Transformationen wurden Gerade in Curven erster oder zweiter Ordnung verwandelt. In dieser Abhandlung Steiners finden wir neben interessanten Sätzen über das Schneiden der Kreise und ihre Ähnlichkeitslinien auch die ohne Beweis publicierte Lösung der von ihm verallgemeinerten Malfattischen Aufgabe.[4]) Die dritte Abhandlung (Crelle I. 349, Ges. Werke I, 77—94) beschäftigt sich mit einigen Gesetzen über die Theilung der Ebene und des Raumes, während die vierte Abhandlung (Crelle I. 364, Ges. Werke I, 95—100) den Beweis des Eulerschen Hauptsatzes von den Polyedern (Novi Commentarii Acad. scient. Petrop. 1758, Tom. IV, pag. 109 et 140) enthält, der, obschon er nicht einzig von den gegebenen Elementen der Figur ausgeht, sondern der Winkelmessung bedarf, sich durch grose Einfachheit und Anschaulichkeit auszeichnet. Eine verdiente Anerkennung hat Steiners fünfte Abhandlung „Verwandlung und Theilung sphärischer Figuren durch Construction“ (Crelle II. 45, Berlin 1827; Ges. Werke 101—120) gefunden, obschon er freilich später selbst die Meinung aussprach, dass man seiner Zeit der Geometrie auf der Kugeloberfläche eine allzugroße Bedeutung beigelegt habe.

Die sechste Abhandlung (Crelle II. 64, Ges. Werke I. 121—124) hat die dem Vierseit umgeschriebene und dem Kreise nächste Ellipse zum Gegenstande, während die siebente Abhandlung (Crelle II. 96, Ges. Werke I. 125—130) Aufgaben und Lehrsätze über drei Kreise zur Lösung, bez. zum Beweisen stellt. In der achten Abhandlung (Crelle II. 190, Ges. Werke I. 131—136) werden die Zahl der Centra (8) bestimmt, für welche die stereographische Projection von drei Kreisen auf der Kugel gleiche Projectionen liefert und die diesbezüglichen Lehrsätze festgestellt.

Steiners neunte Abhandlung (Crelle II. 263, Ges. Werke I, 137—143) enthält zwei polygonometrische Sätze über die den Kegelschnitten eingeschriebenen Polygone, während er in seiner zehnten Abhandlung (Crelle II. 268, Ges. Werke I, 145—154) die in Gergonnes Annales de Math. gestellte Aufgabe löst, eine Gerade zu bestimmen, welche vier gegebene Gerade im Raume schneidet. Die beiden nächsten

---

1) S.: Nuovi Saggi dell' Accademia di Padova, Tom. IV. 1836.

2) Philosophical Magazin, Vol. 23. London 1843.

3) Liouvilles Journal de Math. Vol. X et XII. Paris 1845—47.

4) G. F. Malfatti, Problema geometrica fra i triangoli equ. i quadre i circoli. Modena 1806. — S. a.: F. Mertens, Über die Malfattische Aufgabe und deren Verallgemeinerung von Steiner. Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. 36. S. 195. Wien 1876.

(11. u. 12.) Abhandlungen (Crelle II. 287, Ges. Werke I, 155—162 u. Crelle III. 197, Ges. Werke I, 163 - 168) enthalten vorgelegte Lehrsätze und Bemerkungen zu anderen Aufgaben. Die dreizehnte Abhandlung (Crelle III. 199, Berlin 1828, Ges. Werke I, 169—172) beschäftigt sich mit den Flächen zweiter Ordnung, welche durch die sieben Eckpunkte eines von sechs Ebenen begrenzten Körpers gehen, und weist darauf hin, dass sie auch durch seinen achten Eckpunkt gehen müssen. Mit vorgelegten Aufgaben und Lehrsätzen über Kegelschnitte und Kugeln erweitert Steiner das diesbezügliche Gebiet der Geometrie in seiner vierzehnten Abhandlung (Crelle III. 207, Ges. Werke I, 173—180). In der fünfzehnten Abhandlung „Démonstration de quelques théorèmes de géométrie" (Gergonnes Annales de Math. Tom. XIX, pag. 1—8, Nismes 1828, Ges. Werke I, 181 — 188) wird unter Hinweis auf den Satz, dass die sechs Berührungspunkte von zwei einem Dreiecke eingeschriebenen Kegelschnitten wieder in einem Kegelschnitte liegen, dieses Theorem auf Flächen zweiter Ordnung ausgedehnt, also das ebene Problem auf das analoge Raumproblem erweitert.

Eine Fülle von interessanten Resultaten über geometrische Örter, die auf Kegelschnitte und auf Flächen zweiten Grades führen, enthielt auch die folgende, sechzehnte Abhandlung „Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques" (Gergonnes Annales de Math. Tom. XIX, pag. 37—64, Ges. Werke I, 189—210), welche die Lehrsätze über die den geradlinigen Gebilden eingeschriebenen Kegelschnitte, insbesondere die dem Dreiseit eingeschriebene Parabelschar zum Gegenstande hat. Schön und elegant ist die Art, wie Steiner die gleichseitige Hyperbel mit dem eingeschriebenen und die Parabel mit dem umgeschriebenen Dreieck in Beziehung brachte und die damit verbundenen Sätze sozusagen im Handumdrehen ableitete. Das schon von Monge[1]) angeregte Streben, die Lehrsätze der Geometrie der Ebene mit jenen der Geometrie des Raumes organisch zu vereinigen, tritt auch in Steiners siebzehnter Abhandlung „Recherche des relations entre les rayons des cercles qui touchent trois droites données sur un plan et entre les rayons des sphères qui touchent quatre plans donnés dans l'espace" (Gergonnes Annales de Math. Tom. XIX, pag. 85—96, Nismes 1828; Ges. Werke I, 211—219), in welcher die Lehrsätze über berührende Kreise und berührende Kugeln von einem gemeinsamen Gesichtspunkte einer scharfsinnigen Betrachtung unterzogen werden. Zu beweisende Lehrsätze und aufzulösende Aufgaben (Théorèmes à demontrer et problèmes à ressoudre, Ibid. Tom. XVIII et XIX, Ges.

[1]) Vergl.: S. 50—51 dieses Werkes.

Werke I, 211—218) bilden den Abschluss von Steiners erster Periode literarischen Schaffens.

Schon um diese Zeit — Mitte 1828 — wo Guido Schreiber, der erste darstellende Geometer auf deutschem Boden als Lehrer der geometrischen und topographischen Zeichnung an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe den ersten Band seines Lehrbuches der darstellenden Geometrie als erste deutsche Bearbeitung von Monges Geometrie descriptive veröffentlicht hatte und wo am polytechnischen Institute in Wien die Pflege der darstellenden Geometrie als Hilfsgegenstand des Maschinenbaues noch in den Händen eines Assistenten lag, hatte Jakob Steiner die Hauptresultate eines großen Werkes gefunden, in welchem der Organismus aufgedeckt werden sollte, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind. Den genialen Geometer, der nicht ohne ein gewisses Gefühl der Verbitterung auf S. 235 bemerkt, dass er als Privatlehrer mehr Zeit und Muße hatte, sich seinen mathematischen Studien widmen zu können, hinderten später als Lehrer der städtischen höheren Gewerbeschule nicht selten drückende Amtsgeschäfte, welche zur Folge hatten, dass der erste Theil seines fünf Bände umfassenden Werkes „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität, etc." [1]) erst vier Jahre später, nämlich 1832 in Berlin erschien, und dass dieses für die neuere Geometrie so bahnbrechende Werk auch unvollendet geblieben ist.

Bis zu diesem Jahre bildete die Geometrie kein organisch zusammenhängendes Ganze, sondern bildete eine Sammlung von auseinander liegenden, wenn auch sehr scharfsinnigen Kunststücken.

Schon als Hörer der Universität Heidelberg hatte Steiner, der neben den altclassischen Sprachen als Schweizer seine drei Landessprachen vollständig beherrschte, alle auf dem Gebiete der synthetischen Geometrie veröffentlichten Forschungen eingehend studiert und besonders deutsche, französische und italienische Schriftsteller mit seltenem Eifer gelesen. Von den wertvollen, altclassischen Forschungen des Euklid, Archimedes, Apollonius und Pappus[2]) ausgehend, vertiefte sich Steiner in die schon von Pascal[3]) als die zweckmäßigste

[1]) S. a.: Jakob Steiners Gesammelte Werke. I. Bd. S. 229–460. Berlin 1881.

[2]) S.: Pappi Alexandrini Mathematicae collectiones a F. Commandino. Liber VII. Pisauri 1588. Vergl. a.: Euclides, Les porismes, rétablis par la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus. Publié par M. Chasles. Paris 1860.

[3]) Pascal, Essai sur les coniques. Paris 1640.

Methode für das Studium der Kegelschnitte empfohlene Perspectivität und verfolgte mit Interesse die von Desargues [1]) eingeführte gemeinsame Betrachtung der drei Kegelschnitte. Frühzeitig erkannte Steiner die außerordentliche Wichtigkeit des schon von Desargues eingeführten Begriffes der Involution von sechs Punkten für die Curventheorie und verfolgte mit besonderem Interesse und seltenem Scharfblick die von diesen beiden Geometern bereits gefundenen Sätze auf dem Gebiete der synthetischen Geometrie. Das Streben, die zumeist noch lose mit einander zusammenhängenden Sätze der Geometrie zu centralisieren und ihre gemeinsame Quelle zu finden, lenkte seine reingeometrischen Forschungen auf die schon von Newton [2]) und seinem berühmten Schüler Maclaurin, [3]) sowie auf die später von Braikenridge [4]) entdeckten gemeinsamen Eigenschaften algebraischer Curven und mit besonderem Interesse zog er ihre interessanten organischen Erzeugungsweisen, welche Newton in seinem Werke „Enumeratio linearum tertii ordinis, Londini 1706" auf Kegelschnitte angewendet und auf die Construction von Curven dritter Ordnung ausgedehnt hatte, in den Kreis seiner scharfsinnigen Forschungen.

Dass Steiner bei dieser Richtung seiner umfassenden Studien den synthesischen Forschungen in den Werken von Huygens, [5]) La Hire [6]), Rob. Simson [7]), Stewart [8]), etc. die gebührende Beachtung zollte, ist einleuchtend. Hatte schon Leibniz [9]) in seiner „Geo-

---

[1]) Desargues, Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontre du cône avec un plan. Paris 1639.

[2]) Newton, Enumeratio linearum tertii ordinis. Londini 1706.

[3]) Maclaurin, Geometria organica, s. descr. linearum curvarum univers. Lond. 1720; f. a.: Maclaurin, De linearum geometricarum generalibus tractatus. (Ins Französische übersetzt von de Jonquières in seinen Mélanges de Géométrie pure. Paris 1856).

[4]) Braikenridge, Exercitationes geometriae de descriptione linearum curvarum. London 1733. (Philos. Transactions 1735).

[5]) Huygens, Horologium oscillatorium Paris 1673. — Traité de la lumière. Leyden 1691.

[6]) La Hire, Sectiones conicae in novem libros distributae. Paris 1685. — Mémoires sur les Epicycloides. Anciennes Mémoires de l'Académie des sciences. Paris 1704. — Traité des roulettes. Ibid. 1704.

[7]) Rob. Simson, Sectionum conicae, libri V. Edinburgh 1735. (Sectiones conicae, II. ed. 1756). — Elements of the conic sections. 1775. — S. a. Cameror, Simsons drei erste Bücher von den Kegelschnitten. Tübingen 1809.

[8]) Stewart, General theorems of considerable use in the higher parts of mathematics. Edinburgh 1746. — Propositiones geometricae more veterum demonstrate. Edinburgh 1763.

[9]) Leibniz, Opera omnia. Genevae 1768 (Coll. Dutens). — Math. Schriften, herausgeg. von C. J. Gerhardt. Berlin 1849—63.

metria situs" auf manchen wertvollen Satz bezüglich der Geometrie der Lage hingewiesen, so trat nach der Begründung der „Géométrie descriptive, Paris 1795" durch Monge und besonders durch Carnots Memoire „De la corrélation des figures de géométrie, Paris 1801" und noch mehr durch sein Werk „Géométrie de position, Paris 1803" eine scharfe Trennung der „Geometrie der Lage" von jener des „Maßes" ein. Ein bahnbrechendes Werk für die reine Geometrie war aber Poncelets berühmter „Traité des propriétés projectives des figures", welcher 1822 in Paris erschien und auf Steiners Bestreben, in das Chaos geometrischer Gesetze Ordnung zu bringen, von günstigstem Einflusse sein musste. Es ist auch klar, dass der intime Verkehr mit Deutschlands größtem Mathematiker, Jacobi, in Berlin — dessen außerordentliches Wissen und Können sich schon frühzeitig bemerkbar gemacht hatte — für den mit der synthetischen Geometrie so wohlvertrauten Geometer eine unerschöpfliche Fundgrube neuer, lohnender Geistesarbeit sein musste und der allumfassende, gelehrte Freund Jacobi dürfte es auch gewesen sein, der in Steiners bahnbrechendem Werke „Systematische Entwickelung" so sorgfältige literarische Nachweise möglich gemacht hat.

Nicht unbeachtet blieben von Steiner die synthetischen Forschungen italienischer Geometer, von welchen wir nur Benedettis „Geometria del compasso" aus dem XVI. Jahrhundert und besonders L. Mascheronis „Problemi per gli agrimensori con varie soluzioni, Pavia 1793" [1]) nennen wollen, weil sie die „Geometrie des Kreises" begründeten und Steiner den unmittelbaren Anlass zu seinen berühmten cyclometrischen Constructionen gaben. Selbstverständlich war es Steiner, der die französische und italienische Sprache mit Gewandtheit beherrschte, leicht möglich, die Fortschritte, welche die projectivische Geometrie besonders der Mongeschen Schule zu verdanken hatte, rasch zu verfolgen und so steht sein bahnbrechendes Werk „Systematische Entwickelung der geometrischen Gestalten von einander", das die Grundlage für neugeometrische Forschungen und für den Ausbau der darstellenden Geometrie im Sinne der projectiven Geometrie gebildet hat, im innigsten geistigen Zusammenhange mit den diesbezüglichen Forschungen von Desargues, Pascal, La Hire, Newton, Maclaurin, Braikenridge, Simson, Mascheroni, Monge, Carnot, Hachette, Brianchon, Poncelet, Gergonne, Bo-

---

[1]) S. a. L. Mascheroni-Carette, Problèmes pour les arpenteurs avec différentes solutions. Paris 1803. — Problèmes de géométrie pratique. II^{e} édit. Paris 1838. — Mascheroni-Grüson, Gebrauch des Zirkels, Berlin 1825.

billier, Petit, Servois, L'Huilier, Rochat, Binet, Biot, Chasles, Sturm, etc. Es ist auch einleuchtend, dass die bahnbrechenden analytischen Forschungen von Monge, Dupin und noch mehr die naheliegenden scharfsinnigen Forschungen von Möbius und Plücker auf Steiners geistiges Schaffen nicht ohne Einfluss bleiben konnten.

Und so enthält Steiners Werk „Systematische Entwickelung der geometrischen Gestalten von einander“ die Endresultate mehrjähriger Forschungen nach solchen räumlichen Fundamentaleigenschaften, die den Keim aller Sätze, Porismen und Aufgaben der Geometrie, womit uns die ältere und neuere Zeit so freigebig beschenkt hat, in sich enthalten. Dieses für die darstellende und neuere Geometrie so bahnbrechende Werk, welches Steiner seinem Gönner, dem Geheimen Staatsminister Wilhelm Freiherrn von Humboldt als ein Zeichen seiner Verehrung und Dankbarkeit gewidmet hat, berücksichtigt insbesondere die Arbeiten älterer und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität, etc. Schon in der Vorrede seines Werkes weist der scharfblickende, geniale Geometer darauf hin, „dass es in der Geometrie nur eine geringe Zahl von ganz einfachen Fundamentalbeziehungen gibt, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen folgerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt. Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäß ineinander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen.“

„Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welcher die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften verleihen zu können. Hierbei macht weder die synthetische noch die analytische Methode den Kern der Sache aus, der darin besteht, dass die Abhängigkeit der Gestalten von einander und die Art und Weise aufgedeckt wird, wie ihre Eigenschaften von den einfacheren Figuren zu den zusammengesetzteren sich fortpflanzen. Dieser Zusammenhang und Übergang ist die eigentliche Quelle aller übrigen vereinzelten Aussagen der Geometrie. Eigenschaften der Figuren, wie z. B. conjugierte Durchmesser der Kegelschnitte, sechs Punkte oder sechs Strahlen, welche Involution bilden, das mystische Sechseck und Sechsseit u. s. w., von deren Vorhandensein man sich sonst durch künstliche Beweise überzeugen musste, zeigen sich nun als nothwendige Folge der unscheinbarsten Eigenschaften der aufgefundenen Grundelemente und jene sind a priori durch diese ersetzt."

Mit innerer Befriedigung betont Steiner, dass sich Poncelet und Gergonne durch die Begründung des Princips der Dualität und der Théorie des polaires réciproques große Verdienste um die einheitliche Gestaltung der geometrischen Gesetze erworben haben. Die Dualität tritt mit den Grundgebilden zugleich hervor, die Theorie der reciproken Polaren kommt erst später als Resultat bestimmter Verbindungen der Grundgebilde zum Vorschein. Gergonnes Princip erwies sich als das primitivere, der Quelle näherliegende, während Poncelets Dualität viel zur Entwickelung und Förderung der synthetischen Geometrie beigetragen hat. Es ist aber ein Verdienst des scharfsinnigen deutschen Mathematikers Möbius, dass er in seinem barycentrischen Calcul eine freiere Auffassung dieser Theorie ans Licht gefördert hat.

Steiners Werk, das leider unvollendet geblieben ist, sollte seiner äußeren Eintheilung nach aus fünf Theilen und zugleich aus fünf Abschnitten bestehen, von denen der erste „projectivische Gerade, ebene Strahlbüschel und Ebenenbüschel", der zweite „projectivische Ebenen und Strahlenbüschel im Raume", der dritte „projectivische Räume", der vierte „Correlations-Systeme und Netze mit Einschluss der Involutions-Systeme und Netze" und der fünfte eine „ausführliche und umfassende Behandlung ebener Curven und Flächen zweiten Grades, durch Construction und gestützt auf projectivische Eigenschaften" enthalten sollte. Außerdem sollten noch zwei Theile mit diesem Werke in Verbindung gebracht werden, wovon der eine „Über Punkte und Axen der mittleren Entfernung mit Einschluss der mittleren harmonischen Entfernung, über Transversalen, etc." handeln sollte und worauf projective Eigenschaften angewendet werden sollten, während der andere Theil der Elementargeometrie gewidmet war, und der Hauptsache nach „eine systematische Entwickelung der Aufgaben und Sätze über das Schneiden und Berühren der Kreise in der Ebene und auf der Kugelfläche und der Kugeln" enthalten sollte.

Vom Steiners großem Werke erschien im Jahre 1832 bei Fincke in Berlin der erste Theil; von den übrigen erschien erst nach seinem Tode nur der fünfte Theil als „Vorlesungen über synthetische Geometrie" im Jahre 1867 bei B. G. Teubner in Leipzig in zwei Bänden, von welchen der erste die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearbeitet von Dr. C. F. Geiser, Docent am schweizerischen Polytechnicum, der zweite die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften, bearbeitet von Dr. Heinrich Schröter, ord. Professor an der Universität zu Breslau, enthält.

In seiner „Systematischen Entwickelung" führte Steiner (Gesamm. Werke I. Bd. S. 237) als eigentliche Grundlage der synthetischen Geometrie folgende Gebilde als einleitende Begriffe ein: 1.) Die Gerade als eine nach zwei Seiten ins Unendliche sich erstreckende Menge von unmittelbar aufeinander folgenden Punkten, 2.) der ebene Strahlbüschel, 3.) der Ebenenbüschel, 4.) die Ebene als geometrischen Ort der Mittelpunkte von zahllosen Strahlbüscheln und 5.) der Strahlbüschel im Raume. Alle Untersuchungen in der Geometrie beruhen nun auf folgenden Fundamentalbeziehungen: 1.) Die Gerade bezogen auf den ebenen Strahlbüschel, 2.) der Ebenenbüschel bezogen sowohl auf Gerade als auch auf ebene Strahlbüschel, 3.) Ebenen und Strahlbüschel in ihren gegenseitigen Beziehungen im Raume und 4.) die Räume in ihren wechselseitigen Beziehungen.

Der 232 Seiten (Gesammelte Werke I. Bd., S. 229—460) umfassende I. Abschnitt der „Systematischen Entwickelung" behandelt die „Betrachtung der Geraden, der ebenen Strahlbüschel und der Ebenenbüschel in Hinsicht ihrer projectivischen Beziehungen untereinander" in drei Capiteln. Das erste Capitel (S. 240—305) geht nach den einleitenden Begriffen (S. 237—240) unter Hinweis auf die bahnbrechenden Forschungen von Poncelet und Gergonne bezüglich des Princips der Dualität und in der Theorie des polaires reciproques und der freieren Auffassung der letzteren in Möbius barycentrischen Calcul von der schon den Griechen (Pappus, Collect. Math. libr. VII, Propos. CXLV) bekannten Sätzen in der Theorie der Transversalen aus, behandelt die projectivischen Geraden und Strahlbüschel in der Ebene, entwickelt unter Hinweis auf die schon von Lahire, Carnot und Brianchon gefundenen Sätze über harmonische Punkte und harmonische Strahlen (harmonicales, faisceaux harmoniques) die Lehre von den „harmonischen Elementen" (S. 251) und geht unter Zugrundelegung von zwei und mehreren Geraden, sowie von zwei und mehreren Strahlbüscheln zur Ableitung der allgemeinen Gesetze (S. 261) und der Fundamentalsätze (S. 264) über. Im Anhange werden die besonderen Fälle (S. 266) eingehend berücksichtigt. Von dem berühmten Porisma des Pappus ausgehend, untersucht nun Steiner mit Berücksichtigung der diesbezüglichen Arbeiten von De Lahire, Robert Simson und Carnot die Lage der ebenen Gebilde und entwickelt die daraus folgenden Sätze (S. 272), sowie jene Sätze und Porismen, die aus der Zusammenstellung dieser Gebilde folgen. Den Schluss des ersten Capitels bildet die Lehre von den vollständigen Figuren, deren ersten Sätze Carnot in seinem „Essai sur la théorie des transversales, Paris 1806" theilweise schon angegeben hatte, und welche Steiner in seiner Abhandlung „Theorèmes à démontrer et problèmes à ressoudre" (Gergonnes Annales de Math. Tome XVIII, pag. 302, 339, 378; Ges. Werke I. Bd. S. 211) vollständig veröffentlicht hatte.

Hier (S. 303—305, Werke I. Bd.) finden wir auch die elegante, mit Hilfe des Lineals und eines festen Kreises leicht auszuführende Steinersche Lösung der Aufgabe: „Wenn in einer Ebene zwei beliebige gleichnamige Vielecke gegeben sind, ein drittes so zu beschreiben, dass es dem einen eingeschrieben und dem anderen umgeschrieben ist." Minder einfache Lösungen dieser interessanten Aufgabe haben bekanntlich die französischen Mathematiker Servois, Gergonne, und L'Huilier im zweiten Bande der Annales de Mathématiques, Nismes 1811—12 veröffentlicht.

Das zweite Capitel (S. 305—325, Ges. Werke I. Bd.) handelt von den projectivischen Geraden im Raume, den ebenen Strahlbüscheln im Raume, untersucht die Beziehungen von Ebenenbüscheln zu Geraden und ebenen Strahlbüscheln (S. 305) und der Ebenenbüschel unter sich (S. 314), und bringt die Sätze und Porismen, welche sich durch Zusammensetzung der Gebilde im Raume ergeben (S. 319). Es schließt mit zwei Anmerkungen (S. 321 und 323) über projectivische Gebilde, die in einem Strahlbüschel im Raume oder auf einer Kugelfläche liegen.

Von ganz besonderem historischen und wissenschaftlichen Interesse ist das dritte Capitel (S. 326—407), welches die Erzeugung der Linien und geradlinigen Flächen zweiter Ordnung durch projectivische Gebilde zum Gegenstande hat. In diesem äußerst fesselnden Capitel imponiert Steiner geradezu durch seine außerordentlich genaue Kenntnis aller altclassischen, englischen und neufranzösischen Forschungen,[1]) welche mit seinen, aus projectivischen Beziehungen leicht zu entwickelnden Sätzen im innigsten organischen Zusammenhange stehen. Unter Hinweis auf die diesbezüglichen Arbeiten von Biot[2]) behandelt Steiner im dritten Capitel seines Werkes den gegenseitigen Durchschnitt der Ebene und der Kegelfläche (S. 326), übergeht auf die Erzeugung der Kegelschnitte und der Kegelfläche durch projectivische Gebilde (S. 329) und unterzieht auch hier die besonderen

---

[1]) Vergl.: Biot J. B., Essai sur l'histoire générale des sciences pendant la révolution française. Paris 1803.

[2]) S.: Biot J. B., Essai de géométrie analytique appliquée aux courbes et aux surfaces du 2e ordre. Ve édit. Paris 1813.

Fälle (S. 334) einer eingehenden Betrachtung. Nachdem Steiner auf Brianchons Erzeugung der Kegelschnitte und der Kegelflächen durch projectivische Gebilde hingewiesen, entwickelt er die aus dieser Erzeugungsart sich ergebenden Eigenschaften der Kegelschnitte und übergeht unter Zugrundlegung der Gergonneschen Classification der Curven bezüglich der Zahl der von einem Punkte an eine Curve möglichen Tangenten auf die beiden Sätze von Pascal und Brianchon. Mit dem ersteren Satze, den Pascal über das mystische Sechseck „Hexagrammum mysticum" zuerst in seinem „Essai sur les coniques, Paris 1640" entdeckt hatte, den wir aber für den Kreis schon in Euklides Data finden, beschäftigten sich später Maclaurin, Robert Simson, Carnot, etc. und fanden neue Beweise für denselben. Seitdem aber Brianchon in seinem berühmten „Mémoire sur les surfaces courbes du second degré" (Journal de l'École polytechnique. Cah. XIII, pag. 297. Paris 1806) seinen dualen Lehrsatz veröffentlicht hatte, erkannte man die Wichtigkeit dieser beiden Sätze für die gemeinsame Betrachtung der Kegelschnitte, und viele besonders französische Mathematiker wie Gergonne, Poncelet, Chasles, Sturm, Bobillier etc., der belgische Dandelin und die deutschen Mathematiker Möbius und Plücker zogen den Brianchonschen Satz in den Kreis ihrer gründlichen Forschungen. Steiner blieb in diesem Werke nach der althergebrachten, schon von den Griechen begründeten und von den französischen Mathematikern vielgebrauchten Weise, die Kegelschnitte aus dem Kegel, der einen Kreis zur Basis hat, zu erzeugen, treu, begründete aber die Theorie der Kegelschnitte mittelst des Kreises auf die Lehre von der Collineation und der Reciprocität und betrachtete die beiden Sätze von Pascal und Brianchon (S. 340) von einem neuen Gesichtspunkte, welcher zeigte, dass dieselben nicht die eigentliche Grundlage für die Untersuchung der Kegelschnitte sind, sondern dass sie vielmehr — mit vielen anderen Eigenschaften zugleich — aus einer umfassenderen Quelle, nämlich aus der Beziehung projectivischer Gebilde sehr leicht und klar hervorgehen. Eine wesentliche Vervollständigung [1]) dieser beiden Sätze hatte Steiner bereits im XVIII. Bde der Annales de Mathématiques, Nismes 1827 (S. Ges. Werke Bd. I, S. 224) zuerst bekannt gemacht und im folgenden Bande derselben Zeitschrift (Annales de Math. Tom. XIX, Ges. Werke I. 189—210) eine ganze Reihe von Sätzen über Punkte und Tangenten der Kegelschnitte veröffentlicht, die mit seinen bekannten projectivischen Sätzen über drei Punkte oder

[1]) Vergl. a.: Dr. A. F. Möbius, Verallgemeinerung des Pascalschen Theorems, das in einen Kegelschnitt beschriebene Sechseck betreffend. Crelles Journal Bd. 36, S. 216. Berlin 1848.

drei Tangenten in nahen Beziehungen stehen. Aus Steiners Aufklärungs-Broschüre „Über einige merkwürdige Lehren der neueren synthetischen Geometrie, Berlin 1833—34" ist ja auch bekannt, dass der geniale Geometer, der in seiner „System. Entwickelung" das Princip der Dualität in unverhüllter Weise in seine Betrachtungen eingeführt hatte, bald die althergebrachte, griechische Erzeugungsweise der Kegelschnitte aus dem Kreiskegel verließ und die Kegelschnitte als projectivische Gebilde aus dem Kreise erzeugte, ohne die Ebene zu verlassen. Unter Hinweis auf die bereits von Monge und seinen Schülern gefundenen Sätze über Pole und Gerade übergeht der gelehrte Verfasser auf S. 348 auf harmonische Pole und Gerade in Bezug auf einen Kegelschnitt, untersucht die projectivischen Beziehungen von drei zugeordneten harmonischen Polen (S. 351), lenkt die Aufmerksamkeit deutscher Geometer auf die besonders in neuester Zeit von französischen Mathematikern mit Hilfe der Fundamentalsätze über harmonische Gerade und Pole ausgeführten, sehr fruchtbaren geometrischen Untersuchungen und bezeichnet die bisher gefundenen Sätze und Eigenschaften geometrischer Gebilde nur als einen Theil eines umfassenden Ganzen, dessen anderer Theil in sehr nahen Beziehungen steht. Schon im Jahre 1832 wies Steiner auf die gemeinschaftliche Urquelle dieser beiden Theile, welche aus einer eigenthümlichen Verbindung projectivischer Gebilde entspringt und mittelst welcher auch die merkwürdige Eigenschaft von sechs Punkten in einer Geraden, die schon Desargues „Involution" genannt hat und mit der sich nach ihm verschiedene Mathematiker beschäftigt haben, in sehr einfacher und befriedigender Weise aufgeklärt wird.

Bezugnehmend auf die schon von Brianchon gefundenen Sätze über zwei Kegelschnitte und die ihren Tangenten entsprechenden harmonischen Pole, sowie über die Bewegung zweier veränderlichen Tangenten eines Kegelschnittes, übergeht Steiner auf die aus der Untersuchung dieser Fragen entspringende Theorie der reciproken Polaren, mit welcher sich auch Möbius in seinem barycentrischen Calcul beschäftigt und das derselben zu Grunde liegende Gesetz im §. 287 in sehr geschickter Weise begründet hat. Zusammengesetztere Sätze und Porismen (S. 354) und die schon von Newton, Maclaurin und Braikenridge bei der organischen Erzeugung der Kegelschnitte und Curven dritter Ordnung entdeckten Sätze (S. 359—362) mit den von Steiner gefundenen projectivischen Beweisen und Erweiterungen bilden sammt einer Anmerkung über n-kantige, bez. n-seitige Körperwinkel den Schluss dieser fesselnden Beziehungen von Raumgebilden. Unser ganz besonderes Interesse nehmen nun die Erzeugnisse projectivischer Gebilde im Raume (S. 363), darunter das einfache Hyperboloid (S. 370) das hyperbolische Paraboloid (S. 374), das gleichseitige hyperbolische Paraboloid (S. 380) und die wieder mit allem Scharfsinn behandelten besonderen Fälle (S. 382) in Anspruch. Selbstverständlich bilden auch in diesem äußerst interessanten Theile des dritten Capitels die bereits von Hachette, Brianchon, Poncelet, Bobillier, Petit über die hier genannten Regelflächen zweiter Ordnung bereits gefundenen Sätze den Ausgangspunkt für die auf projectivischer Grundlage ruhenden geistreichen Forschungen von Steiner.

So beweist Steiner auf S. 370 den zuerst von Hachette[1]) im Jahre 1826 gebrachten Beweis des gegenseitigen Durchschnittes der beiden Systeme von Erzeugenden des einfachen, durch drei Erzeugende gegebenen Hyperboloides mittelst der projectivischen Beziehungen viel einfacher als Hachette und zieht (S. 370—377) die Bestimmung dieser Fläche zweiter Ordnung als projectivisches Gebilde unter der Bedingung in den Kreis seiner scharfsinnigen Betrachtung im Raume, wenn fünf Strahlen des einfachen Hyperboloides nur der Richtung nach gegeben sind. In gleicher Weise werden die Eigenschaften und Erzeugungsarten des hyperbolischen Paraboloides (S. 377) auf projectivischer Grundlage mittelst projectivischer Ebenenbüschel untersucht. Unter Hinweis auf die reichhaltige „Sammlung geom. Aufgaben" von M. Hirsch (Berlin 1805 u. 1807) übergeht Steiner (S. 385) auf die von Binet in der Correspondance sur l'École polytechnique (Tom. II, pag. 71, Paris 1804—12) veröffentlichte Erzeugungsweise des einfachen Hyperboloides durch Drehung der Seiten eines Flächenwinkels um zwei feste Gerade, weist (S. 387) auf die von Hachette (Corresp. sur l'École poly. Tom. I, pag. 179) gefundene Erzeugung des Kegels durch Bewegung eines rechten Flächenwinkels, dessen beiden Ebenen immer durch zwei feste, in einem Punkte sich schneidende Geraden gehen und übergeht (S. 388) auf die von Poncelet in den Mémoires de l'Académie des sciences de Paris veröffentlichte Erzeugung des einfachen Hyperboloides mittelst eines rechten Flächenwinkels. Bewegen sich die Schenkel eines rechten Flächenwinkels so, dass die Scheitelgerade immer durch einen festen Punkt geht, dann erzeugt die Gerade der beiden Durchstosspunkte zweier festen Geraden — die nicht in einer Ebene liegen — mit den Schenkeln des bewegten Winkels, ein einfaches Hyperboloid.

Mit andern Worten lautet Poncelets Erzeugungsart auch so: „Sind zwei nicht in einer Ebene gelegene Gerade und ein fixer Punkt

[1]) S.: Hachette, Einige Bemerkungen über Flächen zweiter Ordnung. Crelles Journal, Bd. I, S. 339. Berlin 1826 und Steiners Abhandlung über die projectivischen Beziehungen der Erzeugenden eines einfachen Hyperboloides in Crelles Journal Bd. II, S. 268. Berlin 1827.

gegeben und ist dieser Punkt der Träger eines Ebenenbündels, so ist der geometrische Ort der Geraden der beiden Durchstosspunkte mit den aufeinander senkrechten Ebenenpaaren des Bündels ein einfaches Hyperboloid. [1]) Diese von den französischen Mathematikern gefundenen organischen Erzeugungsweisen der Flächen zweiten Grades, welche die stereometrischen Analoga zu den von den englischen Mathematikern (Newton, Maclaurin und Braikenridge) schon hundert Jahre früher entdeckten organischen Erzeugungsweisen der Curven zweiten Grades bilden, untersucht Steiner in seiner „Systematischen Entwickelung" auf projectiver Grundlage, bestimmt unter Hinweis auf seine im XVII. Bande der Gergonnes Annales de Mathématiques (pag. 83) veröffentlichte Abhandlung nach projectivischer Methode (S. 402) diejenigen Geraden, welche irgend vier gegebene Gerade, von denen zwei nicht in einer Ebene liegen, schneiden und übergeht nun (S. 404) auf die Lösung des bereits von Brianchon, Bobillier, Petit und Garbinsky gelösten Problemes, die Durchschnittspunkte einer Geraden mit einem durch drei von seinen Erzeugenden gegebenen einfachen Hyperboloide zu finden. Nach einer gründlichen und systematisch aufgebauten Lehre von den vollständigen n-Ecken und n-Kanten im Raume, sowie der Betrachtung der n-Kante im Strahlenbüschel werden wieder besondere Fälle und Aufgaben einer entsprechenden Erörterung unterzogen, allgemeine Bemerkungen über die Abhängigkeit einiger Systeme verschiedenartiger Figuren von einander gemacht und unter Hinweis auf Möbius scharfsinnige Untersuchungen über eingeschriebene und umgeschriebene Vielecke und Tetraeder (Crelles Journal Bd. III, S. 273) die projectivischen Beziehungen auf n-flächige Körper ausgedehnt und entwickelt. Im Anhange (S. 439—458) werden von Steiner Aufgaben zum auflösen und Lehrsätze zum beweisen vorgelegt.

Und so bietet uns Steiners Werk und wissenschaftliches Leben schon jetzt ein sprechendes Bild von der socialen Stellung eines großen deutschen Gelehrten, der als Privatlehrer Zeit und Muße hatte, von den altclassischen Forschungen der Geometer Griechenlands auszugehen und — auf die geistigen Errungenschaften des Mittelalters zurückblickend — die modernen Forschungen in Frankreich, Italien und Deutschland auf Schritt und Tritt zu verfolgen und der, als er den Plan gefasst hatte, ein fünf Bände umfassendes, systematisch geordnetes Werk über die synthetische Geometrie zu verfassen, bald darauf unter der drückenden

[1]) Vergl.: L. J. Magnus, Sur l'hyperboloide à une nappe et sur la surface conique du 2e ordre. Berlin 1825 und Démonstration de quelques théorèmes sur les enveloppes. Berlin 1828. (S. a. Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. II Bde. Berlin 1833—37.

Last der Berufsgeschäfte eines Mittelschullehrers nicht die Zeit findet, den ersten Theil seines bahnbrechenden Werkes zu vollenden und erst vier Jahre später in der Lage ist, an die Veröffentlichung des ersten Bandes seines großen Werkes zu schreiten.

Dieser erste Band seines classischen Werkes „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander", in welchem die von Poncelet gefundenen Beweismethoden vereinfacht, erweitert und vermehrt wurden, zeichnet sich aber durch die Einfachheit und Strenge seiner Principien neben Mannigfaltigkeit der daraus gewonnenen Resultate aus und wird deshalb auch für spätere Zeiten als Muster eines Lehrbuches der höheren Geometrie umsomehr dienen, als er reiche Keime für ihre weitere Entwickelung in sich trägt.

Im folgenden Jahre veröffentlichte Steiner eine größere Abhandlung über „Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung" (Berlin 1833, Gesammelte Werke I. Bd. S. 461—522). Das geistreiche Schriftchen, welches als eine wertvolle Erweiterung der von Mascheroni[1]) in seiner Geometrie des Kreises behandelten Aufgaben und aufgestellten Sätze betrachtet werden muss, entwickelt nach einer einleitenden Übersicht im ersten Capitel (S. 465—477) die Lehre von den harmonischen Strahlen und Punkten, ferner jene von den Transversalen und übergeht hierauf auf die Constructionen mittelst des Lineals unter gewissen Voraussetzungen. Den Gegenstand des zweiten Capitels (S. 478—498) bilden die harmonischen Eigenschaften, der Ähnlichkeitspunkt und die Potenz bei Kreisen. Das dritte Capitel (S. 499—510) beschäftigt sich mit der Lösung aller geometrischen Aufgaben mittelst des Lineals, wenn ein fester Kreis gegeben ist. Wir erwähnen nur die Bestimmung der Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden mit einem gegebenen, aber nicht gezeichneten Kreise (S. 505) und die Bestimmung der gegenseitigen Durchschnittspunkte zweier Kreise (S. 506). Im Anhange (S. 511—522) befinden sich zweiundzwanzig vermischte Aufgaben, nebst Andeutung ihrer Lösung mittelst des Lineals und eines festen Kreises. Diese zumeist Kegelschnitte, welche durch fünf Bestimmungsstücke gegeben sind, betreffenden Aufgaben haben wiederholt das constructive Interesse der hervorragendsten Mathematiker in Anspruch genommen, da Steiner bloß die ersten sieben Aufgaben nach dem Principe der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander mit einem Hilfskreis

[1]) S: L. Mascheroni (1750—1800), Problemi per gli agrimensori con varie soluzioni. Pavia 1793.

gelöst hat, die Lösung der anderen, zumeist dualen Aufgaben aber seinen Zeitgenossen überlassen hat.

Von der Construction (S. 511) eines Dreieckes, welches einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben und einem zweiten gegebenen Dreiecke umgeschrieben ist, ausgehend übergeht Steiner in der zweiten Aufgabe (S. 512) auf die Bestimmung der gegenseitigen Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden mit einem bloß durch fünf Punkte oder durch fünf Tangenten gegebenen — also nicht gezeichnet vorliegenden Kegelschnitte. In der dritten Aufgabe (S. 513) werden diejenigen Geraden gefunden, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen durch fünf Tangenten oder durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnitt berühren.

Die beiden folgenden, dualen Aufgaben (4. u. 5., S. 513—514) beschäftigen sich mit der Bestimmung des Punktes (der Tangente), in welchem ein durch vier Punkte (vier Tangenten) und eine Tangente (einen Punkt) bestimmter Kegelschnitt berührt wird. Unter Hinweis auf Brianchons treffliches „Mémoire sur les lignes du second ordre“ [1]) übergeht nun Steiner auf die beiden reciproken Aufgaben (6. u. 7., S. 514—516), die Punkte (oder die Tangenten) zu bestimmen, in welchen ein durch drei Punkte (drei Tangenten) und zwei Tangenten (oder zwei Punkte) bestimmter Kegelschnitt berührt wird. Die nun folgenden Aufgaben (8. — 15., S. 516 — 518), welche zur Auflösung gestellt werden, haben die Construction des Schnittpunktes einer Geraden mit einem Kegelschnitt oder die Construction der Tangente von einem Punkte an einem Kegelschnitt unter der Bedingung zum Gegenstande, dass dieser Kegelschnitt durch vier Punkte (vier Tangenten) und eine Tangente (einen Punkt) oder durch drei Punkte (drei Tangenten) und zwei Tangenten (zwei Punkte), ferner durch drei Punkte (drei Tangenten) und die Tangenten (Berührungspunkte) in zwei derselben gegeben ist.

In den folgenden vier Aufgaben (16.—19., S. 518—519) zieht Steiner zwei Kegelschnitte in den Kreis seiner geometrischen Constructionen und bestimmt zwei ihrer Schnittpunkte sammt den Tangenten in denselben unter der Voraussetzung, dass die beiden Kegelschnitte durch die beiden anderen Schnittpunkte und durch je drei ihrer Punkte gegeben sind. In der 17. Aufgabe werden die beiden gemeinsamen Tangenten und die vier gemeinschaftlichen Schnittpunkte zweier Kegelschnitte construiert, wenn diese durch die beiden anderen gemeinsamen Tangenten und durch je drei beliebige Tangenten gegeben sind.

Die 20. Aufgabe (S. 519) ist die Verallgemeinerung einer berühmten Aufgabe, mit deren besonderem Falle sich besonders französische Mathematiker, wie Encontre, Servois, Rochat, Brianchon,

[1]) Paris 1817.

Poncelet und L'Huilier im I. und VIII. Bande der Annales de Mathématiques und X. Bande des Journal de l'École polytechnique vielfach beschäftigt haben. Sie besteht darin, in einen durch irgend fünf Punkte oder durch irgend fünf Bedingungen gegebenen Kegelschnitt ein n-Eck zu beschreiben, welches zugleich irgend einem gegebenen n-Eck umschrieben ist, d. h. dessen Seiten zugleich nach bestimmter Ordnung durch n beliebige Punkte gehen. Die folgende, 21. Aufgabe setzt einen durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitt voraus. Steiner löst auch diese beiden dualen Aufgaben mittelst eines Hilfskreises und des Ähnlichkeitspunktes nach dem Princip der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander.

Die letzte 22. Aufgabe (S. 522, Fig. 25.) beschäftigt sich mit dem von Crelle in seinem „Handbuch des Feldmessens und Nivellierens, Berlin 1826, S. 116" gestellten geodätischen Probleme, Punkte eines Kreises zu finden, wenn dieser durch einen seiner Punkte und seinen unzugänglichen Mittelpunkt gegeben ist. Wie bereits bemerkt, können diese geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises gewissermaßen als Einleitung zu Steiners mustergiltiger Behandlung der Eigenschaften von Kreisen und Kugeln dienen, die er in seiner Abhandlung „Geometrische Betrachtungen" (Crelles Journal Bd. I, S. 17—76, Berlin 1826) veröffentlicht hat.

Die bisher angeführten wissenschaftlich-wertvollen Arbeiten Steiners, aber insbesondere sein bahnbrechendes, Wilhelm von Humboldt gewidmetes Werk „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander," von dem sich der schon jetzt berühmte Gewerbeschullehrer selbst vollkommen bewußt war, der mathematischen Wissenschaft einen bleibenden Gewinn zugeführt zu haben, genügten dem inzwischen nach Königsberg berufenen Mathematiker Jacobi seinem geschätzten Freunde Steiner zur Anerkennung seiner wissenschaftlichen Leistungen das Ehrendoctor-Diplom der Königsberger Universität zu verschaffen. Den vereinten Bemühungen von Jacobi und Humboldt ist es auch zu danken, dass für den mit drückenden Amtsgeschäften belasteten Gewerbeschullehrer im Jahre 1834 eine außerordentliche Professur für synthetische Geometrie an der Universität zu Berlin gegründet wurde. Gleichzeitig erwählte die königlich Preussische Akademie der Wissenschaften Jakob Steiner zu ihrem Mitgliede.

Als Akademiker entfaltete Steiner durch mehr als zwanzig Jahre auf dem Gebiete der mathematischen Forschung eine geradezu wunderbare Thätigkeit, deren wissenschaftliche Bedeutung für die synthetische Geometrie freilich erst seit wenigen Decennien in ihrem vollen Umfange anerkannt wurde. Noch im Jahre 1866 schienen Steiners synthetischen Methoden und Betrachtungen — unübertroffen hinsichtlich ihrer Anschaulichkeit und Fruchtbarkeit — von der sich immer weiter ausbreitenden und bis zu diesem Zeitpunkte allmächtigen analytischen Methode in den Hintergrund gedrängt zu werden. Seinen durch achtundzwanzig Jahre an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesungen verdankt auch die synthetische Theorie der Kegelschnitte jene wissenschaftliche Höhe, die sie gestützt auf projectivische Eigenschaften in den letzten Jahren erreicht hat.

Wiederholt erschien Steiner in den Sitzungen der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin und überraschte diese gelehrte Gesellschaft durch den geistreichen Inhalt seiner Vorlesungen über Sätze, welche als Resultate langjähriger Forschungen noch lange für die Geometer ein zu erstrebendes Ziel bleiben werden. Den ersten Vortrag [1]) in der Berliner Akademie der Wissenschaften hielt Steiner am 1. December 1836 über „Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze" betreffend ebene Figuren und Körper im Raume, zu welchem Lhuiliers Abhandlung „De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum etc., Varsaviae 1782" die Anregung gab.

Am 23. Jänner 1837 folgte der Vortrag über das „Maximum und Minimum des Bogens einer beliebigen Curve im Verhältnis zur zugehörigen Abscisse oder Ordinate" [2]), diesem jener „Über den Punkt der kleinsten Entfernung" [3]) und am 5. April 1838 der umfangreiche Vortrag „Von dem Krümmungsschwerpunkte ebener Curven". [4]) Auf Steiners berühmte, mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängende Abhandlungen „Über parallele Flächen" [5]) und „Über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt" [6]) haben wir bereits im vierten Abschnitte dieses Werkes (S. 128) hingewiesen. Die letztgenannte, aus zwei Theilen bestehende Abhandlung legte Steiner im Jahre 1841 der Pariser Akademie der Wissenschaften vor. [7])

Von großem Einfluße auf die Neugestaltung der Curventheorie waren die Abhandlungen „Über einige allgemeine Eigenschaften der

[1]) S.: Jakob Steiners Gesammelte Werke. II. Bd. S. 75—91 und Crelles Journal Bd. XVIII, S. 281—296. Berlin 1838. — [2]) S.: Crelles Journal, Bd. XVII, S. 83—91. Berlin 1837 und Ges. Werke II. Bd. S. 51—61. Berlin 1882. — [3]) Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin a. d. Jahre 1837, S. 144 und Ges. Werke II. Bd. S. 93. — [4]) Crelles Journal Bd. XXI, S. 35—63 und 101—133, — Ges. Werke II. Bd. S. 97—159. — [5]) Monatsberichte der Berliner Akademie a. d. Jahre 1840, S. 114—118 und Ges. Werke S. 171—176. — [6]) Liouvilles Journal. Tom. VI, pag. 105—170. Crelles Journal Bd. XXIV. S. 93—162 und S. 189—250. — Ges. Werke II. Bd. S. 177—242 und 243—308. — [7]) S.: Comptes rendus. Tom. XII, pag. 479. Paris 1841.

Curven von doppelter Krümmung" [1]), „Über ein einfaches Princip zum Quadrieren verschiedener Curven" [2]), „Einfache Construction der Tangente an die allgemeine Lemniscate" [3]); ferner die mit der Theorie der Kegelschnitte zusammenhängenden Abhandlungen „Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte" [4]), „Über eine Eigenschaft der Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte" [5]) sowie „Über eine Eigenschaft der Leitstrahlen der Kegelschnitte" [6]), „Über das dem Kreise umschriebene Viereck" [7]), „Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe, und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte" [8]), „Über einige neue Bestimmungsarten der Curven zweiter Ordnung nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Curven" [9]) und eine „Allgemeine Betrachtung über einander doppelt berührende Kegelschnitte". [10]) Nicht unerwähnt wollen wir lassen die interessanten „Lehrsätze, von welchen die bekannten Sätze über parallele Curven besondere Fälle sind" [11]), und die „Geometrischen Lehrsätze" [12]) über Curven dritter Ordnung, von welchen Steiner in der Sitzung der Berliner Akademie der Wissenschaften am 27. November 1845 Mittheilung machte. Von hohem wissenschaftlichen Werte und bleibender Wichtigkeit aber ist die kurze Abhandlung „Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven" [13]), welche Steiner in der Gesammtsitzung der Berliner Akademie der Wissenschatten am 10. August 1848 vorlegte. In dieser Abhandlung, welche später auch im XLVII. Bande (S. 1—6, Berlin 1854) des Crelleschen Journals erschienen ist, werden nach Bobilliers Vorgange [14]) die verschiedenen Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Curve n-ten Grades definiert, und die Theorie der Polarenveloppen in

---

[1]) Monatsberichte der Berliner Akademie. 1839. S. 76—80. Ges. Werke II. Bd. S. 161—165. — [2]) Monatsberichte 1840 S. 46, 47. — G. Werke II. Bd. S. 167—170. — [3]) Crelles Journal Bd. XIV, S. 80—82. Berlin 1835. — Ges. Werke II. Bd. S. 19—23. — [4]) Giornale arcadico di Roma. Tom. XCIX, pag. 147—161 und Crelles Journal Bd. XXX, S. 97—106. Berlin 1846. — Ges. Werke II. Bd. S. 327—337. — [5]) Crelles Journal Bd. XXX. S. 271—272. Berlin 1846 und Ges. Werke, II. Bd. S. 339—342. — [6]) Crelles Journal Bd. XXX. S. 337—340. — Ges. Werke II. Bd. S. 349—354 — [7]) Ibid. XXXII. Bd. S. 305—310. Berlin 1846. — Ges. Werke II. 381—388 — [8]) Crelles Journal Bd. XXXVII, S. 161—192. Berlin 1848. — Ges. Werke II. Bd. S. 389—420. — [9]) Ibid. Bd. XLV, S. 189—211. Ges. Werke II. S. 445—468. — [10]) Crelles Journal Bd. XLV, S. 212—224, Berlin 1853 und Ges. Werke II. Bd. S. 469—483. — [11]) Ibid. Bd. XXXII, S. 75—79 und Ges. Werke II. Bd. S. 361—367. — [12]) Ibid. XXXII. Bd. S. 182—184 und Ges. Werke II. Bd. S. 369—373. — S. a.: „Sätze über Curven zweiter Ordnung." Crelles Journal Bd. XXXII, S. 300—304, Berlin 1846 und Ges. Werke II. Bd. S. 375—380. — [13]) Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom August 1848 und Crelles Journal Bd. XLVII, S 1—6, Berlin 1854. — Ges. Werke II. Bd. S. 493—500. — [14]) Gergonnes Annales de Math. Tom. XIX. Nismes 1828.

scharfsinnigster Weise entwickelt. Hier finden wir zum erstenmale die Erzeugung der algebraischen Curven aus projectivischen Büscheln niedrigerer Ordnung und die Aufstellung der Sätze über die Singularitäten der Kerncurven. Am Schlusse dieser wertvollen Abhandlung wird das Cramersche Paradoxon in seiner allgemeinsten Form erklärt und auf die vielen zum Theil ganz neuen und interessanten Eigenschaften der Curven dritter und vierter Ordnung hingewiesen, welche sich aus diesen allgemeinen Betrachtungen ergeben. Nachdem Steiner noch darauf hingewiesen, dass besonders die Curven dritten Grades specielle Fälle darbieten, legte er schon im Jahre 1848 der „Involution" eine hohe curventheoretische Bedeutung bei, weil auf ihr das eigentliche Wesen vieler Eigenschaften der algebraischen Curven beruht.

Die Wichtigkeit des zuerst von Desargues im Jahre 1639 aufgestellten Begriffes der Involution für die Curventheorie wurde von deutschen, französischen, italienischen und englischen Mathematikern bald erkannt und schon in Chasles „Traité de géométrie supérieure, Paris 1852" bildete dieser Begriff eine der wichtigsten Grundlagen für neugeometrische Forschungen. Wie bereits erwähnt, dehnte der scharfsinnige Möbius[1]) im Jahre 1855 den Begriff der Involution auf Involutionen höherer Ordnung aus und begründete die Theorie der collinearen Involutionen, welche durch den französischen Schiffslieutenant (Lieutenant de vaisseau) E. de Jonquières in seinem Memoire „Généralisation de la théorie de l'involution" (Annali di Matematica, Tomo II,° pag. 86—94, Roma 1859) in geistreicher Weise verallgemeinert wurde.

Die Fruchtbarkeit der zuerst von Steiner schon im Jahre 1848 in den Monatsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften veröffentlichten „Allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Curven" hat sich bald darauf an zwei wichtigen Constructionen erwiesen und zwar an dem Probleme der Doppeltangenten einer Curve vierten Grades. Das letztere hat Steiner schon 1852, fast gleichzeitig mit Hesse[2]) in den Hauptpunkten gelöst in der Abhandlung „Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten" (Crelles Journal Bd. XLIX, S. 265- 272, Berlin 1854; Ges. Werke II. Bd. S. 602—612), aber mit ganz anderen Hilfsmitteln als diejenigen waren, deren sich der berühmte Analytiker bediente. Aus Andeutungen, welche Steiner schon im XLV. und XLVII. Bande (Jahrg. 1853 und 1854) des

---

[1]) S. S. 243 dieses Werkes.

[2]) O. Hesse, Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. Crelles Journal Bd. XLIX. S. 279. Berlin 1854.

Crelleschen Journales gibt, geht nicht nur hervor, wie früh er das schwierige Problem bereits in Angriff genommen hatte, sondern auch die eigenthümlich verschlungenen und ungewöhnlichen Combinationen der gegebenen Elemente, die zur Lösung führen, haben sich aus denselben herstellen lassen. Auch hier war es wieder Poncelet [1]), der zuerst auf das Vorhandensein der Doppeltangenten bei algebraischen Curven aufmerksam gemacht hat. Steiner stellt in dieser Abhandlung die drei Gleichungen auf, welche zwischen dem Grad, der Classe, der Zahl der Doppel- und Rückkehrpunkte, und der Zahl der Doppel- und Wendetangenten jeder algebraischen Curve stattfinden. Von der Theorie der reciproken Polaren ausgehend, gelangte er leicht zu seinen Resultaten, während Jacobi [2]) Mühe hatte, die Zahl der Doppeltangenten direct und analytisch zu beweisen. Die Resultate seiner Forschungen hatte Steiner bereits am 25. Juli 1853 der Akademie der Wissenschaften zu Paris mitgetheilt.[3]) Die Ergebnisse seiner Untersuchungen über das Problem der Normalen von allgemeinen algebraischen Curven, mit dem sich vorher schon Poncelet [4]) und Joachimsthal [5]) in der Theorie der Kegelschnitte beschäftigt hatten, veröffentlichte Steiner in seiner Abhandlung „Über algebraische Curven und Flächen" im XLIX. Bande, S. 333—348 (Jahrg. 1854) des Crelleschen Journals.[6]) Von Interesse sind auch die Abhandlung „Über eine besondere Curve dritter Classe und vierten Grades", veröffentlicht im LIII. Bande (S. 231—237, Jahrgang 1857) des Borchardtschen Journales über die dreispitzige Hypocykloide [7]) und die umfangreiche, an Resultaten reiche Abhandlung „Über solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven, sowie über geradlinige Transversalen der letzteren" [8]), welche den Gegenstand eines am 26. Mai 1851 in der Berliner Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vortrages bildet.

---

[1]) J. V. Poncelet, Analyse des transversales, appliquée à la recherche des propriétés projectives de lignes et surfaces. Crelles Journal Bd. VIII, S. 401—406. Berlin 1832.

[2]) Crelles Journal, Bd. XL, S. 237. Berlin 1850.

[3]) Comptes rendus. Tom. XXXVI. Paris 1853.

[4]) Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures. Pag. 288. Paris 1822.

[5]) F. Joachimsthal, Über die Normalen der Ellipse und des Ellipsoides. Crelles Journal Bd. XXVI, S. 172, Berlin 1843. — „Sur la construction des normales qu'on peut abaisser d'un point donné sur une section coniques complètement decrite." Ibid. Bd. XLVIII, S. 377. Berlin 1854.

[6]) Ges. Werke II. Bd. S. 621—637.

[7]) Ibid. II. Bd. S. 639—647.

[8]) Crelles Journal Bd. XLVII. S. 7—105 Berlin 1854 und Ges. Werke II. Bd. S. 501—596.

Hatte sich Steiners Meisterschaft in der Abhandlung über die Doppeltangenten der Curven vierten Grades glänzend auf einem Gebiete bewährt, dessen innerster Kernpunkt — ihm ganz fremd — in der Lehre von den algebraischen Gleichungen liegt, wie die damit zusammenhängende Theorie gewisser Abelscher Functionen klar zeigt, so ist er in der letztgenannten Abhandlung nicht minder erfolgreich gewesen in dem Bestreben seine allgemeinen geometrischen Methoden für die Probleme, die sich an den Begriff des Maßes knüpfen, brauchbar zu machen. Der geniale Geometer hat in den bisher genannten und noch folgenden Abhandlungen eine solche Überfülle ohne Beweise ausgesprochener Sätze veröffentlicht, dass die Gelehrten noch mehrere Jahrzehnte brauchen werden, um diese für die allgemeine Theorie der algebraischen Curven und Flächen so wertvollen Lehrsätze auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Es benimmt auch Steiners Geständnis, dass mehrere der aufgestellten Sätze nicht hinreichend begründet seien, den Untersuchungen in diesem schwierigen Gebiete nichts von ihrem großen Werte.

Wir verdanken aber Steiner nicht bloß eine vollständige Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften und eine hochentwickelte Theorie der algebraischen Curven dritten, vierten, fünften und n-ten Grades, sondern auch eine an schönen Sätzen reiche Theorie der algebraischen Flächen. Auf die mittelst projectivischer Beziehungen entwickelten Theoreme über Flächen zweiten Grades, besonders des einfachen allgemeinen oder elliptischen und des besonderen Hyperboloides, sowie des allgemeinen und gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides, ihre Bestimmung und Erzeugung im dritten Capitel seiner „Systematischen Entwickelung geom. Gestalten“ (Ges. Werke I. Bd. S. 370—395) haben wir schon hingewiesen. Den bereits erwähnten Untersuchungen über die Normalen algebraischer Curven hat Steiner sofort Betrachtungen über die Normalen an algebraische Flächen beigegeben, die namentlich für den zweiten Grad ausgeführt wurden. Es geschah dies in dem Aufsatze „Über die Normalen aus einem Punkte auf eine algebraische Fläche“, welcher den zweiten Theil der in Crelles Journal (Bd. XLIX, S. 333—348) veröffentlichten Abhandlung „Über algebraische Curven und Flächen“ bildet.[1]) Hier machte Steiner — ein geradezu idealer Synthetiker — den man oft mit Unrecht als einen Gegner der analytischen Methode bezeichnete, auch von dem bereits von Poncelet[2]) eingeführten imaginären Kugelkreise Gebrauch,

[1]) S. Ges. Werk II. Bd. S. 633—637. Berlin 1882. (Manuscript 1854).

[2]) S.: Traité des propriétés projectives. Nr. 621. Paris 1822.

nachdem er zuvor einen harten Kampf wegen der Einführung des „Imaginären“ — dieses Gespenstes in der Ebene und im Raume, wie er es nannte — in die reine Geometrie mit Erfolg bestanden und mit Hilfe dessen die verborgensten Wahrheiten in der Theorie der algebraischen Curven und Flächen enthüllt hatte.

Am 31. Jänner 1856 erschien Steiner zum letztenmale in der Sitzung der Berliner Akademie der Wissenschaften und theilte aus seinen langjährigen Forschungen über algebraische Flächen n-ten Grades in einem Vortrage jene charakteristischen Eigenschaften und Sätze mit, die sich auf Flächen dritten Grades beziehen.[1]) Steiner theilte hier — ohne genügende Kenntnis der inzwischen von englischen Mathematikern veröffentlichten Forschungen — den Gelehrten Deutschlands seine genialen Resultate über die Flächen dritten Grades mit, aus welchen sofort zu ersehen war, dass diese Flächen fast ebenso leicht und einlässlich zu behandeln sind, als bisher die Flächen zweiten Grades. Das hauptsächlichste Interesse fanden die von ihm gefundenen vier Erzeugungsarten der Flächen dritten Grades, aber auch die schönen Eigenschaften und Sätze, die sich auf die Kernfläche, sowie auf die Polarentheorie im allgemeinen beziehen, bekundeten den schöpferischen Geist des großen Geometers, trotz der bedeutenden Erfolge, welche die englischen Mathematiker auf diesem Gebiete bereits erzielt hatten. Die von Steiner mitgetheilten vier Erzeugungsarten der Flächen dritten Grades, aus welchen ihre wesentlichsten Eigenschaften unmittelbar hervortreten, sind folgende: „1.) Durch die neun Geraden, in welchen die Flächen zweier beliebigen gegebenen Trieder einander gegenseitig schneiden und durch irgend einen gegebenen Punkt ist eine Fläche dritten Grades bestimmt. — 2.) Werden ein gegebener Flächenbüschel zweiten Grades und ein gegebener Ebenenbüschel projectivisch auf einander bezogen, so erzeugen sie irgend eine Fläche dritten Grades, welche durch die Grundcurve vierten Grades, d. i. den gemeinsamen Schnitt aller Flächen des ersten Büschels, sowie durch die Achse (Träger) des anderen Büschels geht. — 3.) Ist ein Flächenbüschel zweiten Grades gegeben, so ist die Pampolare jedes beliebigen Poles in Bezug auf denselben irgend eine Fläche dritten Grades, welche stets durch die Grundcurve vierten Grades des Büschels und auch durch den Pol geht. — 4.) Sind irgend drei Flächen zweiten Grades gegeben, so schneiden sich die drei Polarebenen jedes Poles in Bezug auf dieselben im allgemeinen in je einem anderen Punkte; bewegt sich der Pol in einer beliebigen gegebenen Ebene, so beschreibt der Schnittpunkt der Polarebenen irgend

[1]) Ibid. II. Bd. S. 649—659.

eine Fläche dritten Grades. Oder: Denkt man sich alle Flächen zweiten Grades, welche durch beliebig gegebene sieben Punkte gehen, so liegen die irgend einer gegebenen Ebene in Bezug auf dieselben entsprechenden Pole sämmtlich in einer Fläche dritten Grades."

Aus diesen Entstehungsarten und weiterhin mit Benützung der Polaritätssätze ergeben sich die merkwürdigsten Haupteigenschaften der Flächen dritten Grades."

Wir erwähnen von denselben nur folgende: „Eine allgemeine Fläche dritten Grades enthält 27 gerade (reelle oder imaginäre) Linien; jede derselben wird von 10 der übrigen geschnitten, und zwar von fünf Paaren, die einander selbst schneiden, so dass sie mit jener fünf Dreiecke bilden. Alle 27 Geraden schneiden einander sonach zu zweien in 135 Punkten und bilden im ganzen 45 Dreiecke. Die fünf Paare dieser Schnittpunkte in jeder Geraden gehören zu einem Involutions-Punktensystem; ist dasselbe hyperbolisch, so enthält es zwei Asymptotenpunkte (Doppelpunkte). Die Seiten jedes Dreieckes enthalten entweder alle drei hyperbolische oder nur ein hyperbolisches und zwei elliptische Punkten-Systeme." Oder umfassender:

„Es gibt 27 verschiedene Systeme von solchen Ebenen, welche die allgemeine Fläche dritten Grades in Kegelschnitten schneiden, und zwar bestehen dieselben aus 27 Ebenenbüscheln, welche die 27 Geraden beziehungsweise zu Achsen haben; und umgekehrt, jede Ebene, welche die Fläche in einem Kegelschnitte schneidet, schneidet dieselbe nothwendig noch in einer der 27 Geraden und gehört zu einem der Ebenenbüschel. Die Schar Kegelschnitte, die den Ebenen eines und desselben Ebenenbüschels angehören, schneiden dessen Achse in dem genannten Punkt-System; jede Ebene ist als eine die Fläche dritten Grades doppelt berührende anzusehen, und die Schnitte ihres Kegelschnittes mit der Achse als die Berührungspunkte; unter diesen Kegelschnitten gibt es insbesondere zwei, welche die Achse berühren, und zwar in den genannten Asymptotenpunkten; ferner gibt es fünf Kegelschnitte, die in je zwei Geraden zerfallen, so dass die zugehörige Ebene die Fläche dritten Grades in drei Punkten berührt, nämlich in den Ecken des in ihr liegenden Dreieckes. Die Ebenen der 45 Dreiecke sind die einzigen, welche die Fläche in drei Punkten berühren.

Es gibt ferner 45 Systeme von solchen Flächen zweiten Grades, welche die Fläche dritten Grades in je drei Kegelschnitten schneiden; jedem Dreiecke entspricht ein solches System, nämlich jede drei Ebenen, die beziehlich durch dessen drei Seiten gehen, enthalten drei solche Kegelschnitte, durch welche allemal irgend eine Fläche zweiten Grades geht; und umgekehrt. Hat eine Fläche zweiten Grades mit einer Fläche dritten Grades irgend drei Kegelschnitte gemein, so gehen die Ebenen derselben jedesmal durch die drei Seiten eines der 45 Dreiecke; etc.

Die drei Kegelschnitte, durch welche je eine Fläche zweiten Grades geht, können insbesondere auch aus drei Paaren Geraden bestehen, wobei dann die Fläche ein einfaches Hyperboloid ist. Nimmt man von den 27 Geraden irgend drei, welche einander nicht schneiden, so bestimmen sie ein solches Hyperboloid, denn dasselbe schneidet die Fläche dritten Grades allemal noch in drei anderen Geraden, welche jene drei treffen, aber einander nicht.

Es gibt im ganzen 360 solche Hyperboloide; jedes der 45 Systeme Flächen zweiten Grades enthält 48 derselben, und jedes Hyperboloid kommt in sechs verschiedenen Systemen vor.

Wählt man von den 45 Dreiecken zwei solche, welche keine Gerade gemein haben, deren Ebenen sich also in einer anderen Geraden, einer Kante schneiden, so gehört zu diesen ein drittes Dreieck, dessen Ebenen ein Trieder bilden. Die Ebene der 45 Dreiecke bilden 240 Trieder, oder 120 Paare conjugierter Trieder, welche zusammen 720 verschiedene Kanten haben.

Wird durch irgend einen in der allgemeinen Fläche dritten Grades liegenden Kegelschnitt eine beliebige Fläche zweiten Grades gelegt, so schneidet sie jene Fläche im allgemeinen noch in einer Raumcurve vierten Grades, durch welche allemal unzählige andere Flächen zweiten Grades gehen, oder ein Flächenbüschel zweiten Grades geht. Legt man fernerdurch irgend zwei einander nicht schneidende Gerade der allgemeinen Fläche dritten Grades ein beliebiges Hyperboloid, so schneidet dasselbe die Fläche außerdem noch in einer solchen Raumcurve vierten Grades, durch welche keine andere Fläche zweiten Grades geht. Somit gibt es auf der allgemeinen Fläche dritten Grades zwei wesentlich verschiedene Arten von Raumcurven vierten Grades.

Eine allgemeine Fläche dritten Grades ist von der zwölften Classe; die Tangentenfläche oder Tangentendeveloppable ihrer ersten Raumcurve vierten Grades ist vom achten Grad und von der zwölften Classe, jene der zweiten Raumcurve vierten Grades vom sechsten Grad und von der sechsten Classe. Wird der gegebenen Fläche dritten Grades aus irgend einem Punkte oder Pol ein Kegel umschrieben, so ist derselbe vom sechsten Grad und berührt die Fläche längs einer Raumcurve sechsten Grades, durch die jedesmal irgend eine Fläche zweiten Grades geht, welche die erste Polare des Poles in Bezug auf die gegebene Fläche heißt. Es gibt unendlich viele solche besondere Pole, deren erste Polare je ein Kegel zweiten Grades ist. Die erste Polare des Scheitels dieses Kegels ist aber wieder, ein Kegel und die beiden Spitzen dieser Kegel heißen reciproke Pole in Bezug auf die Fläche dritten Grades. Der gemeinsame Ort aller reciproken Pole ist eine bestimmte Fläche vierten Grades, welche die Kernfläche der gegebenen Fläche dritten Grades genannt wird. Diese Kernfläche vierten Grades geht durch die Scheitel der 240 Trieder, und zwar sind die Scheitel jedes der 120 Paare conjugierter Trieder auch ein Paar reciproke Pole. Ferner sind auch die zwei Asymptotenpunkte in jeder der 27 Geraden ein Paar reciproker Pole und zwar wird die Gerade in denselben von der Kernfläche berührt.

Es gibt im Ganzen 10 solche specielle Pole, deren Polarkegel in zwei Ebenen zerfällt, so dass auch der aus dem Pol der Fläche dritten Grades umschriebene Kegel in zwei Kegel dritten Grades und ebenso die Berührungscurve in zwei ebene Curven dritten Grades zerfällt. Es gibt aber auch solche Pole, deren Polarkegel insbesondere Cylinder sind. Der Ort dieser Pole ist eine auf der Kernfläche liegende Raumcurve sechsten Grades, welche durch ihre 10 Knotenpunkte — die früher erwähnten 10 speciellen Pole — geht. Die Achse eines jeden Cylinders schneidet diese Raumcurve sechsten Grades in drei Punkten und durch jeden Punkt der Curve gehen je drei Achsen. Der gemeinschaftliche Ort aller Cylinderachsen ist eine geradlinige Fläche achten Grades, welche die Raumcurve des sechsten Grades zur dreifachen Linie hat, und in welcher namentlich auch die 10 Kanten (die 10 reciproken Geraden der 10 Pole) des Pentaeders der Kernfläche liegen. Diese Kernfläche schneidet die gegebene allgemeine Fläche dritten Grades längs einer Raumcurve zwölften Grades, welche durch die 54 Asymptotenpunkte der 27 Geraden der Fläche geht und diese Geraden zu Doppeltangenten hat. Diese Raumcurve zwölften Grades, längs welcher das Krümmungsmaß der gegebenen Fläche dritten Grades überall Null ist, trennt die Regionen dieser Fläche in solche mit positivem und negativem Krümmungsmaße; sie ist zugleich der geometrische Ort aller derjenigen Punkte auf der Fläche, in welchen die zugehörige Berührungsebene die Fläche mit Rückkehrpunkt schneidet, d. h. in einer solchen Curve dritten Grades schneidet, welche den Punkt zum Rückkehrpunkt hat, so dass die Rückkehrtangente der Curve dritten Grades die Fläche dritten Grades in diesem Punkte osculiert. Der Ort aller dieser Rückkehrtangenten ist eine abwickelbare Fläche dreißigsten Grades, welche die Fläche dritten Grades längs der Raumcurve zwölften Grades osculiert und die 27 Geraden der Fläche zu Doppellinien hat.

Eine beliebige Ebene schneidet eine Fläche dritten Grades in einer Curve dritten Grades; die der Fläche längs dieser Curve umschriebene abwickelbare Fläche ist vom zwölften Grad und von der sechsten Classe und ihre Rückkehrlinie (arête de rebroussement) vom achtzehnten Grad. Die zweite Polare irgend eines Poles in Bezug auf die gegebene Fläche dritten Grades ist eine Ebene. Bewegt sich der Pol in der festen Schnittebene, so ist die Enveloppe seiner Polarebene eine Fläche dritten Grades und wegen ihrer vier Knotenpunkte nur von vierter Classe, die jener abwickelbaren Fläche von der zwölften Classe eingeschrieben ist. Diese Enveloppe der Polarebene, eine Fläche dritten Grades und vierter Classe, ist der Kernfläche vierten Grades allemal eingeschrieben und berührt dieselbe längs einer Raumcurve sechsten Grades, in welcher auch ihre vier Knotenpunkte sich befinden, die jedesmal in der Kernfläche liegen; sie heißt die zweite Polare der ersten Schnittebene in Bezug auf die gegebene allgemeine Fläche dritten Grades. Dieselbe hat vor anderen Flächen zweiten Grades die merkwürdige besondere Eigenschaft, dass der aus irgend einem in ihr liegenden Punkte ihr umschriebene Kegel, der für andere Punkte vom sechsten Grade ist, in zwei Kegel zweiten Grades und in die zugehörige Berührungsebene zerfällt.

Bewegt sich der Pol in irgend einer festen Geraden, so ist die Enveloppe seiner Polarebene ein Kegel zweiten Grades, welcher die zweite Polare dieser Geraden in Bezug auf die gegebene allgemeine Fläche dritten Grades heißt. Es gibt im ganzen 100 solche besondere Gerade, deren zweite Polare sich auf eine Gerade, d. i. auf die Achse des Kegels reduciert. Den 100 Geraden entsprechen 25 solche Kegelachsen, die aus den 10 Kanten und den 15 Diagonalen des bereits erwähnten vollständigen Pentaeders der Kernfläche vierten Grades bestehen."

Berücksichtigt man, dass die höheren algebraischen Flächen rücksichtlich ihrer charakteristischen geometrischen Eigenschaften in Deutschland bis zum Jahre 1856 noch wenig erforscht waren, so kann man sich leicht den Eindruck denken, welchen die Steinerschen Sätze über die Flächen dritten Grades, von denen er gewiss einen Theil bloß mit seinem geradezu phänomenalen Vorstellungsvermögen entdeckt und hingezaubert hatte, auf die norddeutsche Gelehrten-Gesellschaft in Berlin gemacht hatten. Bekannt ist ja doch sein Ausspruch, dass stereometrische Betrachtungen nur dann richtig aufgefasst sind, wenn sie rein, ohne alle Versinnlichungsmittel, nur durch die innere Vorstellungskraft angeschaut werden. Und so bot sie der große deutsche Geometer den Gelehrten der Berliner Akademie der Wissenschaften dar. Sein Vortrag enthielt eine reiche Fülle von Sätzen über die Flächen der dritten Ordnung, freilich, wie dies bei dem berühmten Geometer zuletzt Sitte geworden war, ohne jeden Beweis oder nur mit spärlichen Andeutungen, wie zu denselben zu gelangen sei. Einer der hervorragendsten Analytiker Deutschlands, Herr Dr. O. Hesse, Professor an der Universität zu Heidelberg, spricht in seinem Nekrologe auf Steiner die begründete Vermuthung aus, dass die zweite Pause, welche Steiner in der Reihe seiner zahlreichen Veröffentlichungen hat eintreten lassen, durch den Kampf mit dem Imaginären in der Geometrie — diesem Gespenste in der Ebene und im Raume, wie es Steiner zu nennen liebte — veranlasst worden war. Vielleicht ist Steiner als Synthetiker siegreich aus diesem Kampfe hervorgegangen; irgendwie scheint er für sich wenigstens das Terrain auf diesem Gebiete sicher und gangbar gemacht zu haben, denn glänzende Entdeckungen sind ja jener zweiten Unterbrechung gefolgt, welche weit über die Grenzen hinausgehen, die seine Zeitgenossen sich gesteckt haben und von ihm der Nachwelt als schwer zu lösende Räthsel hinterlassen sind. Aber zu Tage ist es bis jetzt nicht gekommen, in welcher Weise er den Kampf ausgefochten hat. --

Dass sich Steiner in seinen langjährigen Untersuchungen über algebraische Flächen auch mit Flächen vierten, fünften und höheren Grades beschäftigt hatte und im Besitze von wertvollen Resultaten bezüglich der allgemeinen Flächen n-ten Grades war, ist zweifellos. Leider hat dieser genialste Geometer Deutschlands, der selbst seine ausgedehnten Untersuchungen über Curven dritten Grades nicht publicierte, als sie noch sämmtlich neu gewesen wären, bezüglich der Veröffentlichung seiner Forschungen über algebraische Flächen sich jene Zurückhaltung auferlegt, die uns bei großen Gelehrten nicht selten begegnet. So hat Steiner schon im Jahre 1836 — wie aus einem in seinen hinterlassenen Manuscripten vorgefundenen Quartblatte hervorgeht — sich mit der Construction der durch neun gegebene Punkte gehenden Fläche zweiten Grades beschäftigt und zwei verschiedene Constructionen dieser Fläche gefunden, ihre Veröffentlichung aber unterlassen, weil die zugehörigen Beweise nicht vollständig und einfach genug und die Constructionen selbst nicht linear waren. Steiner löste diese Aufgabe, mit der sich später auch Hesse[1]), Seydewitz[2]), Chasles[3]), Schröter[4]) u. A. beschäftigt haben, indem er mit Hilfe der Ebenen, welche durch je drei von den gegebenen neun Punkten gehen, neun

[1]) O. Hesse, Über die Constanten der Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen beliebige neun Punkte gegeben sind. Crelles Journal Bd. XXIV, S. 86. Berlin 1842.

[2]) Fr. Seydewitz, Construction und Classification der Flächen des zweiten Grades mittelst projectivischer Gebilde. Archiv der Math. „Phys. IX. Theil. S. 158 Greifswald 1847.

[3]) M. Chasles, Comptes rendus, Tom. XL, pag. 822 Paris 1855.

[4]) H. E. Schroeter, Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova. Borchardt Journal Bd. LXII, S. 215. Berlin 1863.

Kegelschnitte bestimmte, die auf der gesuchten Fläche liegen. Diese Lösung ergab zugleich die Construction einer Raumcurve vierten Grades, welche der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades ist und durch acht der gegebenen Punkte geht.[1])

Schon während seines Aufenthaltes in Rom im Jahre 1844 hatte sich Steiner mit einer Fläche vierter Ordnung beschäftigt, über die er aber nichts veröffentlichte, da er darüber im Zweifel war, ob diese Fläche vom vierten und nicht etwa vom sechsten Grade sei. Möglicherweise nämlich, meinte er, könne der Durchschnitt dieser Fläche mit jeder ihrer Tangentialebenen aus zwei reellen und einem beständig imaginär bleibenden Kegelschnitt bestehen, so dass die Fläche, wie sich Steiner ausdrückte, von einem „Gespenst" begleitet wäre. Dass er über diesen Punkt mit den ihm gewohnten Betrachtungsweisen nicht ins Klare zu kommen vermochte, verdross ihn so sehr, dass er lange Zeit sich nicht entschließen konnte, einem Analytiker die Sache zur Prüfung vorzulegen. Erst etwa ein Jahr vor seinem Tode sprach Steiner mit Prof. Weierstrass über diese Fläche, die er als seine „Römerfläche" bezeichnete und ersuchte diesen, was er gefunden, analytisch zu verificieren. Die Steinersche Construction der „Römerfläche" ist folgende: „Zieht man durch einen festen Punkt einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung irgend drei Gerade, welche drei conjugierten Durchmessern einer anderen Fläche zweiter Ordnung parallel sind, und legt durch die drei Punkte, in denen diese Geraden die erste Fläche außer dem Fixpunkte schneiden, eine Ebene, so geht dieselbe stets durch einen Punkt, dessen Lage durch die beiden

---

[1]) J. Steiner, Construction der durch neun gegebene Punkte gehenden Fläche zweiten Grades. Borchardts Journal Bd. LXVIII, S. 191—192, Berlin 1868 und Gesammelte Werke II. Bd. S. 717—720 Berlin 1882. (Nach hinterlassenen Manuscripten Steiners dargestellt von C. F. Geiser).

Anmerkung: Diese wichtige und interessante Aufgabe, die Flächen zweiten Grades aus 9 gegebenen Punkten zu construieren, wurde auch in neuerer Zeit von mehreren Mathematikern in Angriff genommen. Siehe und vergleiche diese Constructionen der Flächen des zweiten Grades aus 9 gegebenen Punkten von Sturm (Math. Annalen, Bd. I, S. 533, Leipzig 1869), H. Müllers Darstellung der analogen Construction von Chasles (1855) im I. Bde. der Math. Ann. S. 627; ferner jene von Dino (Rendiconti dell' Accademia delle scienze di Napoli 1879), R. Heger (Leipzig 1881), die rein lineare Construction von Beyel im 29. Bd. der Zeitschrift für Math. und Phys. S. 170, Leipzig 1884. (S. a. Fiedlers Darstellende Geometrie III. Aufl. II. Bd. S. 369, Leipzig 1885) und Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. II. Bd. S. 321 und 326. („Bestimmung einer Fläche zweiten Grades, durch neun Punkte"). Leipzig 1887. — S. a.: R. Niemtschick, „Über die Construction der einander eingeschriebenen Linien zweiter Ordnung." Wiener Sitzungs-Berichte 67—69. und 70. Bd. Jahrge. 1873—75.

Flächen und den auf der ersten angenommenen Punkt völlig bestimmt ist, und welcher der Pol der zweiten Fläche in Beziehung auf die erste Fläche und den auf ihr liegenden Punkt heißen möge. Der geometrische Ort des Poles ist dann eine Fläche vierter Ordnung, welche die charakteristische Eigenschaft besitzt, dass sie von jeder ihrer Tangentialebenen in einem Kegelschnittpaare geschnitten wird." [1])

Später hat Prof. Kummer in seiner Abhandlung „Über Flächen vierten Grades, auf welchen Scharen von Kegelschnitten liegen" [2]) die in Rede stehende merkwürdige Fläche ebenfalls entdeckt, und dieselbe — nach einer diesbezüglichen Mittheilung von Prof. Weierstrass — in der Sitzung der Berliner Akademie der Wissenschaften vom 16. Juli 1863 als Steinersche Fläche bezeichnet. Diese römische Fläche von Steiner hat später wiederholt die Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen, und zwar jene der Synthetiker wegen ihrer Eigenschaft, von jeder Tangentialebene in zwei Kegelschnitten geschnitten zu werden, und jene der Analytiker, weil sich die homogenen Coordinaten ihrer Punkte als ganze allgemeine ternäre quadratische Formen darstellen lassen. Wir erwähnen noch die synthetischen Abhandlungen von Cremona [3]), Schröter [4]), Sturm [5]) und Reye [6]) und die analytischen Abhandlungen von Cayley [7]), Beltrami [8]), Clebsch [9]),

---

[1]) S.: „Zwei specielle Flächen vierter Ordnung." Nach mündlichen Mittheilungen Steiners. Ges. Werke II. Bd. S. 721—724 und S. 741—742. Berlin 1882. — S. a. Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1863. S. 337.

[2]) S.: Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften Jahrg. 1863 und Borchardts Journal LXIV. Bd. S. 66 und 70. Berlin 1865.

[3]) L. Cremona, Sur la surface du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents. Borchardts Journal Bd. LXIII, 315—328. Berlin 1864. — Rappresentazione della superficie di Steiner etc. sopra un piano. Rendiconti del R. Istituto Lombardo. 1867.

[4]) H. E. Schröter, Über die Steinersche Fläche vierten Grades Monatsberichte der Berliner Akademie, Jahrg. 1863 und Borchardt Journal Bd. LXIV. S. 79, Berlin 1865.

[5]) R. Sturm, Über die römische Fläche von Steiner. Math. Annalen. III. Bd. S. 76—123. Leipzig 1871 und „Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung." S. 127—180. Leipzig 1867.

[6]) Th. Reye, Die Geometrie der Lage II. Bd. S. 246. — III. Aufl. 3. Abth. S. 140 (XVI. Vortrag) Leipzig 1892.

[7]) A. Cayley, Note sur la surface du quatrième ordre de Steiner. Borchardts Journal. Bd. LXIV. S. 172. Berlin 1865 und Proceedings of the London mathematical Society. Vol. V.

[8]) S.: Giornale di Mat. Tom. I, Napoli 1863 ed Bologna Mem. 1879.

[9]) A. Clebsch, Über die Steinersche Fläche. Borchardts Journ. Bd. LXVI., S. 1—22, Berlin 1867.

Eckardt[1]), Laguerre[2]) und Gerbaldi.[3]) — Bei einer im J. 1860 unternommenen Untersuchung über confocale Flächen zweiten Grades fand Steiner auch eine zweite Fläche vierten Grades, welche — wie Herr Prof. Weierstrass zeigte — durch Vermittlung eines Ellipsoides geometrisch ebenso construiert werden kann, wie die Fresnelsche Wellenfläche. Sie ist der geometrische Ort der Scheitel von Kegelflächen, welche eine Fläche zweiter Ordnung so berühren, dass sie von allen Ebenen, die zu einer von ihren Haupt-Diametralebenen parallel sind, nach gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden.[4])

Als Professor der Berliner Universität hielt Steiner seit dem Jahre 1835 in zwei Coursen Vorlesungen über synthetische Geometrie. Der erste Cours umfasste die „Eigenschaften der Kegelschnitte und einiger andern Curven, synthetisch und elementar entwickelt“ oder wie der vertrauliche Titel des diesen Vorlesungen zu Grunde liegenden und etwa 80 Seiten enthaltenden Manuscriptes lautete „Populäre Kegelschnitte.“ Der erste Abschnitt enthielt die Hauptsätze der Kreistheorie u. zw. die Potenz, Potenzlinie, den Potenzpunkt und die Ähnlichkeitspunkte; den Pascalschen Satz und die Sätze über harmonische Punkte und Strahlen, sowie über Pole und Polaren und schloss mit dem geometrischen Ort mit besonderer Rücksicht auf den gemeinsamen Ursprung der Kegelschnitte. Der zweite umfassendste Abschnitt untersuchte gesondert die Kegelschnitte, u. zw. die Ellipse, die Hyperbel und dann die Parabel; ihre Erzeugung durch Punkte und Tangenten, sowie ihre conjugierten Durchmesser und Achsen, die Eigenschaften ihrer Tangenten (Asymptoten), den Zusammenhang von zwei und mehr Tangenten; ihre verschiedenen Constructionen, Gleichungen und Quadraturen. Der dritte Abschnitt hatte die gemeinsame Behandlung der Kegelschnitte zum Gegenstande. In dem ersten Capitel dieses Abschnittes „Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte“ wurde die Construction der Kegelschnitte aus gegebenen Elementen, die Polarfigur des Kreises und der gerade Kreiskegel als Träger der Kegelschnitte behandelt. Das zweite (VII.) Capitel dieses Abschnittes beschäftigte sich mit dem Kegelschnitt als Projection des Kreises und zog, vom Kreis und Kegelschnitt im

---

[1]) F. E. Eckardt, Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere zur Theorie der Flächen 3 Grades mit vier Doppelpunkten und der Steinerschen Fläche. Math. Annalen. Bd. V. S. 30—49 Leipzig 1872.

[2]) S.: Nouvelles Annales de Math. IIe série. Tom. XIe et XII et Bulletin Soc. math. Tom. I.e

[3]) Gerbaldi, La superficie di Steiner studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche. Torino 1881.

[4]) S.: Steiners Gesammelte Werke II. Bd. S. 724 und 742. Berlin 1882.

geraden Kreiskegel ausgehend, die Sätze von Pascal und Brianchon in Betracht, welche vom Kreise sofort auf den Kegelschnitt projectivisch übertragen wurden. Nach einer eingehenden Besprechung der Polareigenschaften der Kegelschnitte schloss Steiner seine Vorträge über „Populäre Kegelschnitte" mit dem Kegelschnittbüschel und der Kegelschnittschar, deren allgemeine und besondere Sätze eine recht fesselnde Besprechung fanden. Wir erwähnen nur den schönen Satz: „Wenn die vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels ein convexes Viereck bilden, so dass keiner von ihnen in dem Dreiecke liegt, welches die drei anderen bestimmen, so ist der Mittelpunktskegelschnitt des Büschels eine Hyperbel, und es befinden sich sonach im Büschel zwei Parabeln, deren Mittelpunkte die unendlich entfernten Punkte dieser Hyperbel sind."

Der größte Reiz seiner Universitätsvorträge bestand darin, dass er aus der Lösung eines ganz elementaren Maximum- oder Minimumproblems die schönsten Lehrsätze, welche auf Kegelschnitte, namentlich deren Brennpunkte Bezug haben, fast spielend ableitete. Steiner sprach mit großer Freude über diese Methode, durch die einfachsten Betrachtungen zu weitgehenden Resultaten zu gelangen. In dieser Richtung konnte er sich nie genug thun, die Aufzeichnungen über die populären Kegelschnitte wurden von Jahr zu Jahr revidiert und vermehrt und auch einzelne Theile veröffentlicht.[1])

Steiners Manuscript „Populäre Kegelschnitte" bildet mit Ausschluss aller auf Curven höherer Grade bezüglichen Sätze, die sich zumeist auf die Untersuchung projectivischer Gebilde stützen, den Gegenstand des Lehrbuches „Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung", welches der Neffe des großen Gelehrten, Herr Dr. C. F. Geiser, Docent am schweizerischen Polytechnicum, bearbeitet und im Jahre 1867 bei B. G. Teubner in Leipzig veröffentlicht hat. Herr Professor Geiser war schon 1887 in der angenehmen Lage, von dem mit allgemeinem Beifalle aufgenommenen Werke (S. 199, bez. 208) die dritte Auflage veröffentlichen zu können. Der zweite Cours von Jakob Steiners Vorlesungen über die neueren Methoden der synthetischen Geometrie umfasste „Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften."

---

[1]) S.: „Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques" (Gergonne Annales de Math. Tome XIX, pag. 37—64, Ges. Werke I. Bd. S. 189—210). — Ferner die Abhandlungen in Crelles Journal Bd. XXXVII, S. 161 - 192 (Ges. Werke II. Bd. S. 389—420), Bd, XLV, S. 189—311 (II. B. S. 445 - 468), Borchardts Journal Bd. LV, S. 356—378 (II. Bd. 661—684) und LXVI. Bd. S. 237—266 (II. Bd. S. 687—716).

Dass es schon früh in Steiners Absicht gelegen hat, diesen auf die Kegelschnitte bezüglichen fünften Abschnitt seines großen Werkes vollständiger, als es im ersten Theile geschehen konnte, und abweichend von der dortigen Behandlung allein von den Grundprincipien aus darzustellen, zeigt die vollständig erhaltene Einleitung „Aufklärungs-Brochüre 1833 — 34“ zu einer nicht vollendeten Abhandlung. Dieses historisch interessante Schriftstück hat folgenden Wortlaut: „Über einige merkwürdige Lehren der neueren synthetischen Geometrie.“ „In dieser Abhandlung werde ich zunächst die Betrachtungen über projectivische Gerade und Strahlbüschel, welche im ersten Theile der von mir verfassten Schrift: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ enthalten sind, kurz wiederholen und sodann die naturgemäße Erzeugung der Kegelschnitte aus jenen Gebilden ableiten, sowie ferner den Ursprung verschiedener merkwürdiger Eigenschaften, wie z. B. der sogenannten Involution und der théorie des polaires reciproques etc. aus denselben nachweisen.“

„In der genannten Schrift wurden der alt-hergebrachten Weise zu Liebe die Kegelschnitte aus dem Kegel, der einen Kreis zur Basis hat, hergeleitet. Obwohl ich die Unzweckmäßigkeit dieses Verfahrens schon damals deutlich fühlte, so glaubte ich doch, um nicht zu sehr von dem gewöhnlichen Gange abzuweichen, demselben folgen zu müssen. Allein der Umstand, dass man gezwungen ist, die Umkehrung eines Satzes zu behaupten, der sich durch die Elementargeometrie nicht befriedigend beweisen lässt — nämlich des Satzes, dass jeder Kegel zweiten Grades von einer Ebene in einem Kreise geschnitten werden kann — zeigte die Nothwendigkeit, jene Darstellungsweise zu verlassen und eine dem Gegenstande angemessenere aufzufinden. Die hier folgende genügt dieser Forderung im höchsten Grade, indem sie die Erzeugung der Kegelschnitte durch projectivische Gerade und Strahlbüschel als eine unmittelbare, systematisch nothwendige offenbart und dieselbe rein synthetisch auf die möglichst einfache Weise bewerkstelligt. Ebenso wird das wahre Wesen der Involution und der théorie des polaires reciproques durch besondere Eigenschaften der genannten projectivischen Gebilde geoffenbart, indem ihre nothwendige Entstehung auf überraschende Weise aus diesen Eigenschaften sich nachweisen lässt und zugleich ihr inniger Zusammenhang sich kundgibt, was übrigens in der mehr erwähnten Schrift (§. 45) bereits angedeutet worden ist. Die Schwierigkeit, die hiebei in Rücksicht auf die Kegelschnitte zu überwinden war, bestand darin, zu beweisen, dass das durch zwei schiefliegende projectivische Gerade hervorgebrachte Erzeugnis identisch sei mit dem Erzeugnis zweier projectivischer Strahlbüschel, die sich in schiefer Lage befinden.

Diese Schwierigkeit ist jetzt nicht nur sehr leicht, sondern ich möchte sagen, sie ist auf die einfachste Weise behoben, nämlich durch consequentes Festhalten der geringsten Anzahl von Elementen, durch welche die Projectivität jener Gebilde bestimmt wird, und zwar durch diejenigen Elemente, welche sich sowohl in Hinsicht der Gebilde, als in Bezug auf den Kegelschnitt am bemerkbarsten machen. Dadurch können nun zugleich alle übrigen Lehren, welche den Gegenstand des ersten Theiles der genannten Schrift bilden, zweckmäßiger entwickelt werden, weil nunmehr die Betrachtungen in der Ebene sich bis zu ihrer Vollendung ausführen lassen, ohne dass es nöthig wird, den Büschel im Raume, der ihr entgegensteht, zu Hilfe zu nehmen. Die Eigenschaften des letzteren lassen sich dann umgekehrt leicht aus jenen der Ebene ableiten, was der natürlichere Gang ist. Der Kegel zweiten Grades erhält dabei eine allgemeinere Erklärung, die nicht mehr an seine besondere Eigenschaft, an seine Kreisschnitte geknüpft ist, und nicht allein die verschiedenen Eigenschaften aller seiner ebenen Schnitte, sondern auch die Eigenschaften, welche ihm im ganzen zukommen, seine zwei Erzeugungsarten durch projectivische Gebilde sind dann mit seiner Entstehung zugleich bekannt. Auch führt die gegenwärtige Erzeugungsweise der Kegelschnitte schneller und directer als jene frühere Betrachtungsweise in ihre innere Natur hinein und schliesst uns am unmittelbarsten den organischen Zusammenhang ihrer zahlreichen Eigenschaften und Geheimnisse auf. Ich bemerke hier noch, dass die Betrachtung projectivischer Geraden und Strahlbüschel sich so vereinfachen lässt, dass sie ohne Hilfe trigonometrischer Ausdrücke durchgeführt werden kann, wodurch sie geeignet wird, der Elementargeometrie einverleibt zu werden und darin manche zweckmäßige Verbesserung zu bewirken, indem zu ihrem trockenen Inhalt die belebenden Porismen, die Theorie der Transversalen und besonders die vollständige Lehre von den Kegelschnitten hinzutritt, dergestalt, dass alle diese Gegenstände sich ebenso leicht und einfach behandeln lassen, als nach der bisherigen Methode der Kreis. Dass in meiner mehrerwähnten Schrift trigonometrische Ausdrücke eingeführt worden, ist kein Irrthum oder Mangel in der Darstellung, wie man beim ersten Anblick leicht wähnen möchte, sondern die Entwickelungen der folgenden Theile bedürfen derselben, um zu der allseitig vollendeten Ausbildung zu gelangen, der sie fähig sind."

Von dieser versprochenen Abhandlung Steiners fanden sich in seinem Nachlasse nur Bruchstücke, welche vorzugsweise die Theorie der Involution (das Punkt- und Strahlsystem) behandeln, ferner den erwähnten Beweis von der Identität der beiden Erzeugnisse projectivischer

Strahlbüschel und einige Notizen über Involutions-Netze enthielten; ferner Untersuchungen über Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen, insbesondere über conjugierte Kegelschnittbüschel und harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte, manche schwer zu enträthselnde kurze Aufzeichnungen und viele Bemerkungen, die vermuthlich den Vorlesungen ihren Ursprung verdanken. Dieses kostbare Material genügte Herrn Dr. Heinrich Schröter, ord. Professor der Mathematik an der Universität zu Breslau (geb. 1829, gest. 1892), der das Glück hatte, im Wintersemester 1852—53 eine von Steiner unter dem Titel „Über die neueren Methoden der synthetischen Geometrie" angekündigte Universitätsvorlesung zu hören und zugleich durch persönlichen Verkehr mit dem großen Meister in den Ideengang seiner Schöpfungen eingeführt zu werden, um uns in dem ausgezeichneten und umfangreichen Werke (XX u. 566 S.) „Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften" (Leipzig 1867, II. Aufl. XVI u. 535 S. 1876) ein Muster moderner deutscher Forschung auf dem Gebiete der synthetischen Curventheorie zu bieten.

Das selbstverständlich ganz im Geiste der Steinerschen Universitätsvorträge an der Berliner Hochschule verfasste Werk behandelt im ersten Abschnitte (S. 1—80) die projectivische Beziehung gerader Punktreihen und ebener Strahlbüschel auf einander und widmet dem Punktsystem (Involution von Punktenpaaren, S. 50—61) und dem Strahlsystem (Involution von Strahlenpaaren, S. 62 — 66), sowie ihrem Vorkommen beim vollständigen Viereck und Vierseit (S. 66 — 75) eine gründliche Besprechung. Im zweiten Abschnitt (S. 81—223) wird der Kegelschnitt als Erzeugnis projectivischer Gebilde aufgefasst und untersucht, das „Hexagramum mysticum" (S. 128) mit Berücksichtigung der besonderen Fälle, welche sich aus dem Pascalschen und Brianchonschen Satze ergeben, auf projectiver Grundlage abgeleitet und nach Steiner erweitert (S. 131). Dieser Abschnitt schließt nach einer sorgfältigen Behandlung der Punkt- und Strahlsysteme beim Kegelschnitt (S. 138), ihrem Pol und ihrer Polaren (S. 145), sowie ihren Brennpunkten (S. 194), Polar- und Brennpunkts-Eigenschaften (S. 153 u. 203) mit der Bestimmung der Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte (S. 214). Der dritte Abschnitt ist dem Kegelschnittbüschel und der Kegelschnittschar gewidmet (S. 224 — 430). Von den drei mitgetheilten Entstehungsarten dieser Gebilde ist die erste (Steinersche, S. 224) die anschaulichste, erfordert aber die Realität der vier Mittelpunkte (Grundpunkte) des Büschels; bei der zweiten (S. 246) können auch zwei von diesen Punkten imaginär sein; die dritte (S. 252), welche die Kegelschnittbüschel vermittelst zweier Punktsysteme erzeugt, ist die allgemeinste und liefert auch das Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Mittelpunkten durch reelle Construction. Die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, von jeder Geraden in den Punktenpaaren eines Punktsystems getroffen zu werden, tritt bei allen drei Entstehungsarten unmittelbar hervor. Die Untersuchung der verschiedenen Arten von Kegelschnitten, welche in einem Büschel oder in einer Schar vorkommen und ihre Gruppenvertheilung lässt deutlich den Vorzug der synthetischen Methoden erkennen. In seinem weiteren Verlaufe behandelt dieser Abschnitt die Polareigenschaften des Kegelschnittbüschels (S. 311) und der Kegelschnittschar (S. 328), conjugierte Kegelschnittbüschel (S. 349) mit ihren besonderen Fällen; ferner gemischte Kegelschnittscharen (S. 374), die gemeinschaftlichen Punkte, Tangenten und das gemeinsame Tripel conjugierter Punkte und Strahlen für zwei beliebige Kegelschnitte (S. 386). Dieser Abschnitt schließt mit der Betrachtung harmonisch-zugeordneter Kegelschnitte, wo schon imaginäre Kegelschnitte auftreten.

Der vierte und letzte Abschnitt (S. 431—555) hat das Involutionsnetz (Polarsystem) zum Gegenstande und erweitert infolge des Auftretens imaginärer Kegelschnitte den Begriff der Polarfigur. Die Polareigenschaften eines Kegelschnittes werden unabhängig von derselben aufgefasst und liefern ein stets reelles Gebilde, das Involutionsnetz, welches, je nachdem es hyperbolisch oder elliptisch ist, einen reellen oder imaginären Kegelschnitt, ebenso wie das Punktsystem auf einer Geraden ein reelles Punktenpaar (Asymptotenpunkte) oder ein imaginäres vertritt. Nach den verschiedenen Bestimmungsarten des Netzes (S. 451) werden der Durchmesser, Mittelpunkt, conj. Durchmesser, Achsen, Brennpunkte, etc. der Netze betrachtet und ihre hervorragendsten Eigenschaften, wie für den reellen Kegelschnitt ermittelt (S. 470—497). Die Annahme zweier beliebigen gegebenen Netze in der Ebene führt zum Netz-Büschel und zur Netz-Schar (S. 497). Am Schlusse dieses Abschnittes wird das aus drei beliebig angenommenen Netzen oder Kegelschnitten gebildete Kegelschnitt-Netz und die Tripelcurve dritten Grades untersucht und so der Übergang zur Theorie der Curven des dritten Grades hergestellt (S. 533).

Was die Vorträge Steiners besonders interessant machte, war die originelle Ausdrucksweise, durch welche der behandelte Stoff in plastischer Weise sich gestaltete, so dass Figuren, namentlich räumliche, nicht gezeichnet werden mussten, sondern durch seine bloße Beschreibung vor Augen traten. Den Ausgangspunkt bildeten immer ganz elementare Dinge, die er in überraschender Weise von höheren Gesichtspunkten aus beleuchtete, so dass bei einigem Nachdenken die Zuhörer rasch in die allgemeineren Theorien eingeführt wurden und zwar nicht durch abstracte Behandlung trockener Lehrsätze, sondern immer an der Hand glücklich gewählter, anschaulicher und durchsichtiger Beispiele. Dabei war allerdings die Selbstthätigkeit des Lernenden unumgänglich nothwendig, ein bloßes Anhören und Nachschreiben genügte nicht. Dass dies auf die Frequenz seiner Vorlesungen nicht ohne Einfluss bleiben konnte, ist klar, und so haben die beiden Werke über die Theorie der Kegelschnitte, bearbeitet und veröffentlicht von Prof. Schröter, bezw. Prof. Geiser, nach Steiners Tode einen nachhaltigeren Erfolg erzielt, als seine mündlichen Vorträge, welche ein sehr fleißiges Mitarbeiten der Zuhörer erheischten. Bekannt sind ja die harten Nüsse (geom. Lehrsätze), die Steiner seinem Collegium vorzulegen pflegte und welche manche seiner Hörer mit Dampfmaschinen — wie der Meister sich auszudrücken pflegte — aufzuknacken sich bemühten.

Steiners Vorträge waren für die jungen Mathematiker ein vortreffliches Bildungsmittel, das namentlich Jacobi sehr hoch zu schätzen wusste, indem er den Studierenden den Rath gab, bevor sie zu ihm kämen, erst bei Steiner zu hören. Die Kraft seiner geometrischen Vorstellung hat der ganzen Persönlichkeit ein eigenes Gepräge auch über die wissenschaftliche und pädagogische Thätigkeit dieses berühmten deutschen Gelehrten hinausgegeben. In seinen eigenen Schriften konnte er nie genug thun, bis er überall den richtigen Ausdruck seiner Gedanken gefunden hatte, und so wurde jede seiner Abhandlungen zwei bis dreimal sorgfältig umgeschrieben, bevor sie veröffentlicht wurde.

Frankreich, dessen bahnbrechenden Forschungen Deutschlands größter Geometer in so ausgezeichneter Weise zu würdigen verstand, blieb Steiner die verdiente Anerkennung nicht schuldig. Fast einstimmig hatte ihn die Pariser Akademie der Wissenschaften, nachdem er „au premier rang et hors de ligne“ vorgeschlagen war, zu ihrem correspondierenden Mitgliede ernannt, und in den letzten Jahren seines Lebens stand er auf der Candidatenliste für die Stelle eines auswärtigen Mitgliedes derselben. So lange das Feuer der Jugend und die Kraft des besten Mannesalters ausreichten, lag in der unermüdlichen Thätigkeit der Hauptreiz von Steiners Leben und so lange war ihm auch die reine Freude an seinen Entdeckungen der höchste Genuss — an ihm hatte sich, wie selten an einem Andern die Wahrheit des Wortes bestätigt, dass das wirkliche Genie zugleich die intensivste Arbeit bedinge. Mit zunehmendem Alter wurde dies leider freilich anders.

Durch die außerordentlichen geistigen Anstrengungen wurde sein Organismus angegriffen, und während er früher das imaginäre Gespenst in der Ebene und im Raume mit Erfolg bekämpft hatte, musste er nun einen unglücklichen Kampf mit den reellen Gespenstern seiner eigenen

Organe aufnehmen. Der geniale Lehrer, der so manchen seiner hochbegabten Zöglinge, durch seine originelle Ausdrucksweise und durch sein plastisches und drastisches Darstellungsvermögen entzückt hatte, der wiederholt seine geistreichen Vorlesungen mit Begeisterung gehalten, musste später — wie aus seinen Aufzeichnungen vom Juni 1849 hervorgeht — jedesmal den scharfsinnigen Gang seiner Vorträge mit saurer Mühe wieder erst neu herstellen, was schon in dieser Zeit bei Abnahme an Eifer und Gedächtnis stets schwieriger wurde. Nur mit großer Anstrengung war es ihm möglich, die in einzelnen Perioden in günstigen Lichtmomenten vorgetragenen Sätze und Beweise wieder hervorzurufen, um den besten Gang der Betrachtung endlich festzustellen. Steiners Gesundheit und Arbeitsfähigkeit nahmen vom Ende der fünfziger Jahre an rasch ab und in gleichem Maße nahm auch seine Unverträglichkeit zu. Fast mit allen früheren Freunden kam er übereinander, und seine Stellung im Leben — wenn auch nicht in der Wissenschaft — litten darunter. Nur mit Mühe konnte er in den letzten Jahren seines Lebens seine Vorlesungen im Wintersemester aufnehmen und im Sommer schleppte er sich von Bad zu Bad. Der geniale Geometer, den ein unglückliches Geschick an seinem Lebensende immer mehr und mehr umstrickte und die Seele mit Unzufriedenheit und Mistrauen verdüstert hatte, starb auf einer solchen Erholungsreise am 1. April 1863 in Bern, seiner vielgeliebten Heimat.[1])

Seine herrlichen Sätze bleiben aber noch durch Jahrzehnte für die Geometer ein zu erstrebendes Ziel, für die Analytiker ein Wegweiser zur Bildung und Erforschung von Functionen, die in der höheren Algebra von großer Bedeutung sind. Steiners Wirken steht mit der synthetischen Geometrie in unauflöslicher Verbindung. Seine geradezu ideale Hingebung an diesen exacten Wissenszweig hat er noch in einer letztwilligen Verordnung bekundet, welche durch Stiftung eines Preises für synthetische Geometrie die Kräfte der Mathematiker auf diesen Zweig der Wissenschaft bereits gelenkt hat und auch in Zukunft noch lenken wird.[2])

Nur wenige Jünger der Wissenschaft schienen bis zu diesem Zeitpunkte auserwählt gewesen zu sein, um die edle Saat, welche der geniale Schweizer auf norddeutschem Boden gepflanzt, weiter zu pflegen,

[1]) S.: „Jakob Steiner" von Dr. Otto Hesse. Crelle-Borchardts Journal Bd. LXII, S. 199. Berlin 1863 — Dr. C. F. Geiser, „Zur Erinnerung an Jakob Steiner." Schaffhausen 1874. — M. Cantor, „Jakob Steiner," Allgemeine Deutsche Biographie auf Veranlassung des Königs von Baiern herausgegeben durch die historische Commission bei der königl. Akademie der Wissenschaften. XXXV. Bd. S. 700. Leipzig 1893.

[2]) Das der Berliner Akademie gewidmete Legat betrug 8.000 Thaler.

das Steinersche System der synthetischen Geometrie auf dem Continente weiter zu verbreiten und ihren Ausbau auf modernen Grundlagen weiterzuführen. Noch im J. 1866 konnte Herr Professor Dr. Th. Reye seinen außerordentlichen Vorlesungen über „Die Geometrie der Lage" am Polytechnicum in Zürich mit den Worten eröffnen: „Die Mehrzahl von Ihnen, meine Herren, wird bis jetzt von der Geometrie der Lage kaum mehr als den Namen gehört haben. Denn leider ist die Kenntnis dieser bedeutsamen, durch Fülle des Inhaltes, Schönheit der Form und Einfachheit der Entwickelungen ausgezeichneten Schöpfung der neuesten Zeit noch sehr wenig verbreitet; und obgleich die neuere Geometrie zu den anregendsten Zweigen der mathematischen Wissenschaften zu rechnen ist und viele schöne Anwendungen auf die technischen und die Naturwissenschaften zulässt, so ist es ihr doch noch nicht gelungen, in den Schulen allgemein Eingang zu finden."

Heute nehmen Steiners Forschungen auf dem Gebiete der Geometrie der Lage und über die projectivischen Beziehungen der Raumgebilde schon die ihnen gebührenden Ehrenplätze in jedem Lehrbuche über höhere und neuere darstellende Geometrie ein.

Ein annäherndes Bild von einem Theile der Intentionen, die dem großen Geometer vorgeschwebt haben mögen, geben uns die schönen Abhandlungen, welche der Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt, Fr. Seydewitz (geb. 1807, gest. 1852) seit dem Jahre 1843 in Grunerts Archiv der Mathematik und Physik veröffentlicht hat. Es sind dies folgende Abhandlungen: „Neue Untersuchungen über die Bestimmung einer gleichseitigen Hyperbel vermittelst vier gegebenen Bedingungen." (Archiv d. Math. u. Phys. III. Th., S. 225--235, Greifswald 1843). — „Rein geom. Behandlung von vorgelegten geodätischen Aufgaben." (Ibid. S. 383—385). — „Theorie der involutorischen Gebilde nebst Anwendungen auf die Kegelschnitte" (Ibid. Th. IV, S. 246—280, 1844). — „Über eine wesentliche Verallgemeinerung des Problems von den den Kegelschnitten ein- oder umschriebenen Polygonen" (IV. Th., S. 421—430). — „Sätze von den Kegelschnitten, welche zu beweisen sind" (V. Th., S. 221—223, 1844). — „Nachtrag zu den Kegelschnitten" (V. Th., S. 331—334). — „Auflösung der Aufgabe in ein gegebenes Viereck ein Quadrat zu beschreiben" (VI. Th., S. 178—186, 1845). — „Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittelst projectivischer Gebilde, mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der höheren Curven" (VII. Th., S. 113—148, 1846). — Die geometrischen Verwandtschaften mittelst projectivischer Gebilde fanden auch in der folgenden Abhandlung (VIII. Th., S. 1—45, 1846) eine ausführliche Darstellung. Die beiden nächsten Aufsätze hatten einige Eigenschaften des Punktes der kleinsten

Entfernung (VIII. Th., S. 174 — 193) und zu lösende Aufgaben (VIII, S. 213) zum Gegenstande. Eine sehr günstige Aufnahme fanden die „Construction und Classification der Flächen zweiten Grades mittelst projectivischer Gebilde“ (IX. Th., S. 158—214, 1847) und besonders wertvoll für die darstellende Geometrie waren die Abhandlungen „Über eine Classe geometrischer Sätze, deren Beweise auf keinen Größenbestimmungen beruhen, nebst einer elementaren Construction des Mittelpunktes des einfachen Hyperboloides“ (X. Th., S. 59—68, 1847) und „Über den geometrischen Ort des Scheitels eines Kegels zweiten Grades, welcher die Seiten eines windschiefen Sechseckes berührt“ (X. Th., S. 202—218). Die für die Curven dritter Ordnung eingeführten Benennungen gab Seydewitz in der lesenswerten Abhandlung „Lineare Construction einer Curve doppelter Krümmung“ (X. Th., S. 203—214, 1847). Auf Steiners Anregung dürften auch die folgenden drei Abhandlungen entstanden sein: „Neue Bestimmung der größten Ellipse, welche die vier Seiten eines gegebenen Viereckes berührt“ (XII. Th., S. 44—52, 1849), „De ellipsi minima dato quadrangulo circumscripta“ (XIII. Th., S. 54—67) und „Über die größte und die kleinste Ellipse, welche durch zwei gegebene Punkte geht und zwei gegebene Gerade berührt“ (XIV. Th., S. 364—381, 1850). Ebenso erinnert an Steiner die schöne Abhandlung „Leichtfassliche Construction einer Fläche zweiten Grades, von welcher neun Punkte beliebig gegeben sind“ (XXVII. Th., S. 275 — 297, Greifswald 1856). Die Probleme über involutorische Büschel und Reihen fanden in der besonders von den darstellenden Geometern geschätzten Abhandlung von Seydewitz „Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene als gemeinschaftliches Princip individueller Eigenschaften der Figuren“ (Heiligenstadt 1846) die einfachsten, dem Steinerschen System der Geometrie ganz entsprechenden Lösungen.[1])

In gleichem Sinne wirkte Chr. Paulus, Lehrer der Mathematik an der Erziehungsanstalt zu Ludwigsburg, mit seinem Werke „Grundlinien der neuen ebenen Geometrie, Stuttgart 1853“, in welchem er statt des Steinerschen Ausdruckes „gerades Gebilde“ (Gerade) den Namen „Punktreihe“ einführte. In seiner Schrift „Zeichnende Geometrie, Stuttgart 1866“, welche als eine elementare Behandlung der Constructionen in der Ebene zu betrachten ist, sprach er sich dahin aus, dass die Symmetrien ebener Systeme besondere Fälle ihrer Involutionen sind. Von seinen Abhandlungen erwähnen wir die „Ordnungs-Elemente der

---

[1]) S. a.: P. Zech, Die höhere Geometrie in ihrer Anwendung auf Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung. Stuttgart 1857 und B. Witzschel, Grundlinien der neueren Geometrie, Leipzig 1858.

einförmigen involutorischen Grundgebilde" (Archiv d. Math. u. Phys. XXI. Th., S. 175—189, Greifswald 1853), „Über uneigentliche Punkte und Tangenten der Kegelschnitte" (Ibid. Th. XXII, S. 121 — 138, 1854) und „Ein Beitrag zum geometrischen Zeichnen" (Ibid. Th. XXIII, S. 364—384, 1854).

Einen hervorragenden directen Einfluss auf die Neugestaltung der darstellenden Geometrie auf projectiver Grundlage nahm der belgische Mathematiker J. B. Brasseur (geb. 1802, gest. 1868), Professor der Universität Lüttich, in seinen Abhandlungen. Der geistige Ausgangspunkt seiner wertvollen Untersuchungen waren die Forschungen von Poncelet, Chasles und Steiner. Sein „Programm du cours de géométrie descriptive, Liège 1837" erschien im Jahre 1850 in Lüttich in der zweiten Auflage. Im Jahre 1843 veröffentlichte Brasseur in den Mémoires de l'Académie des sciences de Liège (Tom I.) die Abhandlung „Sur la double génération des surfaces du second degré par le mouvement d'un cercle" und 1851 erschien im Bulletin de l'Académie de Bruxelles (Tom. XVIII.) sein Memoire „Sur quelques propriétés des surfaces gauches du second degré." Von besonderem Interesse ist sein „Mémoire sur divers lieux géométriques du second degré, determinés par la géométrie descriptive (Mémoires cour. de l'Acad. de Bruxelles. Tom. XXI, 1847), in welchem er die diesbezüglichen Untersuchungen von Dandelin (Mém. de l'Acad. de Paris) und Olivier (Developp. de géom. descr.) weiter ausführte. Einen ehrenvollen Platz in der Geschichte der darstellenden Geometrie besitzt Brasseurs umfangreiches, 148 Seiten umfassendes „Mémoire sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue", dessen Inhalt er am 2. December 1853 der Akademie der Wissenschaften zu Brüssel mittheilte und welches in den Mémoires vom J. 1855 veröffentlicht ist. In dieser wertvollen Abhandlung hat Brasseur zuerst die Achse der Affinität zwischen den beiden orthogonalen Projectionen desselben ebenen Systemes eingeführt. Hier finden wir auf S. 134 neben verschiedenen mit Chasles und Steiners Forschungen im innigsten Zusammenhange stehenden Untersuchungen über Linien und Flächen zweiter Ordnung auch die schöne Aufgabe „Construire les génératrices communes à deux hyperboloides à une nappe qui ont deux directrices communs."

Der bedeutendste deutsche Forscher auf dem Gebiete der neueren synthetischen Geometrie war nach Steiner der Professor der Mathematik an der Universität zu Erlangen, Dr. Georg Karl Christian von Staudt (geb. 1798, gest. 1867). Dieser berühmte Gelehrte hat die Geometrie der Lage zu einer selbständigen Wissenschaft gemacht, welche des Messens nicht bedarf und so diesen Wissenszweig der Geometrie von der Geometrie des Maßes für immer getrennt. Bis zu diesem Zeitpunkte hat man Sätze, in welchen von keiner Größe die Rede ist, durch Verhältnisse bewiesen. Um jedoch diejenigen Eigenschaften der Curven und Flächen zweiter Ordnung, welche auf Mittelpunkte, Achsen, Brennpunkte u. s. w. sich beziehen, nicht ganz unberücksichtigt zu lassen, hat von Staudt in seiner „Geometrie der Lage, Nürnberg 1847" das Wesentlichste hievon in einen Anhang aufgenommen. Mit Recht wies von Staudt darauf hin, dass jeder geometrische Unterricht von allgemeinen Betrachtungen ausgehen müsse, welche den Studierenden mit den verschiedenen Arten von geometrischen Gebilden bekannt macht und sein Anschauungsvermögen übt. Die früheren Lehrbücher der Geometrie giengen bald zum Besonderen, nämlich zur Congruenz und Ähnlichkeit über und stellten manche Begriffe nicht in der gehörigen Allgemeinheit auf. Der in der Natur und Kunst so wichtige Begriff der Symmetrie wurde gar nicht entwickelt. Ähnliche ebene Figuren sind nichts anderes als homologe Stücke von ähnlichen und ebenen Systemen, ähnliche Körper aber homologe Stücke von ähnlichen räumlichen Systemen. Der Betrachtung von centrischen Figuren sollte stets die des centrischen ebenen Systems und der Betrachtung von symmetrischen Figuren die des symmetrischen ebenen Systems vorangeschickt werden.

Durch die Aufsuchung reciproker Sätze wird die Thätigkeit, geometrische Gebilde zur Anschauung zu bringen, besonders beim Anfänger wesentlich gefördert. Dieses Gesetz der Reciprocität ist aber in den für Geometrie empfänglichen Schüler ein sehr anregendes. Es ist zweckmäßig, der „Geometrie des Maßes" das Wesentlichste aus der „Geometrie der Lage" vorauszuschicken, weil der Schüler gleich anfangs über die Wissenschaft einen Überblick gewinnt, ohne welchen das rechte Verständnis der Sätze und ihrer Beziehungen zum Ganzen nicht wohl möglich ist."

Um das Vorstellungsvermögen des Lernenden zu üben und auszubilden, schließt von Staudt alle mehr oder minder complicierten Rechnungen aus und — von der Steinerschen Ansicht geleitet, „dass stereometrische Betrachtungen nur dann richtig aufgefasst seien, wenn sie rein, ohne alle Versinnlichungsmittel, nur durch die innere Vorstellungskraft angeschaut werden" — vermeidet er consequent die Benützung von Figuren. Der Lehrstoff seiner „Geometrie der Lage" ist sehr schön und systematisch geordnet. So werden z. B. die Lehren von der Projectivität (S. 49—72), von der collinearen und reciproken Verwandtschaft (S. 72—118) und von den involutorischen Gebilden (S. 118—137) vollständig abgehandelt, ehe zur Theorie der Kegelschnitte (S. 137) und der Flächen der zweiten Ordnung geschritten wird. Ihre

Eigenschaften werden — freilich in etwas zu abstracter Darstellung — mit einem Schlage bewiesen. Von Staudt gründete die Theorie der Kegelschnitte und Gebilde zweiter Ordnung auf die Lehre von der Collineation und der Reciprocität — ein Vorgang, den später Herr Dr. Theodor Reye, Professor der Mathematik an der Universität zu Strassburg, in seinem Werke „Die Geometrie der Lage" (Hannover 1866—68, III. Aufl., Leipzig 1886—92) aus didaktischen Gründen nicht befolgte. Es werden nach Begründung der Theorie der Involutionen (S. 118), der involutorischen Systeme (S. 125) und der Polarsysteme in der Ebene und im Strahlenbündel (S. 131), die Curven und Kegelflächen zweiter Ordnung (S. 137) behandelt, die projectiven Beziehungen zwischen Curven zweiter Ordnung entwickelt (S. 149) und die Anzahl ihrer gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten (S. 165) bestimmt. Die Curventheorie schließt mit einer allgemeinen Betrachtung der Linien zweiter Ordnung (S. 172) und entsprechenden Aufgaben vom zweiten Grade (S. 178).

Dem Polarsysteme im Raume (S. 197) folgt die Theorie der Flächen zweiter Ordnung (S. 203 — 216). Ihre Grundlage bildet die Lehre von der Collineation und der Reciprocität. Während Seydewitz (S. Archiv der Math. u. Phys. IX. Th., S. 158, Greifswald 1847) die Flächen zweiter Ordnung unmittelbar als Erzeugnisse reciproker Strahlenbündel auffasste, definierte sie von Staudt als Ordnungsflächen räumlicher Systeme. Auch hier wich Herr Prof. Dr. Th. Reye in seinen Vorträgen über „Die Geometrie der Lage" am eidgenössischen Polytechnicum in Zürich (1866) von der Staudtschen Definition ab und schloss sich der dem Vorstellungsvermögen leichter zugänglichen Erzeugungsweise von Seydewitz an. Auch Dr. Reye bediente sich in seinem beliebten Werke „Die Geometrie der Lage" (I. Abth., III. Aufl., Leipzig 1886) vom fünften bis zum zehnten Vortrag über Kegelschnitte (S. 50—117) jener Hilfsmittel, welche Steiner in seinem höchst anregenden und bahnbrechenden Werke „Systematische Entwickelung etc." geschaffen, ohne jedoch gleich Steiner die Kegelschnitte mittelst des Kreises zu definieren. Um das Verständnis der projectiven Verwandtschaft zu erleichtern, führte er die Gebilde zweiter Ordnung gleich bei der Untersuchung der projectiven einförmigen Grundgebilde ein.

Durch sein Werk „Geometrie der Lage" hat von Staudt die darstellende Geometrie mit der Geometrie der Lage in eine noch innigere organische Verbindung gebracht, als dies vorher möglich war. Insbesondere waren es die harmonischen Gebilde (S. 43—49), die projectivischen Reihen und Büschel, sowie ihre linearen Constructionen in allgemeiner Lage (S. 49 — 72), die allgemeine Bestimmung und Construction der Projectivität ebener Systeme, die involutorische Collineation räumlicher Systeme und ihre Bestimmung (S. 128—131); ferner die Lehre von den Flächen zweiter Ordnung als Involutionsgestalten, welche durch die Forschungen von Staudt der darstellenden Geometrie als Wissenschaft ein modernes Gewand verliehen.

Aber noch inniger wurde die organische Verbindung zwischen der darstellenden Geometrie und der Geometrie der Lage durch seine „Beiträge zur Geometrie der Lage", welche in den Jahren 1856, 1857 und 1860 in Nürnberg erschienen. Hier war es dem gelehrten Professor der Universität zu Erlangen vollständig gelungen, das „Imaginäre", welches als „Gespenst" dem genialen Steiner oft so böse Stunden bereitet hatte, ganz in den Dienst der synthetischen Geometrie zu stellen.

Indem die Mathematik danach strebte, Ausnahmen von Regeln zu beseitigen und verschiedene Sätze von einem Gesichtspunkte aufzufassen, war sie häufig genöthigt, Begriffe zu erweitern oder neue Begriffe aufzustellen, was beinahe immer einen Fortschritt in der Wissenschaft bezeichnet. Dahin gehört namentlich die Einführung von imaginären Größen in der Analysis und die Einführung von imaginären Elementen in der Geometrie. Dass eine Ellipse oder Hyperbel durch ihre Brennpunkte und eine Tangente bestimmt ist, war schon den älteren Geometern bekannt. Dass aber diese Curve aus dem Grunde bestimmt ist, weil von ihr eigentlich fünf Tangenten gegeben sind, und dass also der erwähnte Satz nur ein besonderer Fall von einem allgemeinen Satze ist, ergab sich erst aus der Betrachtung der imaginären Elemente.

In seiner im J. 1847 erschienenen „Geometrie der Lage" konnte aber von Staudt in die Lehre von den imaginären Elementen noch nicht tiefer eingehen, weil es ihm bis dahin nicht gelungen war, zwei einander conjugierte imaginäre Elemente von einander zu unterscheiden. Ihre Theorie gab uns von Staudt in den Artikeln „Imaginäre Elemente" (§. 7, S. 76—86), „Von der Menge der Elemente" (§. 8, S. 86—91), „Homologe imaginäre Elemente in Grundgebilden, welche reell-projectivisch zu einander sind" (§. 10, S. 94—106), „Imaginäre Elemente in reellen Elementargebilden" (§. 12, S. 114—119) und „Vom Sinne" (§. 14, S. 131—137) des ersten und zweiten Heftes seiner „Beiträge zur Geometrie der Lage", welche in den beiden Jahren 1856 und 1857 in Nürnberg erschienen sind. Durch die Staudtsche Theorie der imaginären Elemente wurde das Gebiet der Geometrie um ein bedeutendes erweitert und zugleich die Übersicht über die Sätze erleichtert. So sind mit Rücksicht auf diese Theorie selbst bei dem Satze, dass durch zwei Punkte eine Gerade bestimmt ist, sechs Fälle zu betrachten. Man nannte bisher in der analytischen Geometrie einen Punkt imaginär, wenn seine Coordinaten nicht sämmtlich reell waren.

Dies scheint einfach zu sein, da nur die Sprache der Algebra auf die Geometrie übertragen wurde, wird aber sofort unklar, wenn man sich sowohl den reellen als auch den imaginären Punkt als etwas vom Coordinatensystem Unabhängiges denkt, und wo ist der imaginäre Punkt, wenn man — wie es in der synthetischen Geometrie der Fall ist — vom Coordinatensystem abstrahiert? So entbehrte bis zur Begründung der Theorie der imaginären Elemente durch Staudt die Geometrie jene Evidenz, welche man sonst an ihr rühmt, und die man von ihr mit Recht verlangen muss.

Es ist leicht erklärlich, dass gerade dieses Gebiet der von Staudtschen Forschungen nicht rasch in die moderne descriptive Geometrie Eingang finden konnte. So vermissen wir die geometrische Theorie der imaginären Elemente noch in dem vorzüglichen Werke „Die darstellende Geometrie, Leipzig 1871" von Herrn Prof. Dr. Wilh. Fiedler. Die gebührende Aufmerksamkeit erfuhr diese Theorie erst in den Abhandlungen der Herren Prof. Sophus Lie[1]) und Prof. O. Stolz[2]), dann in den „Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie" von F. August (Programm der Friedrichs-Realschule in Berlin, 1872) und in Lüroths Abhandlung „Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen" (Math. Annalen Bd. VIII, S. 145—214, Leipzig 1875). Seit dem letztgenannten Jahre (1875) nimmt die von Staudtsche geometrische Theorie der imaginären Elemente in jedem modernen, auf streng wissenschaftlicher Basis aufgebauten Werke über darstellende und projective Geometrie den ihr gebührenden Platz ein.[3])

Am Schlusse des ersten Heftes, welches uns die Theorie der imaginären Elemente in ausführlicher Behandlung vorführt, untersuchte

---

[1]) Sophus Lie, Über eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie. Borchardts Journal, Bd. LXV, S. 346. Berlin 1869.

[2]) „Dr. O. Stolz, Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie." Math. Ann. IV. Bd. S. 416. Leipzig 1871. S. a.: F. Hofmann, Die Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken. Leipzig 1886. — Ch. Beyel, Zur Geometrie des Imaginären. Zürich 1886 — C. Hossfeld, Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, von denen acht imaginär sind. Zeitschrift für Math. und Phys. XXXIII. Jahrg. S. 187. Leipzig 1888.

[3]) S.: Dr. Wilhelm Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. II. Aufl. S. 508—520, etc. Leipzig 1875 (II. Aufl. III. Theil „Die construierende und analytische Geometrie der Lage §§. 9—13, S. 39, etc. Leipzig 1888). — Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geometrie. I. Band „Involution; imaginäre Elemente" S. 239, „Construction eines Kegelschnittes aus imaginären Elementen" S. 279, „Conjugierte Kegelschnitte und Imaginärprojection." S. 315, „Verlauf der reellen und der imaginären Curven" S. 329, „Imaginäre Projection zweier Büschel" S. 382, etc. Leipzig 1844 und II. Band „Conjugierte Flächen zweiten Grades und die Imaginärprojection im Raume. S. 89, etc. Leipzig 1887.

von Staudt die gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier Curven zweiter Ordnung (§. 13, S. 116–126).

Das zweite Heft (Nürnberg 1857) seiner „Beiträge zur Geometrie der Lage" handelt vom Sinne und von den Ketten (§. §. 14. und 15, S. 131 — 142), untersucht die projectivische Verwandtschaft zwischen einförmigen Gebilden, Systemen und Elementargebilden (§. §. 16 — 18, S. 142 — 166) und die Summen, Producte und Potenzen von Würfen (§. §. 19—21, S. 166—182). Im weiteren Verlaufe untersucht der Verfasser die gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier Curven zweiter Ordnung (S. 182), die Linien und Strahlbüschel (S. 194) und die einfachen Systeme von Gebilden zweiter Ordnung (S. 208), sowie die Curven zweiter Ordnung, welche sich in zwei Punkten berühren (S. 235). Nach einigen Sätzen über Curven zweiter Ordnung und nach den Werten der neutralen Würfe (S. 256) übergeht von Staudt auf die complexen Zahlen (S. 259) und die Abscissen (S. 261) und schließt mit den besonderen Fällen von allgemeinen Sätzen (S. 267—280) und der Bestimmung der Krümmungshalbmesser für Curven zweiter Ordnung (S. 280—283), als zur Geometrie des Maßes gehörigen Abschnitt.

Das dritte Heft (Nürnberg 1860) von Staudts „Beiträge zur Geometrie der Lage" ist vorzugsweise den Flächen zweiter Ordnung gewidmet, mit deren Betrachtung aber die Betrachtung der Raumcurven dritter und vierter Ordnung im innigsten Zusammenhange steht. Die unebenen Curven dritter Ordnung sind in vieler Hinsicht für den Raum, was die Curven zweiter Ordnung für die Ebene sind. Gleichwie nämlich jede Curve zweiter Ordnung zu dem ihr sich anschmiegenden Strahlenbüschel projectivisch ist, so ist jede unebene Curve dritter Ordnung zu dem sich ihr anschmiegenden Ebenenbüschel projectivisch.

Unter einer Regelfläche ist auch in diesem Hefte eine Fläche mit zwei, sei es nun reellen oder imaginären Regelscharen zu verstehen. Ist in dem durch die Fläche bestimmten Polarsysteme jeder reelle Punkt einer reellen Ebene, aber keine reelle Gerade sich selbst zugeordnet, so sind alle in der Fläche liegenden Curven dritter Ordnung imaginär. Die Vertheilung des Lehrstoffes ist folgende: „Flächen zweiter Ordnung (§. 32, S. 285), Unebene Linien dritter Ordnung (S. 298), Elementargebilde dritter und vierter Ordnung (S. 311), Räumliche Systeme, welche collinear zu einander sind (S. 328). Den einfachen Systemen von Flächen zweiter Ordnung (S. 333) folgen verschiedene Arten von einfachen Flächensystemen und die Linien der IV. Ordnung (S. 346, bezw. S. 352). Hierauf werden die projectivischen Beziehungen, welche aus der Betrachtung von einfachen Flächensystemen sich ergeben, untersucht und Flächen zweiter Ordnung durch gegebene (9) Punkte bestimmt

(S. 362—380). Auf S. 377 finden wir das Nullsystem und in der Folge noch einige Sätze über Raumcurven dritter Ordnung (S. 380 — 382). Mit den der Geometrie des Maßes angehörenden Untersuchungen über die Krümmungen der Ellipse und Hyperbel (S. 386), des Ellipsoides und elliptischen Paraboloides (S. 395) schließt von Staudt das dritte Heft seiner „Beiträge zur Geometrie der Lage."

Mit diesen „Beiträgen zur Geometrie der Lage" hat von Staudt den Ausbau der darstellenden Geometrie auf neugeometrischen Grundlagen wesentlich gefördert, insbesondere in der Theorie der Durchdringungscurven von zwei Flächen zweiten Grades durch seine wertvollen Untersuchungen über Raumcurven vierter und dritter Ordnung und ihre Symmetrieverhältnisse, sowie bezüglich der Frage der Realität der Punkte mit stationären Ebenen bei Raumcurven vierter Ordnung erster Art; ferner über die Nichtregelflächen zweiter Ordnung als Involutionsgestalten und durch die Erforschung ihrer einfachen Systeme. Ihm verdanken wir die schönen Sätze über involutorische Systeme und die scharfsinnigen Untersuchungen über die beiden Arten der involutorischen Collineation im Raume. Es ist eines der großen Verdienste von Staudts, die Theorie der imaginären Elemente rein geometrisch begründet und sie zu einem hohen Grade der Vollkommenheit gebracht zu haben. Selbstverständlich liegt es in der Natur der Sache, dass diese Theorie in der synthetischen wie in der analytischen Geometrie auf die Anschaulichkeit verzichten muss; deshalb beschränkte sich manches treffliche Werk über neuere Geometrie, wie z. B. Dr. Theodor Reyes „Die Geometrie der Lage, III. Auflage, Leipzig 1886 und 1892" trotz weitgehendster Behandlung des reellen Stoffes nur auf die Anfangsgründe der Theorie des geometrisch Imaginären.

Einen großen Einfluss auf die weitere Entwickelung der synthetischen Theorie der Curven und der Oberflächen und den mit ihnen zusammenhängenden Ausbau der darstellenden Geometrie auf neugeometrischen Grundlagen übten die berühmten Forschungen aus, welche wir besonders britischen Mathematikern auf den beiden Gebieten der analytischen und der vor etwa fünfzig Jahren begründeten algebraischen Geometrie verdanken.

In den Vordergrund unserer historischen Betrachtung treten die bahnbrechenden Forschungen von George Salmon, Arthur Cayley und J. Sylvester. Ihre berühmten Werke und Abhandlungen kamen auf dem ganzen Continente zur Geltung. Im Jahre 1848 veröffentlichte George Salmon, Professor der Mathematik an der Universität in Dublin, sein berühmtes Werk „A Treatise on conic sections", von welchem im Jahre 1879 bereits die vierte Auflage erschienen ist. Von diesem an eleganten Methoden und interessanten Resultaten reichen Werke gab bekanntlich Herr Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnicum in Zürich, die frei bearbeitete deutsche Übersetzung „Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden" schon im Jahre 1887 bei G. B. Teubner in Leipzig die fünfte Auflage heraus. Sein Werk „A Treatise on the higher plane curves, Dublin 1852" III^{e} éd. 1879), dessen deutsche Bearbeitung „Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven" Herr Prof. Dr. W. Fiedler im Jahre 1882 in zweiter Auflage herausgab, brachte den Mathematikern eine erwünschte Übersicht über die modernen Forschungen auf dem Gebiete der höheren Curventheorie. Eine Fülle von interessanten Resultaten und historischen Daten brachte uns G. Salmons Werk „Geometry of three dimensions, Dublin 1862" (IV^{e} edit. 1882), dessen deutsche Bearbeitung „Analytische Geometrie des Raumes", Leipzig 1863—65 (III. Aufl. 1879—80) von Dr. Wilhelm Fiedler in Deutschland rasche Verbreitung fand. Hier finden wir eine ausführliche Theorie der Flächen des zweiten Grades, die Methoden der abgekürzten Bezeichnung, die Lehre von den Invarianten und Covarianten der Systeme zweiten Grades, sowie eine eingehende Behandlung der algebraischen Curven dritter, vierter und fünfter Ordnung, welche die Grundlage für die folgende Theorie der algebraischen Flächen der dritten und vierten Ordnung bildet. Selbstverständlich blieb die Theorie der Complexe, der Complex- und Singularitäten-Flächen, sowie die Theorie der Abbildungen, Transformationen und der Correspondenzen nicht unberücksichtigt. Besonders in den erstgenannten englischen Werken blieben auch die Forschungen deutscher Mathematiker, namentlich jene von Möbius, Plücker, Steiner u. A. nicht unbeachtet.

Schon im Jahre 1851 hatte George Salmon die Ergebnisse seiner Untersuchungen über Curven dritter Ordnung in der Abhandlung „Théorèmes sur les courbes de troisième degré" im XLII. Bande des Crelleschen Journals (S. 274) und später in der Abhandlung „On curves of the third order" (Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. 148, pag. 535, London 1859) veröffentlicht, nachdem er schon im Jahre 1850 in dem Cambridge-Journal (Vol. V.) — also noch vor Steiner — die Existenz zweier Raumcurven vierter Ordnung bekannt gemacht hatte.[1])

Die ersten allgemeinen Resultate über die Curven doppelter Krümmung verdanken wir Cayley (geb. 1821, gest. 1895), dem Begründer der nach ihm benannten Invarianten-Theorie, welcher ihnen mehrere wichtige Abhandlungen gewidmet hat. In einer derselben

[1]) S. a. Philosophical Magazine, London—Edinburgh—Dublin 1858.

stellte er die Formeln auf, welche denen von Plücker analog sind und die Zahl der Singularitäten einer Raumcurve unter einander verbinden.[1]) Von hohem wissenschaftlichen Werte ist auch seine elegante Abhandlung über die interessantesten Eigenschaften der Curven dritter Ordnung „A Memoir on curves of the third order", welche er im 137. Bande (S. 415) der Philosophical Transactions vom J. 1857 veröffentlicht hat, sowie jene im LIV. u. LVIII. Bande der Comptes rendus veröffentlichte Abhandlung über algebraische Curven n-ten Grades, wo er für das Studium dieser Raumcurven die unter dem Namen „Monoide" bekannten Flächen eingeführt hat. Dass er auch die curventheoretische Bedeutung der Involution frühzeitig erkannte, beweist sein „Memoire on the theory of involution", welches im XI. Bande der Transactions of the Cambridge philosophical Society im Jahre 1868 erschienen ist.

Schon im Jahre 1849 hatten Salmon und Cayley[2]) die 27 Geraden der cubischen Fläche bestimmt und ihre Resultate im Cambridge and Dublin Mathematical Journal (Vol. II. u. IV.) und in den Transactions of the Irish Academy (Vol. XXIII.) veröffentlicht und 1851 entdeckte Sylvester[3]) das Pentaeder der allgemeinen cubischen Fläche, von dem er im Cambridge and Dublin Math. Journ. (Vol. VI) Mittheilung machte. Die Regelflächen dritter und vierter Ordnung bildeten auch den Gegenstand interessanter Untersuchungen, welche Cayley in London-Edinburgh and Dublin philosophical Magazine und in den Philosophical Transactions of the Royal Society of London vom Jahre 1864 veröffentlicht hat. Auf die Cayleysche Untersuchung der Steinerschen Flächen vierter Ordnung dritter Classe, die er im J. 1865 im LXIV. Bande (S. 172) des Crelle-Borchardtschen Journales veröffentlicht hat, haben wir bereits hingewiesen.

Von interessanten Abhandlungen britischer Forscher über Curven dritter Ordnung erwähnen wir noch Cayleys „Mémoire sur les courbes du troisième ordre" (Liouvilles Journal 1844) und A. Harts „Construction by the ruler alone to determine the ninth point of intersection of two curves of the third degree" (Cambridge and Dublin mathematical Journal. Vol. VI., pag. 181. Cambridge 1851). Mit den Flächen dritter Ordnung beschäftigten sich noch Salmon in den Philosophical Transactions vom Jahre 1860 (S. 229) und Sylvester in den Comptes rendus (1861, S. 977). Auch Schläfli, Professor der Mathematik an der Universität zu Bern, veröffentlichte seine beiden Abhandlungen „An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order" und

[1]) S.: Liouvilles Journal, Tom. X. Paris 1845, und Cambridge Journal, Vol. V. 1850.
[2]) „On the triple tangent planes to a surface of the third order." London 1863.
[3]) „On elimination, transformation and canonical forms." Cambridge Journ. 1851.

„On the distribution of surfaces of the third order into species", in welchen er sich mit der Realität der 27 Geraden einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung beschäftigte, in englischen Zeitschriften, u. zw. die erstere im Quarterly Journal of Mathematics, Vol. II, Cambridge 1858, letztere in den Philosophical Transactions, London 1863. Berühmt sind auch die beiden Abhandlungen von Cayley über die windschiefen Schraubenflächen „On the theory of skew surfaces" (Cambridge and Dublin Mathematical Journal. Tom. VII, 1852) und „Second Memoire on skew surfaces otherwise scrolls" (Philosophical Transactions pag. 559, London 1864), sowie seine diesbezügliche Mittheilung in den Comptes rendus vom 12. März 1866.

Schon im Jahre 1869 gab Sylvester in seiner vor der British Association gehaltenen Rede die erste Anregung zur Erweiterung der darstellenden Geometrie auf den vierdimensionalen Raum. —

Die Oberflächen zweiten Grades, deren ersten, auf streng wissenschaftlichen Grundlagen ruhenden Untersuchungen wir Wren (1669), Parent (1713) und Euler (1760) verdanken, beschäftigten in diesem Jahrhundert nebst der Mongeschen Schule ein ganzes Heer von berühmten Mathematikern aller Culturstaaten. Schon in der zweiten Hälfte des XVII. Jahrhundertes hatte der britische Gelehrte Wren die geradlinigen Erzeugenden des eintheiligen Hyperboloides entdeckt und hievon in der Abhandlung „Generatio corporis cylindroidis hyperbolici" (Philosophical Transaction, pag. 961, London 1669) Mittheilung gemacht. Dank den Arbeiten so ausgezeichneter Gelehrter wie Jacobi, Mac Cullagh, Chasles, Hesse, Seydewitz, Schröter u. A. konnte die Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung in den mehr elementaren Unterricht eingeführt und methodisch auf analytischem als auch synthetischem Wege behandelt werden. Wie bereits bemerkt, wurde eine der wichtigsten Fragen, welche sich in der Theorie der Flächen zweiten Grades darbietet, nämlich ihre Construction aus neun ihrer gegebenen Punkte von Seydewitz (Grunerts Archiv, Th. IX, 1847), Chasles (Comptes rendus, 1855), Steiner (Ges. Werke, II. Band, Nachlass), Schröter (Borchardt Journal, Bd. LXII, 1863), Sturm (Math. Ann., Bd. I. 1869) und Dino (Napoli Rend. 1879) gelöst. Die reciproken Polaren der Flächen zweiten Grades untersuchten analytisch Battaglini (Lincei Atti, 1875), d'Ovidio (Giorn. di Mat. Tomo X 1872) und synthetisch Thieme (Zeitschrift für Math. Bd. XXII, 1877). Die metrischen Eigenschaften der Flächen zweiten Grades fanden Steiner (Crelles Journal II, 1827), Chasles (Liouvilles Journal, I, 1836), Schröter (Borchardt Journal LXXXV) etc. In Dr. H. Schröters vorzüglichem Werke „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung, Leipzig 1880" wurden diese Oberflächen als Erzeugnisse projectivischer Gebilde ganz nach Steiners Principien in synthetischer Weise behandelt. Die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere die der ersten und zweiten Ordnung behandelte Prof. E. E. Kummer in seiner im Jahre 1866 in den Abhandlungen der Berliner Akademie veröffentlichten Schrift „Über die algebraischen Strahlensysteme."

Die bahnbrechende Wirkung französischer Forschungen auf dem Gebiete der neueren Geometrie haben wir in Steiners berühmten Werke „Systematische Entwickelung" — Dank den mustergiltigen Literaturnachweisen des großen deutschen Gelehrten — leicht verfolgen können. In seiner berühmten Mittheilung in der Gesammtsitzung der Berliner Akademie der Wissenschaften am 10. August 1848 über die „Allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Curven" zeigte Steiner, indem er die Theorie der Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Curve wieder aufnahm, welche schon Bobillier in seinen beiden geistreichen Abhandlungen „Recherches sur les lois générales qui régissent les lignes et les surfaces algébriques" und „Théorèmes sur les polaires successives" (Annales de Gergonne, tome XVIII et XIX, Nismes 1827—29) als eine Erweiterung der Diametralcurven aufgestellt und mit welcher sich auch Grassmann[1] (1809—1877) beschäftigt hatte, dass dieselbe als Grundlage für ein vom Gebrauche der Coordinaten unabhängiges Studium der ebenen Curven dienen kann, und führte jene bemerkenswerten zu einer gegebenen Curve covarianten Curven ein, die heute Steiners, Hesses und Cayleys Namen tragen. Einen hervorragenden Einfluss auf die Neugestaltung der Curven- und Flächentheorie übten nach Steiners und Chasles Forschungen (Comptes rendus 1853) über die Entstehung der algebraischen Curven mittelst projectivischer Büschel von Curven niederer Ordnung jene des französischen Fregatten-Capitäns E. de Jonquières aus, die bis in die neueste Zeit reichen.[2]) Wir nennen von seinen Arbeiten nur seine „Mélanges de Géométrie pure, Paris 1856", das „Mémoire sur la théorie des pôles et polaires" (Liouville Journal, II· série, Tome II, 1857), seinen „Essai sur la génération des courbes géométriques, Paris 1858"; ferner die bereits genannte Abhandlung „Généralisation de l'involution" (Annali di Matematica Tomo II·, Roma 1859), seine „Théorèmes généraux concernant sur les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque" (Liouville Journal. Tom. VI, 1861), sowie seine „Etudes sur les singularités des surfaces algébriques (Ibid. Tome VII, 1862), und weisen

[1]) „Theorie der Centralen," Crelles Journal Bd. XXIV. Berlin 1842.

[2]) S. die Comptes rendus, Bd. XXXVI- CXXII. Paris 1853—1896.

schließlich auf seine interessanten Untersuchungen über die Maximalzahl der vielfachen Punkte, die man bei einer ebenen Curve beliebig annehmen kann, welche Jonquières im CV. Bande der Comptes rendus vom Jahre 1887 veröffentlicht hat.[1])

Den classischen Forschungen von C. G. J. Jacobi[2]) (geb. 1804, gest. 1851) folgten in rascher Aufeinanderfolge in Deutschland die gediegenen Abhandlungen von F. Joachimsthal[3]) (1818—1861) und die an schönen Resultaten reichen, mittelst homogener Coordinaten durchgeführten, eleganten Untersuchungen von Dr. O. Hesse (1811—1874). Von den geschätzten Arbeiten des letztgenannten deutschen Forschers, welcher zuerst als Professor der Mathematik an der Universität zu Königsberg, dann an jener in Halle und später in Heidelberg wirkte, erwähnen wir seine Abhandlungen über Oberflächen zweiter Ordnung in Crelles Journal Bd. XVIII. (S. 101, Berlin 1838), Bd. XX. (S. 285, 1840), XXIV. (S. 36 und 40, 1842), XXVI. (S. 147, 1843), LX. (S. 305, 1862) und seine interessanten Untersuchungen über die Curven dritter Ordnung und ihre Singularitäten im XXVIII. Bde. (S. 68, 97, 1844). XXXVI. (S. 143, 1848) und XXXVIII. Bd. (S. 241 und 257). Hieher gehört auch die schöne Abhandlung von Dr. Hesse „Über die Wendepunkte der algebraischen ebenen Curven und die Schmiegungsebenen der Curven von doppelter Krümmung, welche durch den Schnitt zweier algebraischen Oberflächen entstehen (Crelles Journal Bd. XLI, S. 272, 1851), ferner jene über das Pascalsche Theorem (Ibid. S. 269) und die Involution (LXIII, S. 179, 1864). Eine eingehende analytische Behandlung fanden auch die Curven vierter Ordnung in den Abhandlungen „Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung“ (Ibid. XLIX. Bd. S. 243, 1854), „Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung (Ibid. S. 279), „Transformation der Gleichung der Curven vierzehnten Grades, welche eine gegebene Curve vierten Grades in den Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten schneiden“ (Crelle-Borchardts Journ. Bd. LII, S. 97, 1856) und in der Abhandlung „Zu den Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung“ (Ibil. LV, S. 83, 1858). Die cubische Gleichung, von welcher die Lösung des Problemes der Homographie von M. Chasles abhängt, wurde von Hesse im LXII. Bande (S. 188, 1863) und die Reciprocität der Pascal-Steiner und der Kirkman-Cayley-Salmonschen Sätze von dem Hexagramum

[1]) S. a. Crelle-Borchardts Journal, Bde. LIX (S. 313) und LXVI (S. 289).

[2]) Ibid. Bde. II (1827), XII (1834), XV (1836) bis LXIV (1865).

[3]) Ibid. Bde. XXVI (1843) bis LIX (1861). S. a. s. Vorlesungen gehalten an der Universität zu Breslau im Studienjahre 1856—57 bearbeitet von L. Natani (Leipzig 1890).

mysticum im LXVIII. Bande (S. 193, 1868) einer anregenden Untersuchung unterzogen. Eines glänzenden Rufes erfreuten sich aber am königl. Polytechnicum zu München Dr. O. Hesses „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises" (Leipzig 1865, III. Aufl. 1881), ferner seine „Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte" Leipzig 1874) und ganz besonders seine gediegenen „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung" (Leipzig 1861, III. Aufl. revidiert und mit Zusätzen versehen von Dr. S. Gundelfinger, Professor am großherzogl. Polytechnicum zu Darmstadt, Leipzig 1876).

Ein hoher wissenschaftlicher Wert liegt in den reingeometrischen Abhandlungen von Dr. H. Grassmann (1809--1877), Professor am Gymnasium in Stettin, wenn auch ihr Einfluss nur aus formalen Gründen nicht recht zur Geltung kam. Seine „Theorie der Centralen" (Crelles Journal Bd. XXIV, S. 362, 772 und Bd. XXV. S. 57, Berlin 1842—43) haben wir bereits erwähnt. Wir nennen noch die Abhandlungen „Grundzüge einer reingeometrischen Theorie der Curven" (Ibid. XXXI, S. 111 1846), „Über die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien, und über geom. Definitionen dieser Curven" (Ibid. XXXVI, S. 177 1848), „Der allgemeine Satz über die Erzeugung algebraischer Curven durch Bewegung gerader Linien (XLII. Bd. S. 187, „Die höhere Projectivität und Perspectivität in der Ebene, dargestellt durch geometrische Analyse" (XLII, S. 193) und „Die höhere Projectivität in der Ebene, dargestellt durch Functionsverknüpfungen" (S. 204); ferner „Die Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien" (XLIV S. 1) und „Die lineale Erzeugung algebraischer Oberflächen" (XLIX, S. 1 und 21), „Die stereometrischen Gleichungen zweiten und dritten Grades und die dadurch dargestellten Oberflächen" (Ibid. S. 37, 47), sowie „Die lineale Erzeugung von Curven dritter Ordnung" (Borchardt Journ. Bd. LII, S. 254, 1856).

Bekannt ist auch Grassmanns zuerst wenig gewürdigtes Werk „Die Ausdehnungslehre, Leipzig 1844" oder „Die lineale Ausdehnungslehre Leipzig 1862" (II. Aufl. 1878) durch seine geistreichen Schlüsse. Einen besseren Erfolg erzielten seine schon im modernen Gewande erschienenen Abhandlungen, die er in den Math. Annalen (Bd. X u. XII) und in den Göttinger Nachrichten vom Jahre 1872, sowie im Crelle-Borchardt Journal (Bd. LXXXIV) veröffentlichte.[1]) Mit den Flächen dritter

[1]) S. a.: Hermann Grassmanns, Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben von Friedrich Engel. I. Bd. Leipzig 1894.

Ordnung und ihrer Erzeugung beschäftigte sich Grassmann im Jahre 1854 im XLIX. Bande des Crelleschen Journals (S. 59). Die vierte Erzeugungsart der Flächen dritten Grades von Steiner (s. Ges. Werke, II. Bd. S. 652) ist ein besonderer Fall der Grassmannschen Erzeugungsart.

Eine ganze Reihe berühmter Abhandlungen aus der neueren analytischen Geometrie verdanken wir Alfred Clebsch (1833 — 1872), Professor an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe, dann an der Universität zu Giessen und seit 1868 an jener zu Göttingen, der zuerst die Algebra der linearen Transformationen auf die Geometrie angewendet hat und, nachdem er die Wichtigkeit des Begriffes des Geschlechtes einer Curve ans Licht gestellt, die Anwendung der Theorie der elliptischen und Abelschen Functionen auf die Wissenschaft von der Ausdehnung dargelegt und sie für das Studium der rationalen und elliptischen Curven benützt hat. Von seinen Abhandlungen erwähnen wir jene „Über die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung" (Crelle - Borchardt Journal, Bd. LVIII, S. 229, 1861), „Über Curven vierter Ordnung" (Ibid. LIX, S. 125), Über die Wendungsberührebenen der Raumcurven" (Ibid. LXIII, S. 1, 1864), „Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung" (Ibid. S. 94), „Über die Singularitäten algebraischer Curven" (Ibid. LXIV, S. 98, 1865) und „Über einige von Steiner behandelte Curven" (Ibid. S. 288); ferner jene „Über die Geometrie auf den Flächen der dritten Ordnung" (Ibid. LV, S. 359, 1858), „Über einige Punkte der Theorie der Polaren" (Ibid. LVIII, S. 273, 1861), „Über die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung" (Ibid. LIX, S. 193, 1861), „Die Geometrie auf den Flächen der dritten Ordnung" (LXV. Bd., 1866), „Über die Steinersche Fläche" (Ibid. LXVII, S. 1, 1867), „Über die Curven der Haupttangenten bei windschiefen Flächen" (Ibid. LXVIII, S. 151) und „Die Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelcurve vom zweiten Grade" (LXIX. Bd. 1868). Geschätzt sind auch seine im Wintersemester 1871—72 an der Universität zu Göttingen gehaltenen „Vorlesungen über Geometrie" (Leipzig 1875 und 1891), deren erster Band die Geometrie der Ebene und deren zweiter Band die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Classe und den linearen Complex enthält.

Im zweiten Bande dieses von Dr. Ferdinand Lindemann, ord. Professor an der Universität zu Königsberg, bearbeiteten Werkes, welches sich durch seine sorgfältigen Quellen- und Literatur-Nachweise auszeichnet, ist auch die von Staudtsche Interpretation imaginärer Elemente die Bestimmung der geodätischen Linien in verallgemeinertem projectivischen Sinne auf allen Flächen zweiter Ordnung, die Theorie der Beziehungen einer Fläche zweiter Ordnung zu einem linearen Complexe, die lineare Transformation einer solchen Fläche und eines linearen Complexes in sich, die linearen dualistischen Umformungen dieser Gebilde in sich, sowie die allgemeine Behandlung reciproker linearer Verwandtschaften, ferner die Verallgemeinerung der eindeutigen ebenen Abbildung einer Fläche zweiter Ordnung, etc. recht eingehend und elegant behandelt. [1])

Die Fortschritte in der darstellenden und projectiven Geometrie stehen selbstverständlich im innigsten Zusammenhange mit dem strengwissenschaftlichen Ausbau der reinen Geometrie. Diese fand in Deutschland und Italien eine besonders sorgfältige Pflege. Ein reiches Material für die Übung in der geometrischen Anschauung und Verbindung der synthetischen Darstellung mit der Differentialgeometrie der Raumcurven finden wir in dem Werkchen „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung, Leipzig 1859," welches Dr. W. Schell, a. o. Professor an der Universität zu Marburg, zum Verfasser hatte. Sehr schöne Erfolge auf dem Gebiete der neueren Geometrie verdanken wir den Forschungeu italienischer Mathematiker. Bekannt ist die einfache projective Ableitung der Eigenschaften der Linien und Flächen zweiten Grades aus denen des Kreises, der Kugel und des einschaligen Umdrehungshyperboloides und die treffliche Behandlung der windschiefen Flächen in dem Werke „Lezioni di geometria descrittiva, Padova 1851 von G. Bellavitis (1803—1880), Professor der darstellenden Geometrie an der Universität in Padua. In demselben Jahre veröffentlichte Bellavitis in den Memoire della Società Italiana delle scienze, tomo XXV, parte II, pag. 33, Modena 1851 seine für die Untersuchungen über die Gestalt und Classification der Curven dritter Ordnung wichtige Abhandlung „Sulla classificazione delle curve del terz' ordine."

Berühmt sind die analytischen und synthetischen Forschungen auf dem Gebiete der neueren Geometrie von Dr. Luigi Cremona (geb. 7. Dec. 1830 in Pavia). Sie fanden rasch in ausgedehntestem Umfange Eingang in die besten Werke über darstellende und projective Geometrie und waren mit den berühmten Forschungen von Chasles die geistige Quelle für die weitgehendsten Untersuchungen von Prof. Dr. Emil Weyr, des bedeutendsten österreichischen Schriftstellers auf dem Gebiete der

---

[1]) S.: „A Clebsch." (Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen). Leipzig 1873 und Math. Annalen, Bd. VI, S. 197 und Bd. VII, S. 1.

modernen Geometrie. Die neuere analytische Geometrie, welche insbesondere Möbius und Plücker in ihren Werken auf neue Betrachtungsweisen begründet hatten, fand schon im Jahre 1858 in Ober-Italien diesen ausgezeichneten Schriftsteller, dessen hervorragenden wissenschaftlich-wertvollen Errungenschaften auf dem Gebiete der Curventheorie besonders für die tiefgreifenden und gründlichen Untersuchungen des Universitäts-Professors Weyr die wissenschaftliche Grundlage bildeten. Im Jahre 1858 veröffentlichte Dr. Luigi Cremona, damals noch Professor der Mathematik am k. k. österr. Lyceal-Gymnasium zu Cremona in der Lombardei, im Jahresberichte dieser Anstalt die interessante Abhandlung „Nota intorno ad alcuni teoremi di geometria segmentaria", aus welcher mancher unserer überraschten Mathematiker ersehen konnte, dass besonders Plückers bahnbrechende Ideen unter den englischen, französischen und italienischen Mathematikern bereits bedeutende Verbreitung und geistreiche Anwendungen gefunden hatten.[1])

Diese Abhandlung Cremonas, welche für unsere heimischen Mathematiker eine hübsche Überraschung bildete, hatte die Beweise einiger merkwürdigen Eigenschaften homographischer oder collinearer Figuren zum Gegenstande, welche der französische Mathematiker Lafitte im Maihefte der Annales de Mathématiques von M. Terquem für das Jahr 1857 mitgetheilt hatte. Noch in demselben Jahre veröffentlichte der österreichische Gymnasialprofessor seine berühmte Abhandlung „Sulle linee del terz' ordine a doppia curvatura" in den Annali di Matematica pura ed applicata, pubblicati da Barnaba Tortolini, Professore di Calcolo sublime all' Università di Roma (Tomo I, pag. 164—174 ed. 278—295, Roma 1858). Die Fortsetzung dieser gediegenen Abhandlung, welche sich mit der Theorie der conjugierten Punkte und Ebenen in Bezug auf Raumcurven dritter Ordnung beschäftigt, folgte im II. Bande der Annali di Matematica (pag. 19—29, Roma 1859). In diesem Bande (S. 65—81) finden wir auch die schöne Abhandlung Cremonas „Intorno alle superficie della seconda classe inscritte in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe", in welcher sich der berühmte Verfasser mit jener Fläche zweiter Ordnung beschäftigte, die einer gegebenen abwickelbaren Fläche vierter Ordnung eingeschrieben ist. Es ist interessant zu lesen, mit welchem literarischen Feingefühl der gelehrte Italiener unter Hinweis auf die diesbezüglich von Steiner in der Ebene mit Kegelschnitten gelösten Probleme, darauf hinweist, dass ein deutscher Gelehrter dieses Problem gestellt und mit bewunderns-

[1]) Vergl. S. 515 der Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien, redigiert von J. G. Seidl, H. Bonitz und J. Mozart. IX. Jahrg. Wien 1858.

werter Eleganz auch zuerst gelöst hat. Mit den einleitenden Worten „Questo problema è stato risoluto con mirabile semplicità ed eleganza da Plücker, nel secondo tomo dei suoi „Analytisch-geometrische Entwickelungen“ (pag. 199 e 211), facendo uso delle coordinate tangenziali“ lenkte Cremona die Aufmerksamkeit italienischer Mathematiker auf das schon in den Jahren 1828—31 in Essen erschienene Werk des deutschen Forschers.

Als eine geistreiche Ergänzung der letztgenannten Abhandlung Cremonas kann auch die folgende Abhandlung „Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile del quart' ordine e terza classe“ (Ibid. pag. 201 — 206) betrachtet werden; beide finden in Chasles Forschungen über Curven dritter und Flächen vierter Ordnung (Aperçu hist. Note 33, Bruxelles 1837 u. Comptes rendus, Paris 1853—57) ihre wissenschaftliche Grundlage. Von den für die moderne Curventheorie wichtigen Abhandlungen Cremonas, der im Jahre 1860 als Professor der höheren Geometrie an die Universität zu Bologna berufen wurde, erwähnen wir noch „Sulle coniche e sulle superficie di second' ordine congiunte“ (Annali di Mat. Tomo III, pag. 257—282, Roma 1860), ferner die bereits erwähnte „Courbes gauches décrites sur la surface d'hyperboloide à une nappe“ (Ibid. Tomo IV, pag. 22—25, Roma 1861 und Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris, an. 1861) und die mit den diesbezüglichen Forschungen von Plücker (Theorie der alg. Curven, Bonn 1839), Salmon (On the classification of curves of double curvature, Cambridge and Dublin Math. Journ. V. 1850), Chasles (Comptes rendus 1855) und Cayley (Transactions of the Roy. Irish Academy, vol. XXIII, Dublin 1857) eng zusammenhängende Abhandlung Cremonas über die Raumcurven vierter Ordnung auf Flächen zweiten Grades „Intorno alla curva gobba del quart' ordine, per la quale passa una sola superficie di secondo grado“ (Annali di Mat. Tomo IV°, pag. 71—111, Roma 1861) deren Inhalt er in der Sitzung der Akademie der Wissenschaften zu Bologna am 7. März 1861 mitgetheilt hatte. Bemerkenswert sind noch die Sätze über die durch fünf Punkte oder fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitte in der Abhandlung „Sulla teoria delle coniche“ (Giornale di Matematiche, Vol. I, pag. 225, Napoli 1863 ed Vol. II, pag. 17, 1864, Vol. III, pag. 60, Napoli 1865); ferner jene über ebene und doppeltgekrümmte Curven dritter Ordnung „Considerazioni sulle curve piane del terz' ordine“ (Ibid. Vol. II°, pag. 78), „Teorema sulle cubiche gobbe“ (Ibid. Vol. I, pag. 278) und „Nuove ricerche di Geometria pura sulle cubiche gobbe“ (Ibid. Vol. II, pag. 202 ed Memoire dell Accad. di Bologna, Tomo III°), sowie die mit Steiners und Schiaparellis

Transformationen zusammenhängenden Untersuchungen „Sulle trasformazioni geometriche delle curve piane" (Bologna Mem. Tomo II° ed Giornale, Vol. I° pag. 305, Napoli 1863), in welchen sich die reine Geometrie bereits als wirksames Mittel für die Lösung der schwierigsten Probleme in der Curventheorie bewährt hatte. Das Gleiche gilt von den beiden in Borchardts Journal von Cremona über Raumcurven dritter Ordnung veröffentlichten Abhandlungen „Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe" (Bd. LVIII, S. 138, Berlin 1861) und „Note sur les cubiques gauches" (Bd. LX, S. 188, 1862), in welchen er für die von Chasles in den Comptes rendus vom Jahre 1857 und in Liouvilles Journal de Math. Paris 1857, pag. 397 ohne Beweis aufgestellten Sätze reingeometrische Beweise lieferte. Hieher gehört auch die spätere Abhandlung „Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements", welche er im LXIV. Bande (S. 101—123, Berlin 1865) des Borchardtschen Journales veröffentlicht hat.

Noch effectvoller treten die schönen Erfolge rein geometrischer Methoden in Cremonas berühmten, für die Theorie der ebenen Curven so bahnbrechendem Werke „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane", welches der italienische Gelehrte in den Memorie dell' Accademia di Bologna, Tomo XII°, I^a Serie, Bologna 1862 veröffentlicht hatte, und von welchem Gymnasial-Professor Maximilian Curtze zu Thorn im Jahre 1865 in Greifswald die deutsche Ausgabe unter dem Titel „Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven" veröffentlicht hat. Cremona widmete dieses Werk seinem berühmten Lehrer der Mathematik Francesco Brioschi, Professor an der Universität in Pavia, seit Jahren aber Director des eines glänzenden Rufes sich erfreuenden „Regio Istituto tecnico superiore" zu Mailand — einem Gelehrten — dem Italien seine so großen Fortschritte in den mathematischen Wissenschaften in erster Linie zu verdanken hat.

Cremona hatte ursprünglich die Absicht, in seinem Werke die für die Curventheorie so wichtigen Sätze, welche Steiner in seiner kurzen aber berühmten Abhandlung „Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven" (Crelles Journ. Bd. XLVII) ausgesprochen hatte, durch reingeometrische Methoden zu beweisen. Von wenigen Eigenschaften eines Systems von Punkten in einer Geraden ausgehend, begründete er nach Entwickelung der Grundprincipien (I. Cap. §§. 1—12) die Theorie der Polaren in Bezug auf eine Curve von beliebiger Ordnung (II. Cap. §§. 13—21), eine Theorie, die sich ihm fast von selbst darbot und sich so reich an Folgerungen zeigte, dass Cremona bald die Überzeugung haben konnte, in ihr die natürlichste Methode für die Untersuchung der ebenen Curven gefunden zu haben. Nach Entwickelung der Theorie der Polaren entwickelt und beweist Cremona in diesem Abschnitte mit einfachen und gleichmäßigen geometrischen Methoden, nicht allein die Sätze von Steiner, die er ohne Beweise ausgesprochen hat, sondern auch eine bedeutende Zahl anderer, theils neuer, theils schon von den berühmten Geometern Plücker, Cayley, Hesse, Clebsch, Salmon und Anderen mit Hilfe der algebraischen Analyse bewiesene Sätze und wendet im dritten Capitel (§§. 22---24) die allgemeine Theorie der Polaren auf Curven der dritten Ordnung an. Das schöne und umfassende Werk Cremonas ist ein vorzügliches, in seiner Art einzig dastehendes Lehrbuch der rein geometrischen Theorie der ebenen Curven, dessen wissenschaftlicher und historischer Aufbau selbst den strengsten Anforderungen genügt. Der gelehrte Verfasser benützte die Werke von Maclaurin, Carnot, Poncelet, Chasles, Bobillier, Möbius, Jonquières u. A. Der streng wissenschaftliche Aufbau der Grundprincipien für die Theorie der ebenen Curven, die Begründung der Theorie der Polaren und ihre Anwendung auf die Fundamentalsätze der Curven und ihre Construction, besonders auf jene der zweiten und dritten Ordnung und ihre Büschel, erhalten durch stete historische Rückblicke auf ältere und neuere Forschungen ein ganz besonderes Interesse. So werden die Grundprincipien der rein geometrischen Theorie der ebenen Curven, wie z. B. das anharmonische oder Doppelverhältnis, die projectivischen Punktreihen und Strahlbüschel, die Theorie der harmonischen Mittelpunkte, ferner die Theorie der Involution und die projectivischen Punktensysteme, die Definitionen für ebene und einhüllende Curven, etc. unter Zugrundelegung der diesbezüglichen Forschungen von Möbius, Poncelet, Chasles, Salmon, Cayley, Battaglini, Bellavitis, von Staudt, Plücker, Jonquières, Painvain u. A. entwickelt. Bei der Erzeugung der ebenen Curven im allgemeinen und der Curven zweiter und dritter Ordnung im besonderen bilden die Constructionsmethoden von Poncelet, Sturm, Chasles, Jonquières, Salmon, Hart, Plücker, Schröter und Härtenberger, etc. den wissenschaftlichen Ausgangspunkt Cremonas. Die schöne Theorie der Polaren wird mit Berücksichtigung der Arbeiten von Grassmann, Poncelet, Bobillier, Plücker, Steiner, Salmon und Cayley entwickelt und erweitert, und bei Aufstellung der Sätze über Curvensysteme und geometrische Netze spielen wieder die bereits gefundenen Resultate von Poncelet, Bobillier, Chasles, Salmon, Cayley, Sylvester, S. Roberts, Plücker, Steiner, Möbius, Hesse, Clebsch, Schröter, Aronhold, Bischoff, etc. eine große Rolle.

Ein ganz besonderes wissenschaftliches und historisches Interesse bietet aber das dritte Capitel, welches sich mit den Curven dritter Ordnung, ihren Büscheln mit gemeinsamen Wendepunkten und ihrer Erzeugung als Curven dreier verschiedener Netze von Kegelschnitten beschäftigt. Die ersten neugeometrischen Untersuchungen über Raumcurven dritter Ordnung verdanken wir Möbius. Schon im Jahre 1827 bewies er in seinem barycentrischen Calcul (S. 120), dass die Tangentenfläche oder Tangentendeveloppable einer Raumcurve dritter Ordnung von ihren Schmiegungsebenen in Curven zweiter Ordnung geschnitten wird. Zehn Jahre später stellte Chasles in seinem berühmten Werke „Aperçu historique, Bruxelles 1837“ (Note XXXIII.) bereits den Satz auf, dass diese Tangentendeveloppable von der vierten Ordnung ist. Im Jahre 1845 zeigte Cayley im X. Bande des Journals von Liouville, dass durch jeden Punkt des Raumes eine Sehne dieser Raumcurve hindurchgeht, und zwei Jahre später erzeugte Seydewitz (Archiv der Math. und Phys. X. Th., S. 203, Greifswald 1847) diese Raumcurve dritter Ordnung durch zwei collineare Strahlenbündel und fand viele ihrer Eigenschaften. Die Grundformen der Linien dritter Ordnung bildeten den Gegenstand einer Abhandlung, welche Möbius im I. Bande der Abhandlungen der königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom J. 1849 veröffentlicht hatte. Eine Reihe schöner Sätze über Raumcurven dritter Ordnung theilte Chasles in den Comptes rendus vom Jahre 1857 und im Journal von Liouville (Jahrg. 1857, S. 397) ohne Beweise mit. Mit den Beweisen dieser Chaslesschen Sätze beschäftigten sich Schröter (Borchardt Journal, Bd. LVI, S. 27, Berlin 1859), von Staudt (Beiträge zur Geom. d. Lage, Nürnberg 1860, S. 298), Cremona (Borchardt Journal, Bd. LVIII, S. 138 und Bd. LX, S. 188, Berlin 1861—62) und Reye in seiner „Geometrie der Lage“ (II. Abth., II. Aufl., 13. Vortrag, Hannover 1868, III. Aufl., 24. u. 25. Vortrag, Leipzig 1892).

Diese ausgezeichneten Untersuchungen von Herrn Dr. Luigi Crémona bilden mit den bahnbrechenden Forschungen von Chasles über Curven dritter und vierter Ordnung jene wissenschaftliche Grundlage, auf welcher Herr Universitätsprofessor Dr. Emil Weyr in den letzten fünfundzwanzig Jahren seine so einfache und wertvolle Theorie der höheren ebenen und doppeltgekrümmten Curven aufgebaut hat.

Eine gute Darlegung der Theorie der Raumcurven dritter Ordnung hat der Privatdocent an der Universität zu Marburg, Dr. C. A. von Drach in seiner Schrift „Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte, Leipzig 1867“ geliefert. Eine treffliche Behandlung der Raumcurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Gebilde und eine synthetische Ableitung ihrer hauptsächlichsten von Möbius, Chasles, Cremona, von Staudt, u. A. entdeckten Eigenschaften finden wir auch in Dr. H. Schröters Werke „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung, Leipzig 1880," welches der Verfasser nach Steiners Principien verfasst hat. Die Grundlage hiefür bildeten auch die Abhandlungen „Über die Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde" (Borchardts Journal, Bd. LIV, S. 31, Berlin 1857), „Über die Raumcurven dritter Classe und dritter Ordnung" (Ibid. Bd. LVI, S. 27, 1859) und „Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis perdata puncta construendam spectantis solutio nova" (Ibid. Bd. LXII, S. 215, Berlin 1863).

Von neueren Werken ausländischer Forscher über die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung nennen wir noch Walters analytisch durchgeführte Dissertation „Über den Zusammenhang der Curven dritter Ordnung mit den Kegelschnittscharen, Giessen 1878" und Dr. H. Schröters Werk „Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung, Leipzig 1888," in welchem nach den vielseitigen analytisch-geometrischen Untersuchungen von Plücker, Cayley, Salmon, Hesse, Aronhold[1]), Clebsch[2]) u. v. A. die Haupteigenschaften der Curven dritter Ordnung auf synthetisch-geometrischem Wege abgeleitet werden.

Wir erwähnen noch die Abhandlungen von K. Küpper (Math. Annalen Bd. XXXI—XXXIII), sowie die Abhandlungen von H. Schröter (Ibid. XXV. Bd.), R. Sturm (Zeitschrift für Math. XL. Jahrg. Leipzig 1895) und Mehmke (Ibid.), welche sich mit den metrischen Eigenschaften der cubischen Raumcurven beschäftigen. Einige Hauptsätze aus der Lehre von den Curven dritter Ordnung theilte E. Kötter im XXXVIII. Bande (S. 287) der Mathem. Annalen (Leipzig 1891) mit. In den Mittheilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft II. Bd. S. 43—60, Jahrg. 1890 veröffentlichte Herr Dr. Th. Reye, Professor an der Universität in Strassburg, eine Übersicht über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnis der cubischen Raumcurven.

Größere Schwierigkeiten als die Curven dritter Ordnung, bieten die Curven vierter Ordnung, insbesondere jene im Raume, weil es solche Curven gibt, die sich nicht durch den vollständigen Schnitt zweier Oberflächen ergeben, sondern auf drei Oberflächen gleichzeitig liegen. Schon Poncelet machte im Jahre 1822 in seinem berühmten

---

[1]) S.: Berliner Monatsberichte vom Jahre 1861.

[2]) S.: Borchardts Journal, Bde. LVIII und LXIV, S. 229, bez. S. 210, 288. Berlin 1861 und 1868.

„Traité des propriétés projectives“ (I, pag. 385) die bemerkenswerte Entdeckung, dass durch eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art vier Kegel zweiten Grades hindurchgehen. Interessante Untersuchungen über ebene Curven vierter Ordnung führten aus Steiner (Crelles Journ. Bd. XLIX, 1854), Hesse (Ibid. Bd. XLIX und LV), Aronhold (Berliner Ber. 1864 und Nouv. Ann. II.), Battaglini (Collectana mathem. Mailand 1881), Clebsch (Borchardt Journ. Bd. LVIII u. LXV), u. A. Ihre bemerkenswerthe Eigenschaften hat Herr Prof. Dr. C. F. Geiser auch durch stereometrische Betrachtungen dargethan (s. Math. Ann. Bd. I und Borchardts Journal Bd. LXXII). Viele schöne Eigenschaften der Raumcurven vierter Ordnung erster Art haben entdeckt Poncelet (Traité des prop. 1822), Chasles (Comptes rendus, Tom. LIV u. LV), Cremona (Ibid. und Bologna Mem. 1861, sowie Rendiconti dell'Istituto Lombardo), Reye (Annali di Mat. II. 1859), P. Serret, Laguerre, Milinowski (Borchardt Journ. Bd. XCVII), etc., und solche über Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art Cremona (Annali I), Armenante (Giornale XI, XII), Bertini (Lombardo Rendic. 1872). Die auf Flächen dritter Ordnung liegenden Raumcurve vierter Ordnung hat auch Sturm in dem Borchardt Journ. (Bd. LXXXVIII, 1880 und Math. Ann. Bd. XXI.). Elegante Eigenschaften der Curven fünfter Ordnung endeckten Bertini (Collect. Math. Mailand 1881) und W. Stahl (Borchardt Journ. Bd. IC). Im Jahre 1882 wurden von der Berliner Akademie der Wissenschaften zwei Abhandlungen preisgekrönt, die eine von Halphen, „Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques“, die andere von Nöther, zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven (Berliner Abh. 1883, Journal für Math. Bd. XCIII). Beide bilden die Grundlage für eine allgemeine Theorie der Raumcurven.

Eine stattliche Reihe schöner Abhandlungen aus dem Gebiete der modernen Curventheorie auf projectivischer Grundlage verdanken wir auch dem dänischen Gelehrten H. G. Zeuthen, dessen „Trois mémoires de géometrie supérieure, Copenhague 1865—69“ seine „Recherches des propriétés générales des systèmes de courbes planes (Almindelige Egenskaber af plane Kurver, Kjobenhavn 1873) folgten, in welchen er interessante Sätze über die Gestalt ebener Curven und über Curvensysteme aufstellte. Wichtig ist auch seine in den Comptes rendus (Tom. LXXIV, LXXV et LXXXVIII) veröffentlichte Abhandlung „Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver“ über die Plückerschen Charakteristiken der Enveloppen, in welcher Zeuthen den Begriff des Geschlechtes einer Curve auf Systeme von Curven ausgedehnt hat. Die Ergebnisse seiner diesbezüglichen Untersuchungen bilden den Gegenstand der von diesem Gelehrten in den Forhandlingar af Videnskabs Selskab af Kjobenhavn 1873—79 veröffentlichten Abhandlungen. In der von den darstellenden Geometern geschätzten Abhandlung Zeuthens „Nouvelle démonstration de théorèmes“ (Math. Annalen, Bd. III, pag. 150, Leipzig 1871) untersuchte der Verfasser die Beziehungen zwischen den Geschlechtern zweier sich mehr-deutig entsprechenden Curven. Interessante Sätze über Curven vierter Ordnung und ihre Classification finden wir im X. Bande (V. Ser.) der bereits erwähnten Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Kopenhagen für das Jahr 1879 und im VII.—XLVI. Bande der Mathematischen Annalen (Leipzig 1874—95). In den ersteren (Kopenhagen 1879) finden wir die Abhandlung „Sur quelques-unes des propriétés de courbes du 4^{me} ordre à deux points doubles“, und in den letzteren (Leipzig 1873—76) auch die drei Abhandlungen „Sur les courbes du 4^{me} ordre“, „Sur une classe de points singuliers des surfaces“ und „La théorie des surfaces reciproques“. H. G. Zeuthen bestimmte die algebraischen Curven durch gegebene Punkte in seiner Abhandlung „Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés“ (Math. Ann. Bd. XXXI, Leipzig 1888) und die acht Durchschnittspunkte von drei Flächen zweiter Ordnung in der Abhandlung „Note sur les huits points d'intersection de trois surfaces du second ordre.“ (Acta Mathematica, Tom. XII, Stockholm 1889). Eine elementare Behandlung auf projectivischer Grundlage fanden die Curven zweiter Ordnung in dem Werkchen „Skelet af en elementaer-geometr. Keglesnitlaere, Kjobenhavn 1878“ (Grundriss einer elementar-geometr. Kegelschnittslehre, Leipzig 1882) und eine historische Besprechung in dem gediegenen Werke „Keglesnitslaeren i Oltiden, Kjobenhavn 1885“ (Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum“, deutsch von Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886).

Die einzigen rein synthetischen Untersuchungen über die Curven von höherer als zweiter Ordnung sind die von Dr. Reye [1]) über Raumcurven dritter Ordnung (s. s. Geometrie der Lage, II. Abth., III. Aufl., S. 188, Leipzig 1892); ferner über die projectiven Beziehungen und die Polarität der cubischen Raumcurven und Ebenenbüschel (S. 204), über conjugierte Punkte bezüglich einer cubischen Raumcurve (S. 217), ihre Bündel und invarianten Beziehungen zu Polarsystemen und cubischen Ebenenbüscheln (S. 223); endlich über ebene Curven dritter Ordnung (Ibid. III. Abth, S. 67), sowie über Raumcurven und Ebenenbüschel vierter Ordnung erster Art (S. 12), etc.; dann mehrere Abhandlungen von Thieme (Zeitschrift für Math. XXIV. Jahrg. u. Math.

[1]) S. a. die diesbezüglichen Abhandlungen von Herrn Dr. Theodor Reye im Journal für Mathematik, Bde. CIV—CVIII. u. Annali di Mathem. II. Ser. Tom. II.

Annalen Bd. XX und XXVIII), jene von Milinowski (Zeitschrift für Math., Jahrg. XXI u. XXIII; Journal für Math. Bd. LXXXIX u. XCVII) und von Schur (Zeitschrift für Math. Jahrg. XXIV) [1]) Hieher gehören auch die von der Berliner Akademie der Wissenschaften im Jahre 1868 preisgekrönten Abhandlungen „Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques" (Annali di Mat. Ser. II. Tom. III.) von H. J. S. Smith und „Geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades" (Bonn 1869) von H. Kortum; ferner seine im Jahre 1861 veröffentlichte Abhandlung „De proprietatibus linearum curvarum tertii ordinis synth. meth. ded. Bonn 1861". In besonders hohem Grade dazu berufen, die allgemeine Theorie der ebenen algebraischen Curven in das Gebiet der reinen Geometrie zu versetzen, ist die im Jahre 1886 von der Berliner Akademie der Wissenschaften mit dem Steinerschen Preise gekrönte Schrift „Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven" von E. Kötter, welche in den Berliner Abhandlungen vom Jahre 1887 veröffentlicht wurde.

Zu den letzten und schönsten Arbeiten Schröters auf dem Gebiete der neueren Geometrie gehört neben seiner synthetischen Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung (Leipzig 1888) auch das zwei Jahre vor seinem Tode veröffentlichte Werk „Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumcurve vierter Ordnung erster Species, Leipzig 1890", in welchem er die Eigenschaften der bereits von Clebsch nach neueren analytischen Methoden untersuchten vollständigen Schnittcurven zweier Oberflächen zweiter Ordnung mittelst rein-geometrischer Untersuchungen erforschte und auf dem naturgemäßen Wege zu der bereits von A. Harnack in den Math. Annalen (Bd. XII, S. 47, 1877) angegebenen Erzeugung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species durch Punkttripel, sowie zu den interessanten Beziehungen der Wendeberührungspunkte dieser Raumcurve gelangte.

Die Raumcurven vierter Ordnung zweiter Species bilden auch den Gegenstand einer Abhandlung, welche K. Rohn im XLIII. Bande der Berichte der königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig im Jahre 1891 veröffentlicht hat.

Wie die synthetische Behandlung der Curven dritter und vierter Ordnung, so gehört auch die synthetische Theorie der Flächen dritten und vierten Grades ganz der zweiten Hälfte des XIX. Jahrhundertes an. Mit Ausnahme weniger Sätze gehört auch die analytische Theorie dieser algebraischen Flächen derselben Zeitperiode an. Wenn auch Cayley und Salmon schon im Jahre 1849 im II. und IV. Bande

---

[1]) S. a. die Abhandlung von Hurwitz in den Math. Annalen, Bd. XX. S. 135.

des Cambridge und Dublin Mathem. Journal die Geraden einer cubischen Fläche bestimmt haben, und Sylvester im Jahre 1851 im VI. Bande derselben Zeitschrift von der Entdeckung des Pentaeders einer cubischen Fläche Mittheilung gemacht hatte, so stehen diese Forschungen englischer Geometer doch ganz isoliert da, während Steiners berühmter Vortrag „Über die Flächen dritten Grades“ in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 31. Jänner 1856 an der Spitze einer langen Reihe von Abhandlungen steht, durch welche die Theorie der Flächen dritter Ordnung in verhältnismäßig kurzer Zeit einen ungehofften Grad der Vollendung erhielt. Wir nennen die Abhandlung „Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen“ (Crelles Journ. Bd. XLIX, S. 47, Berlin 1854) von Grassmann; ferner jene „Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung“ (Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. XLIX, S. 279, Berlin 1854) von Dr. O. Hesse; „Intorno ad alcune proprietà delle superficie del terz' ordine“ (Annali di scienze matematiche e fisiche, Roma 1855) von Fr. Brioschi, „An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order“ (Quarterly Journal of Mathematics, Vol. II. 1858) von Schläfli, sowie seine Schrift „On the distribution of surfaces of the third order into species“ (Philosophical Transactions 1863), die analytische Abhandlung „Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis“ (Dissertatio inauguralis Berolini 1862) von August, welcher in dieser Abhandlung noch eine fünfte Erzeugungsweise der Flächen dritten Grades mittheilte. In dem Zeitraume 1861—1866 beschäftigte sich auch Alfred Clebsch mit Curven und Flächen dritten Grades und veröffentlichte die Resultate seiner Forschungen im LVIII., LIX., LXIII., LXIV. und LXV. Bande des Borchardtschen Journals für Mathematik. Dr. H. Schröter, Professor an der Universität zu Breslau, betrachtete die Fläche dritter Ordnung als Erzeugnis von drei collinearen Strahlenbündeln und veröffentlichte seinen „Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung“ im LXII. Bande (S. 265, Berlin 1863) des Borchardtschen Journals. Eine weitere Untersuchung von Schröter über die Flächen dritten Grades finden wir im XCVI. Bande des Journals für Mathematik (Berlin 1884).

In der Sitzung der Berliner Akademie der Wissenschaften vom 5. Juli 1866 wurde der Steinersche Preis für synthetische Geometrie zum ersten Male zur Hälfte zwei berühmten Abhandlungen über Flächen dritten Grades zuerkannt, und zwar den Abhandlungen „Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre“ von Dr. Luigi Cremona und „Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung“ von Dr. Rudolf Sturm, ord. Lehrer am königl. Gymnasium zu Bromberg. Das erstgenannte preisgekrönte Memoire veröffentlichte Herr Dr. Cremona, der im Jahre 1866 seine Professur an der Universität zu Bologna mit einer Lehrkanzel für höhere Geometrie an der eines glänzenden Rufes sich erfreuenden königl. polytechnischen Schule zu Mailand vertauscht hatte, im LXVIII. Bande (S. 1—133) des Journals für Mathematik (Berlin 1868). Die ausgezeichnete, 388 Seiten umfassende Abhandlung von Herrn Dr. Rudolf Sturm, der als ord. Professor an das Polytechnicum in Darmstadt und später an die königl. Universität zu Breslau berufen wurde, erschien im Jahre 1867 bei B. G. Teubner in Leipzig. Bald darauf veröffentlichte Cremona im VI. und VII. Bande (II. Ser. S. 9—136 und S. 19—78) der Memorie dell' Accademia delle Scienze dell Istituto di Bologna sein berühmtes Werk „Preliminari di una teoria geometrica delle superficie", welches als Musterwerk der Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung in allen Culturstaaten die beste Aufnahme fand und im Jahre 1870 auch in Berlin, von Maximilian Curtze, ord. Lehrer am Gymnasium zu Thorn unter Mitwirkung des Verfassers ins Deutsche übertragen, veröffentlicht wurde.

Einen hohen bildenden Wert legte Herr Prof. Cremona, der schon vor dreißig Jahren die neuere Geometrie und graphische Statik in die Hochschulen Italiens eingeführt und seit 1873 als Director der von ihm reorganisierten königl. technischen Hochschule in Rom und als Professor der höheren Geometrie an der Universität, seit 1879 als Senator und Mitglied des „Consiglio superiore" im Ministerium das höhere Unterrichtswesen Italiens in moderne Bahnen gelenkt hat, sowohl in seinen „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane" als auch in seinen „Preliminari di una teoria geometrica delle superficie" auf eine sorgfältige Pflege der Geschichte der Mathematik. Der Jünger der Wissenschaft wird — nicht mit verbundenen Augen, wie es noch vor einem Vierteljahrhundert der eitle Glanz so mancher Lehrkanzel mit sich brachte — in die Geschichte der Geometrie eingeführt. Auf Schritt und Tritt stellt ihm Cremona theils vor, theils nach erfolgter Mittheilung curven- und flächentheoretisch wichtiger Sätze, bald aus Frankreich oder Deutschland, bald aus England oder Italien und anderen Ländern akademische Magnificenzen in des Wortes vollster Bedeutung vor und macht ihn zur rechten Zeit und an rechter Stelle mit ihren Forschungen bekannt. So lernt der Jünger der Wissenschaft bald die Bedeutung älterer geometrischer Forschungen von Wren, Newton, Maclaurin, Leibniz, Euler u. A. kennen, um sich früher oder später in die Forschungen der neufranzösischen Schule zu vertiefen; er lernt Monge, Carnot, Hachette, Dupin, Brianchon, Poncelet, Gergonne, Bobillier, Chasles, Lamé, Liouville

Jonquières, Moutard, Painvain, J. de la Gournerie, Mannheim u. A. bedeutende französische Geometer kennen, deren Arbeiten mit jenen der hervorragendsten Forscher Deutschlands, wie Möbius, Steiner, Plücker, Jacobi, Hesse, Seydewitz, Grassmann, Schröter, Clebsch, Schläfli, Kummer, Klein, Bischof, Schwarz, Fiedler, Reye, Sturm und vielen Anderen oft gleiche Ziele verfolgten.

Nach und nach vertieft er sich in die bahnbrechenden Forschungen britischer Geometer, wie Salmon, Cayley, Sylvester, Hart, etc., lernt die Arbeiten italienischer Forscher wie Battaglini, Bellavitis, Brioschi, Cremona, Schiaparelli, Veronese, etc. schätzen und gewinnt mit den modernen Forschungen norwegischer und dänischer Mathematiker wie Lie, Zeuthen und noch vielen andern hervorragenden Gelehrten eine erwünschte Übersicht über den wissenschaftlichen und historischen Ausbau der ganzen Geometrie in ihrem gegenwärtigen Stande.

Dass Herr Prof. Cremona in seinem „Preliminari“ die Theorie der Flächen zweiter, dritter und beliebiger Ordnung und Classe, die abwickelbaren und windschiefen Flächen, die Polarflächen und die Enveloppen der Polarebenen, die projectivischen Flächenbüschel und Flächennetze, die symmetrischen Complexe und Eigenschaften der conjugierten Kernflächen und besonders im dritten Theile seines geschätzten Werkes die Theorie der Flächen dritter Ordnung, insbesondere ihre Eigenschaften, Singularitäten und Quadriflächen, ihre Abbildung und Classification einer ausgezeichneten synthetischen Betrachtung unterzogen hat, ist bei dem glänzenden Rufe dieses im Auslande so geschätzten Gelehrten selbstverständlich. Cremonas Ruf führte bekanntlich im Jahre 1870 den absolv. Hörer des polytechnischen Institutes in Prag und Privatdocenten für neuere Geometrie an der Universität zu Prag, Emil Weyr, — geboren am 1. October 1848 in Prag, gestorben am 25. Jänner 1894 als Professor der Mathemetik an der Universität in Wien — nach Mailand, wo er am „Regio Istituto tecnico superiore“ die Vorlesungen Cremonas über höhere Geometrie besuchte und unter der persönlichen Einwirkung dieses Forschers sich ganz der Pflege der synthetischen Geometrie innerhalb der Chasles-Cremonaschen Richtung widmete. Die rein geometrische Richtung, welche von Staudt und Reye verfolgten, hatte auf Dr. Emil Weyr, den zuerst Herr Professor Dr. Wilhelm Fiedler im Studienjahre 1865—66 am Prager Polytechnicum in die neuere Geometrie eingeführt hatte, wenig Einfluss genommen. Innerhalb der ersteren, besonders durch Cremona beeinflussten Richtung bahnte sich aber E. Weyer in seinen etwa einhundertfünfzig Abhandlungen als bedeutendster Schriftsteller auf dem

Gebiete der neueren höheren Geometrie in Österreich seinen eigenen Weg. Nachdem er nach Erlangung des Doctorates der Philosophie an der Universität zu Leipzig die Hindernisse, welche sich seiner angestrebten Privat-Docentur an der Prager Universität entgegengestellt hatten, wirkungslos gemacht hatte, veröffentlichte er im Jahre 1870 bei B. G. Teubner in Leipzig sein bekanntes Werk „Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung." Ein Jahr vorher hatte er als Assistent des deutschen polytechnischen Institutes in Prag seine „Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse" (Leipzig 1869) veröffentlicht, in deren zweiten Theile (S. 78—156) die Geometrie der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, der Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente und der Curven dritter Ordnung, dritter Classe eine elegante und geistreiche Behandlung auf neugeometrischer Grundlage fand.

Ihre weitere, mit den fundamentalen invarianten Formen der quaternären cubischen auf Null reducierten Form zusammenhängende Behandlung mittelst homogener Coordinaten erhielt die Fläche dritter Ordnung durch Salmon in den Phylosophical Transactions (Vol. 150, pag. 229, London 1860) und in seiner „Analytic Geometry of three dimensions, Dublin 1865" (deutsche Ausgabe von Dr. W. Fiedler, III. Aufl. II. Bd. S. 418 „Invarianten und Covarianten einer Fläche dritter Ordnung", Leipzig 1880); ferner von Gordan (Math. Annalen, Bd. V, Leipzig 1872) und de Paolis (Memorie dell' Accademia dei Lincei, Roma 1880—81), während sich Jordan in seinem „Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris 1870" (Liouvilles Journal, II^e sér. Tome XIV) eingehend mit der Gleichung beschäftigte, die zur Bestimmung der Geraden einer cubischen Fläche dient.

Zu den vier Erzeugungsweisen der Flächen dritter Ordnung, welche Steiner der Berliner Akademie im Jahre 1856 mitgetheilt hatte, kamen in den folgenden Jahren noch hinzu die von Grassmann (Journal f. Math. Bd. LI, Berlin 1856), August (Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis, Berolini 1862), die projectivische Erzeugung der allgemeinen Flächen dritter Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung von Reye (Math. Annalen, Bd. I, S. 455, Leipzig 1869); ferner jene von Affolter (Archiv der Math. u. Phys. LVI. Bd. S. 113, Greifswald 1870). Piquet (Bulletin de la Soc. math. Tom. IV), ferner die von H. Schubert (Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden." (Math. Annalen, Bd. XVII, S. 457, Leipzig 1880), die „Lineare Constructionen zur Erzeugung der cubischen Fläche" (Journal für Math. Bd. VCI, Berlin 1884) von Schröter, die von Le Paige (Acta mathematica, Tom. III, Stockholm 1885) und jene von G. Kohn (Über eine neue Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung". (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, IC. Bd., S. 683, Jahrg. 1890). Mit den auf der cubischen Fläche liegenden Geraden beschäftigte sich L. Cremona in der Abhandlung „Sulle ventisetti rette di una superficie del terzo ordine" in den Rendiconti dell' Istituto Lombardo (Ser. II, tomo III°, Milano 1870); die von den Geraden der cubischen Fläche gebildeten Polygone untersuchten Affolter (Archiv der Math. u. Phys. LVI. Th.) und H. G. Zeuthen in seiner schönen Abhandlung „Etudes des propriétés de situation des surfaces cubiques" (Math. Annalen, Bd. VIII, S. 1, Leipzig 1875). Die Theorie der Polaren und der Steinerschen Kernfläche vierter Ordnung einer cubischen Fläche, ihre Curven, Knotenpunkte und dreifach berührenden Ebenen, die Realität ihrer Geraden, sowie die weiteren Situationseigenschaften der Flächen dritten Grades, insbesondere jene die sich auf die interessante Configuration ihrer 27 Geraden und der von ihnen gebildeten Pentaeder und Hexaeder beziehen, studierte in gründlichster Weise R. Sturm in seinen Herrn Prof. Dr. Weierstrass gewidmeten Werke „Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867" (III., IV., VII. Cap. etc.) und später, nach seiner Berufung an die Akademie zu Münster, in der Abhandlung „Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung" (Borchardts Journal LXXX. Bd. S. 213—240) welche er als Fortsetzung seiner preisgekrönten synthetischen Theorie der Flächen dritter Ordnung veröffentlichte; ihr folgte im Jahre 1884 die schöne Abhandlung „Über die 27 Geraden der cubischen Fläche" (Math. Annalen Bd. XXIII, S. 289—310), die sich ausschliesslich mit den interessanten Configurationen dieser Geraden und den sich hieraus ergebenden Erzeugungsweisen der cubischen Fläche beschäftigt. In den letzten Jahren haben insbesondere das sogenannte desmische System von drei Tetraedern bei Flächen dritter Ordnung und die mit denselben zusammenhängende, zuerst von Steiner untersuchte Kernfläche vierter Ordnung die Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen. Sie finden in den Arbeiten über Strahlensysteme zweiter Classe und ihre Reciprocitätsverhältnisse von Kummer (Abhandlungen der Berliner Akad. 1866), Sophus Lie (Göttinger Nachr. 1870) und Reye (Journ. für Math. u. Geom. der Lage) ihre wissenschaftliche Grundlage.

Es sind dies die Abhandlungen „Sur les systèmes desmiques de trois tetraèder" (Bulletin des sciences mathématiques, II.° série, tom. III, pag. 424, Paris 1879) von Stephanos, „Sopra alcune note voli configurazione" (Memoire della Reale Accademia dei Lincei, Roma 1881) von Veronese, „Die Hexaeder- und Octaeder-Configurationen"

(Acta mathematica I., Stockholm 1883) von Reye und die Abhandlung „Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung“ (Journal für Math. Bd. VC, S. 207, Berlin 1883) von F. Schur. Hieher gehören auch die Untersuchungen von Bertini (Lombardo Rendiconti 1884 ed Annali di Matem. IIª ser. Tom. XII), Cremona in seiner Schrift „Über die Polar-Hexaeder bei Flächen dritter Ordnung“ (Mathem. Annalen, Bd. XIII, S. 301, 1878 und Memorie dell'Accademia dei Lincei, 1876—77), Caporali (Napoli Rendiconti 1881), Reye (Journal für Math. Bd. LXXVII, S. 117, 1874, sowie in seiner „Geometrie der Lage,“ 3. Abth., XIII. Vortrag „Die Polhexaeder der cubischen Fläche und das Pentaeder ihrer Kernfläche,“ S. 113—123, Leipzig 1892) und Beltrami (Lombardo Rendiconti 1879). Von den entdeckten zwölf vollständigen, der cubischen Fläche eingeschriebenen Pentaedern machte H. G. Zeuthen im V. Bande der Acta mathematica (Stockholm 1886) Mittheilung. Die auf die Betrachtung der 27 Geraden gestützte Classification der Flächen dritter Ordnung vollzog zuerst L. Schläfli, Professor der Universität Bern, (geb. 1814, gest. 1895) in den Philosophical Transactions vom Jahre 1863, sechs Jahre später Cayley (Phil. Transactions 1869) und die auf das Pentaeder gegründete neuere Eintheilung Prof. C. Rodenberg in Darmstadt in seiner Abhandlung „Zur Classification der Flächen dritter Ordnung“ (Mathem. Annalen, Bd. XIV, S. 46, Leipzig 1879). Die ersten streng-wissenschaftlichen Untersuchungen auf neugeometrischen Principien über Regelflächen finden wir in Plückers „Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés“ (Gergonne Annales de Math. Tome XIX, Nismes 1828—29); ihre weiteren Untersuchungen finden wir in Chasles „Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite“ (Correspondance math. et phys. de Bruxelles, tome XI) und in seinem Memoire über die Regelflächen dritten und vierten Grades (Comptes rendus, tome LIII, Paris 1861). Die eigentliche Erforschung der windschiefen Regelflächen dritten Grades verdanken wir aber hauptsächlich Herrn Prof. Cremonas Abhandlungen „Memoria sulle superficie gobbe del terz' ordine“ (Atti del Istituto Lombardo, Tomo IIº, Milano 1861) und „Sur les surfaces gauches du troisième degré“ (Borchardt Journal Bd. LX, Berlin 1862); ihre Classification vollendete Cremona in einem Memoire, welches er in dem VIII. Bande der Memorie del Reale Istituto die Bologna im Jahre 1868 veröffentlichte. Mit der Theorie der Regelflächen dritten Grades hängt bekanntlich die Theorie der Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art auf das innigste zusammen, da sich diese Raumcurven durch den theilweisen Schnitt einer Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche zweiter Ordnung ergibt. Eine treffliche Behandlung erfuhren dann die windschiefen Regelflächen dritter Ordnung in den wertvollen Arbeiten von Cremona (Lombardo Rendiconti, 1867), Em. Weyr (Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde, Leipzig 1869 und Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein- zweideutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung, Leipzig 1870); ferner von Benno Klein in seiner Inaugural-Dissertation „Über die geradlinige Fläche dritter Ordnung und deren Abbildung auf eine Ebene, Strassburg 1876", S. Kantor in Prag (Über eine ein-dreideutige ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung", Journal f. Mathematik VC. Band, Berlin 1883), G. Kohn in Wien (Über die Sextapel von geraden Linien, welche von sämmtlichen Punkten einer cubischen Fläche als sechs Tangenten eines Kegelschnittes gesehen werden". (Monatshefte für Math. u. Phys. II. Jahrg. S. 293, Wien 1891) und von Th. Reye in seiner „Geometrie der Lage" (III. Aufl. 3. Abth. S. 89, Leipzig 1892). Wir erwähnen noch die neueren Abhandlungen von „Über die Flächen dritter Ordnung und vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, insbesondere über deren Geraden" von K. Küpper (Zeitschrift für Math. u. Phys. XXXIV. Bd., S. 129, Leipzig 1889), ferner die „Untersuchung der Fläche dritter Ordnung hinsichtlich der projectiv verallgemeinerten Mittelpunkts-Eigenschaften" von K. Stolz (Inaugural-Dissertation Giessen 1890) und „Sulle superficie cubiche, la cui Hessiana si spezza" von E. Ciani (Atti della Reale Accademia dei Lincii. Rendiconti Tom. VI, pag. 55, Roma 1890).

Während die analytische und synthetische Theorie der Flächen dritter Ordnung mit Ausnahme ihrer ersten analytischen Untersuchungen, die sich in einer Correspondenz zwischen den Herren Salmon und Cayley aus dem Jahre 1849 vorfinden, ganz der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhundertes angehört, finden wir die ersten descriptiven und analytischen Untersuchungen über Raumcurven und Flächen vierter Ordnung schon in der ersten bez. in der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhundertes auf französischem Boden. Wie bereits erwähnt, waren Frézier, Ingenieur-Officier im französischen Geniecorps, und Monge die ersten Geometer, welche in ihren Werken „La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, Strasbourg 1738—39" und „Géométrie descriptive, Paris 1795" die Raumcurven vierter Ordnung als Durchdringungscurven zweier Flächen zweiten Grades construierten und auch näher untersuchten. Die windschiefen Flächen vierter Ordnung waren schon lange im technischen Leben Frankreichs im Gebrauch, bevor sie eine auf streng wissenschaftlichen Grundlagen ruhende theoretische Untersuchung fanden. Frézier beschäftigte sich auch mit einer windschiefen Regelfläche vierten Grades, welche die beiden schiefen und verschobenen Schnittcurven einer Cylinderfläche zweiter Ordnung zu Leitlinien hat, der er den Namen „Cylindroid“ gab. Es besitzt nach neueren Untersuchungen eine unendlich ferne Doppelgerade und zwei Torsallinien, deren Spitzen auf der unendlich fernen Doppelgeraden liegen, die eine Cuspidalgerade dieser Fläche vierten Grades ist. Monge war der erste Mathematiker, der in seinem berühmten Werke „Application de l'Analyse à la Géométrie, Paris 1795“ (pag. 89) die Wölbfläche des schiefen Einganges (la surface du biais passé) und das sogenannte Kernbogen-Gewölbe (la surface de l'arrière-voussure de Marseille) — zwei technisch wichtige Flächen vierter Ordnung — analytischen Betrachtungen unterzog. Monges genialer Schüler Dupin entdeckte und untersuchte in seinem Werke „Applications de Géométrie et de Méchanique, Paris 1822“ die Cyklide, eine Fläche der vierten Ordnung, welche er als die Enveloppe einer Kugel erkannte, die sich so fortbewegt, dass sie immer drei feste Kugeln berührt. Die Wellenfläche (la surface d'élasticité ou la surface des ondes), eine Aspidalfläche vierter Ordnung, welche in der mathematischen Theorie des Lichtes eine fundamentale Bedeutung hat, zog zuerst Fresnel, ein berühmter Gelehrter der Mongeschen Schule, bei seinen interessanten Untersuchungen über die doppelte Strahlenbrechung in dem „Mémoire sur la double réfraction“ (Recueil des Savants étrangers, Paris 1821 und „Mémoire de l'Institut, Tom. VII, pag. 136, Paris 1827) in den Kreis seiner analytischen Forschungen. Diese aus zwei Mänteln bestehende Fußpunktfläche, welche nach W. R. Hamiltons Untersuchungen (Transactions of the Royal Irisch Academy, vol. XVII, Dublin 1837) vier Knotenpunkte mit vier längs Kreisen berührende Tangentialebenen besitzt und deren weiteren Eigenschaften Mac Cullagh (Ibid., pag. 248) und Plücker (in der Abhandlung „Discussion de la forme générale des ondes, lumineuses“ (Crelles Journal, Bd. XIX, S. 1 und 91, Berlin 1839) erforschten und deren Cubatur W. Roberts (Annali di Matematica, Tomo IV° pag. 345, Roma 1861) in eleganter Weise bestimmte, bildete in der Folge den Gegenstand zahlreicher Untersuchungen in der höheren Functionen- und Flächentheorie.[1]) Ihre Eigenschaften und Singularitäten ergeben sich auch in einfachster geometrischer Form durch ihre Ableitung als Fußpunktfläche des dreiachsigen Ellipsoides.[2])

Eine bei den architektonischen Formen des Hochbaues vielgebrauchte und im Maschinenbau oft benützte Fläche vierten Grades

[1]) S. a: F. J Obenrauch, Zur Transformation und Reduction von Doppelintegralen mittelst elliptischer Coordinaten. S. 55. Neutitschein 1892.

[2]) S.: G. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes. II. Bd. S. 324—336. Leipzig 1880.

ist die Ring- oder Wulstfläche (Torus). Die Ringfläche, auch Rotationscyklide genannt, ist ein besonderer Fall der Dupinschen Cyklide und die einfachste, in der technischen Praxis am häufigsten vorkommende Umhüllungs- und Umdrehungs-, oder Rotationsfläche des vierten Grades. Sie wird durch Ebenen, welche parallel zur Umdrehungsachse sind, nach Cassinischen Curven (Lemniscata Bernoulliana) geschnitten. A. Bordoni gab in seiner analytisch durchgeführten Abhandlung „Sopra le linee uniformemente illuminate" (Giornale di fisica, Pavia 1823) die Bestimmung ihrer Schattengrenzpunkte mittelst eingehüllter Kugeln, die er als berührende Hilfsflächen der Ringfläche benützte. Im J. 1854 gab Dunesme im XXVIII. Bande der Comptes rendus (pag. 953) eine einfache affine Construction des Selbst- und Schlagschattens eines Ringes bei Parallelbeleuchtung für den allgemeineren Fall an, dass jede der beiden symmetrischen Meridianhälften der Fläche ein Kegelschnitt sei; er zeigte später (Comptes rendus, Tome XLV, pag. 527, Paris 1857) dass die Projection der Selbstschattengrenze auf eine zur Umdrehungsachse des Ringes senkrecht stehende Ebene als eine verallgemeinerte Conchoide aufgefasst werden könne, und bewies, dass die Schlagschattengrenze auf dieselbe Ebene die Äquidistante einer Ellipse ist, oder allgemeiner, dass für irgend einen leuchtenden Punkt die Schlagschattengrenze jeder Umdrehungsfläche auf eine zu ihrer Achse senkrechte Ebene zur Evolute die Einhüllende des Schattens des Conoides hat, dessen Erzeugende die von den Punkten der Selbstschattengrenze auf die Achse gefällten Senkrechten sind.[1])

Die Ringfläche, mit deren verschiedenen Gestalten und Rauminhaltsbestimmungen sich bekanntlich Kepler schon am Beginn des XVII. Jahrhundertes in seiner „Nova Stereometria Doliorum, Lincii MDCXV" so vielfach beschäftigt hatte, bildete auch in der zweiten Hälfte dieses Jahrhundertes in ihrer allgemeineren Gestalt als Cyklide den Gegenstand interessanter Forschungen auf dem Gebiete der neueren Geometrie. Schon die fünfzig verschiedenen Formen der ebenen Schnittcurve der gewöhnlichen Ringfläche, die sich aus den besonderen Lagen der schneidenden Ebene ergeben, mit ihren Singularitäten, als Doppel- und Undulationstangenten, Doppel- und Inflexionspunkten, etc. mussten das besondere Interesse der darstellenden Geometer in Anspruch nehmen. Noch mehr gilt dies von der Dupinschen Cyklide, welche nach Prof. Mannheims Untersuchungen (Nouvelles Annales, Tome XIX, pag. 67, Paris 1860) in Beziehung auf gewisse Punkte sich selbst invers ist und

[1]) S.: Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geometrie. II. Bd. S. 181. Leipzig 1887.

folglich zu den anallagmatischen Flächen gehört. Der geschätzte französische Forscher fand in seiner Abhandlung, dass die Dupinsche Cyklide, welche in die Flächenfamilie der Cykliden, d. i. jener Familie von Flächen vierter Ordnung gehört, deren Doppelcurve der unendlich ferne Kreis ist, fünf Inversionscentra besitzt, für welche diese Fläche in sich selbst übergeht. Diese fünf Inversionscentra liegen so, dass jedes von ihnen im Durchschnitt der vier Höhen des von den übrigen vier gebildeten Tetraeders liegt. Mit der Flächenfamilie der Cykliden beschäftigten sich Moutard („Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre", Nouvelles Annales, tome XXIII[e] und Comptes rendus, tome LIX[e], Paris 1864); ferner Darboux (Comptes rendus, tome LXVIII[e], Paris 1869), Casey in seiner Abhandlung „On Cyclides and Sphero-Quartics" (Philos. Transactions, Vol. 161, London 1871) und A. Clebsch in seiner Schrift „Über den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abelschen Functionen" (Math. Ann. Bd. III, S. 45, Leipzig 1871). Eine ausgezeichnete Abhandlung mit vortrefflichen stereographischen Abbildungen der einzelnen Formen der Dupinschen Cyklide als Ring-, Spindel- und Horncyklide, sowie der parabolischen Cyklide mittelst ihrer Krümmungskreise, veröffentlichte Maxwell im IX. Bande des Quaterly Journals (pag. 111), Cambridge 1867.

Eine frühzeitige und vielfache Verwendung fanden in der Baukunst die windschiefen Regelflächen vierter Ordnung mit einer unendlich fernen Leitgeraden, die sogenannten geraden und schrägen Conoide, u. zw. die Wölbfläche des Eingangs in den runden Thurm, die Wölbfläche des schiefen Eingangs (la surface du biais passé gauche), das gerade und schräge Kegelschnittconoid und das Kugelconoid (conoïde droit circonscrit à une sphère), und endlich das Fréziersche Cylindroid.

Diese technisch-wichtige Familie windschiefer Regelflächen vierter Ordnung fand besonders in Frankreich eine ganze Reihe hervorragender Geometer, welche sich mit ihrer descriptiven Construction und mit der analytischen Erforschung ihrer Eigenschaften beschäftigten. Noch mehr gilt dies von den beiden Schraubenflächen, der windschiefen (hélicoïde réglé) und der abwickelbaren Schraubenfläche (hélicoïde développable), deren ersten strengwissenschaftlichen Untersuchungen wir Monge und Meusnier verdanken. Die auf neueren Grundlagen durchgeführten Untersuchungen und besonders sorgfältigen descriptiven Darstellungen dieser Flächen finden wir in den Abschnitten „Surfaces gauches" und „Surfaces hélicoïdes" in dem an trefflichen Einzelnheiten so reichen Werke von J. de la Gournerie „Traité de géométrie descriptive, Paris 1860 bis 1864".[1]) Wertvolle Untersuchungen über Conoide und Schraubenflächen verdanken wir auch britischen Forschern. Mit dem geraden Kreisconoid (Cono-cuneus) beschäftigte sich schon John Wallis (1616—1703), Professor der Geometrie in Oxford.[2]) Die gediegenen Abhandlungen über Schraubenflächen „On the theory of skew surfaces" (Cambridge and Dublin mathematical Journal, Tom. VII, 1852) und „First, second and third Memoir on skew surfaces otherwise Scrolls (Philosophical Transactions, London 1864—68 von Cayley haben wir bereits erwähnt. Ihre weitere Ausbildung erfuhr die Theorie der Schraubenflächen in den „Researches in the Dynamics of a rigid body by the aid of the theory of Screws" (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1874) von R. S. Ball, in welchen er von dem zuerst von Plücker in seiner „On a new Geometry of space, London 1865"[3]) beim Studium der linearen Complexe entdeckten geraden Ellipsenconoid, einer Fläche dritter Ordnung, welcher Cayley in seiner Abhandlung „On skew surfaces or Scrolls" (Ibid. London 1864—68) den Namen „Cylindroid" gab, vielfache Anwendungen machte.[4]) Diese beiden für die Geomechanik wichtigen Flächen bilden den Gegenstand mehrerer von R. S. Ball seit dem Jahre 1881 veröffentlichten Abhandlungen, unter welchen wir nur die mit der Dynamik und Kinematik auf das engste zusammenhängenden geometrischen Forschungen erwähnen, u. z. „On homographic Screw Systems" (Dublin 1881—84), „Extension of the theory of Screws" (1882), „Contribution to the theory of Screws (1883), „On the Cinematic and Dynamic of a rigid System in elliptic

[1]) J. de la Gournerie, Traité de géométrie descriptive. Tome II^{e}, art. 613—639 et tom. III^{e} art. 956—967, 1042—1053. Paris 1862—64. Seconde édition Paris 1873.

[2]) S. s. „Opera mathematica," Oxford 1695—99.

[3]) S. a.: J. Plücker, Neue Geometrie des Raumes. Herausgegeben von A. Clebsch. S. 97. Leipzig 1868—69.

[4]) Vergl.: A. Mannheim, Cours de géométrie descriptive de l'École polytechnique. Pag. 441. Paris 1880.

Anmerkung: Das allgemeine Conoid, dessen Leitgerade mit dem Kegelschnitt keinen Punkt gemein hat, ist vom vierten Grade. Bewegt sich aber eine Gerade so, dass sie in jeder Lage einen Kegelschnitt und eine Gerade schneidet, welche mit diesem Kegelschnitt einen Punkt gemein hat, und bleibt dieselbe außerdem stets zu einer festen Ebene parallel, so erzeugt sie eine Regelfläche dritten Grades, das cubische Conoid. Bewegt sich hingegen eine Gerade so, dass sie stets ein einfaches Hyperboloid in Punkten einer und derselben Erzeugenden berührt und nebstbei einen Kegelschnitt, welcher mit dieser Erzeugenden einen Punkt gemein hat, schneidet, so erzeugt sie die Cayleysche Regelfläche dritten Grades, für welche die genannte Erzeugende des Hyperboloides die vereinigte Doppel- und einfache Leitgerade repräsentiert. (Cayley, On Scrolls, Philosophical Transactions. Pag 559. London 1864).

space (1884), „Dynamics and modern Geometry" („A new chapter in the theory of Screws," Dublin 1887) und „On the plane section of the Cylindroid (Dublin 1888).

Wenn auch die Theorie der Flächen vierter Ordnung noch nicht den gleichen Grad wissenschaftlicher Vollendung erreicht hat, den die Theorie der Flächen dritter Ordnung heute besitzt, so haben wir auch auf diesem Gebiete der neueren Geometrie schon eine ganz beachtenswerte Reihe schöner Abhandlungen zu verzeichnen. Wie bereits bemerkt, entdeckte Steiner die römische Fläche im Jahre 1844 auf seiner Reise in Italien. Sie hat nach Steiners Tode wiederholt die Aufmerksamkeit der bedeutendsten Mathematiker des Continentes auf sich gelenkt. Wir nannten bereits Kummer, der sie im Jahre 1863 selbst entdeckte; ferner Cremona, Schröter, Sturm und Reye, denen wir ausgezeichnete synthetische Untersuchungen verdanken, während Cayley Beltrami, Clebsch, Eckard, Laguerre, Gerbaldi, Darboux, Picard u. A. ihre in homogenen Coordinaten durchgeführten Forschungen analytisch vollzogen. Insbesondere bewiesen Cremona (Journ. f. Math. Bd. LXIII, 1864 und Lomb. Rend. 1867) und Clebsch (Journ. f. Math. Bd. LXVII, 1867), dass die asymtotischen Curven (Haupttangenten-Curven) der Steinerschen Fläche rationale Curven vierter Ordnung sind. Im Bulletin des sciences math. (IIe sér. Tom. IV.) zeigte G. Darboux, dass sie die einzige Fläche ist, bei welcher außer den Flächen zweiten Grades und den Regelflächen dritten Grades durch jeden Punkt unendlich viele Kegelschnitte gehen und Picard bewies im Journal für Math. (Bd. C, Berlin 1886), dass sie die einzige nicht geradlinige Oberfläche ist, deren sämmtliche ebenen Schnitte rationale Curven sind. Mit dieser Eigenschaft der römischen Fläche beschäftigte sich auch Guccia in den Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Tomo I°, während Lie im III. Bande des Archiv for Math. og Naturvidenskab (Christiania 1878) die interessante Mittheilung machte, dass der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Kegelschnitte einer Steinerschen Fläche eine ebensolche Fläche ist.

Wie die nach Steiner, Jacobi, Hesse und Cayley benannten Curven in der Polarentheorie der höheren Curven eine hervorragende Rolle spielen und eine vielfache Durchforschung mittelst analytischer und synthetischer Methoden erfuhren, so waren insbesondere die nach Steiner und Hesse benannten conjugierten Kernflächen der allgebraischen Flächen in den letzten drei Decennien der Gegenstand äußerst interessanter Forschungen. Die Definition der einen Fläche dritten Grades conjugierten Kernfläche vierten Grades als gemeinsamen Ort aller reciproken Pole der Fundamentalfläche theilte Steiner der Berliner

Akademie der Wissenschaften am 31. Jänner 1858 mit.[1]) Eine eingehende Untersuchung über die reingeometrische Theorie der Steinerschen Kernfläche vierter Ordnung finden wir in Cremonas „Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre“ (Borchardts Journal, Bd. LXVIII, S. 34, Berlin 1868) und im vierten Capitel „Die Kernfläche einer cubischen Fläche“ (S. 127—180) des Werkes „Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung“ (Leipzig 1867) von Dr. Rudolf Sturm. Die reingeometrische Theorie der conjugierten Kernflächen erweiterte Dr. E. Cremona in seinem Werke „Preliminari di una teoria geometrica delle superficie“ (Bologna 1862, ins Deutsche übertragen von M. Curtze, Berlin 1870) im X. Capitel (S. 137—151) auf algebraische Flächen n-ter Ordnung. Bekanntlich bilden die ersten Polarflächen aller Punkte des Raumes ein lineares System der (n—1)-ten Ordnung. Der geometrische Ort der Doppelpunkte der ersten Polarflächen, oder der Ort der Punkte, deren Quadripolarflächen Kegel sind, also die Jacobiana dieses Systems, heißt die Hessesche Kernfläche oder „Hessiana“ der Fundamentalfläche und ist von der 4 (n—2)-ten Ordnung. Sie besitzt $10(n-2)^3$ Doppelpunkte, die auf einer unbegrenzten Zahl von Flächen 3(n—2)-ter Ordnung liegen. Der gemeinsame Ort der Pole einer Fundamentalfläche n-ter Ordnung, deren erste Polarflächen einen Doppelpunkt haben, ist die der Fundamentalfläche conjugierte Steinersche Kernfläche oder „Steineriana“ von der $4(n-2)^3$-ten Ordnung. Die „Hessiana“ ist der Ort der Punkte, deren Quadripolarflächen Kegel sind, und die „Steineriana“ ist der Ort der Scheitel dieser Kegel. Beide Kernflächen entsprechen sich Punkt für Punkt und die Polarebene eines Punktes der Hessiana ist Tangentialebene der Steineriana in dem entsprechenden Punkte. Die weiteren Eigenschaften der conjugierten Kernflächen algebraischer Flächen n-ter Ordnung bilden den Gegenstand des X. Capitels (S. 137—151) im zweiten Theile von Cremonas Werk „Preliminari di una teoria geometrica delle superficie“, während die Eigenschaften der Hessiana einer Fundamentalfläche dritter Ordnung im II. Cap. (S. 155—172) des dritten Theiles dieses Werkes synthetisch entwickelt sind.[2])

Unsere moderne Flächentheorie, welche trotz einer überaus reichhaltigen Literatur und eines bereits erreichten hohen Grades der Voll-

[1]) S. Crelles Journal Bd. LIII, S. 133—141, Berlin 1857 und Ges. Werke II. Bd. S. 649—659, bez. S. 656. Berlin 1882.

[2]) S. a.: K. Rohn, Das Verhalten der Hesseschen Fläche in den vielfachen Punkten und vielfachen Curven einer gegebenen Fläche. Math. Annalen. Bd. XXIII, S. 82—110, Leipzig 1884 und E. Ciani, Sulle superficie cubiche la cui Hessiana si spezza. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. Tomo VI., pag. 55 - 63. Roma 1890.

endung heute von einer allgemeinen Theorie der Flächen vierter Ordnung noch recht weit entfernt ist, unterscheidet bereits eine größere Zahl von biquadratischer Flächen. Es sind dies die abwickelbaren oder developpablen Flächen vierter Ordnung (superficie sviluppabile della quarta classa, s. Cremona, Annali di Matematica, Roma 1859), die windschiefen Regelflächen (surfaces gauches), die Flächen vierten Grades mit Scharen von Kegelschnitten und solche mit einem Doppelkegelschnitt oder mit einem Doppel- und mit Cuspidal-Kegelschnitt; ferner die Cykliden vierter Ordnung, deren Doppelcurve der unendlich ferne Kreis ist und die anallagmatischen Flächen derselben Ordnung, welche in Bezug auf gewisse Punkte sich selbst invers sind. Wir nennen noch die Cayleyschen Monoide vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkte und die dualen und isogonalen Flächen vierter Ordnung.

Wenn jeder ebene Schnitt einer Fläche vierter Ordnung drei Doppelpunkte oder ihr Äquivalent der Singularität hat, so gehört die Fläche zu der speciellsten Art dieser Ordnung. Die höchste Singularität, welche eine Fläche vierter Ordnung besitzen kann, ist also eine dreifache Linie, die dann nothwendig gerade ist und die Fläche zur Regelfläche macht. Diese Regelfläche hat dann vier Erzeugende von torsaler Singularität, längs welcher sie sich an eine developpable Fläche anschmiegen kann.[1]) Besitzt eine Regelfläche vierter Ordnung eine gerade Leitlinie, so wird sie von jeder durch dieselbe gehenden Ebene in einer Geraden und einer Curve dritter Ordnung geschnitten und in drei Punkten von derselben berührt, wo beide sich schneiden.

Wenn eine Fläche vierter Ordnung eine nicht ebene Doppelcurve enthält, so ist sie in der Regel eine geradlinige Fläche, welche aus unendlich vielen Geraden besteht. Eine Ausnahme tritt ein, wenn die Fläche drei gerade Doppellinien hat, die sich in einem Punkte schneiden. Dann besteht der durch die Ebene von zweien derselben erzeugte Querschnitt aus den zweifach zählenden Linien selbst und es liegt keine sie durchschneidende Gerade in der Fläche. Es ist dies die bereits erwähnte römische Fläche vierter Ordnung von Steiner. Sie hat drei in einem Punkte sich schneidende Doppelgerade und wird von jeder ihrer Tangentialebenen in zwei Kegelschnitten geschnitten. Eine Fläche vierter Ordnung, deren Doppelcurve eine Linie der dritten Ordnung ist, wird als Regelfläche von denjenigen Geraden erzeugt, welche eine Raumcurve dritter Ordnung zweimal schneiden, also einem linearen

[1]) S.: M. Chasles, Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite. Comptes rendus. Tome LIII, pag. 888. Paris 1861 et Correspondance mathématique et physique de Bruxelles. Tome XI.

Complexe angehören. Diese Regelfläche, welche durch diejenigen Geraden eines linearen Complexes erzeugt wird, die eine feste Raumcurve dritter Ordnung zweimal schneiden, wird nach Cayley auch durch diejenigen Strahlen des Complexes gebildet, welche in zwei Schmiegungsebenen einer Curve dritter Ordnung liegen. [1]) Es gibt vier Cuspidalpunkte (Pinch-Points, Klemm- oder Zwickpunkte der Doppelcurve), in welchen die beiden Tangentialebenen zusammenfallen. Es gibt Unterarten von Regelflächen vierter Ordnung, bei welchen zwei der Cuspidalpunkte der Doppelcurve zusammenfallen. Fallen drei Cuspidalpunkte zusammen, so ist die Regelfläche developpabel. Nach Cayley und Cremona [2]) gibt es Flächen der vierten Ordnung, bei welchen der Kegelschnitt in ein Linienpaar degeneriert, d. h. es gibt Flächen vierter Ordnung mit drei Doppelgeraden, von denen eine die beiden anderen schneidet. Eine Regelfläche vierter Ordnung wird auch erzeugt, indem man eine ebene Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und zwei Gerade durch je einen dieser Doppelpunkte als Leitlinien nimmt. Die so erzeugte Fläche hat in jeder der Geraden vier Cuspidalpunkte. Die Unterarten dieser Regelfläche sind durch das Zusammenfallen von zwei oder mehreren dieser Cuspidalpunkte charakterisiert. In der Leitcurve vierter Ordnung können aber auch die beiden Doppelpunkte zu einem Berührungsknoten zusammenrücken und es entsteht dann eine Regelfläche vierter Ordnung mit zusammenfallenden Doppellinien.

Ein besonderes wissenschaftliches Interesse bot die Untersuchung der Flächen vierter Ordnung mit Knotenlinien, welche eine gerade Doppellinie oder einen doppelten Kegelschnitt besitzen. In jedem Falle enthält die Fläche eine endliche Anzahl gerader Linien. Denn betrachten wir einen willkürlichen Punkt der Doppelgeraden und einen gleichfalls willkürlichen Punkt in einem ebenen Querschnitte der Fläche, so schneidet die Verbindungslinie beider die Fläche nur noch in einem weiteren Punkte. Wenn die vielfache Linie nicht eben ist, oder wenn die Fläche außer ihr eine andere vielfache Linie enthält, so ist sie im allgemeinen eine Regelfläche. [3]) In dem Falle der Flächen vierter Ordnung mit einer geraden Doppellinie gehen durch dieselbe acht Ebenen hindurch, von denen jede die Fläche in zwei geraden Linien außer ihr schneidet, so dass es sechzehn gerade Linien außer der doppelten Geraden in

---

[1]) S.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Tom. 153, 154 und 159. 1863—1869.

[2]). S.: Memorie del Reale Istituto di Bologna. Tomo VIII°. 1868.

[3]) S.: R. Sturm, Über die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung. Mathematische Annalen, Bd. IV, S. 249—283. Leipzig 1871.

einer Fläche vierter Ordnung gibt. Eine solche Fläche mit einer doppelten Geraden ist nach Joachimsthal [1]) der geometrische Ort der Krümmungskreise der Normalschnitte in einem nicht singulären Punkte einer algebraischen Fläche. Eine Fläche derselben Art ist auch der Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Schnitte durch den Punkt der Fläche. Die Zahl der Flächen vierter Ordnung ist wegen der vielen verschiedenen Arten von Doppelcurven sehr groß. Eine Fläche vierter Ordnung mit einer gewöhnlichen Doppelgeraden ist von der zwanzigsten Classe; enthält sie eine Cuspidalkante, so reduciert sich die Classe auf zwölf. Eine Fläche der vierten Ordnung mit einer Doppelkante kann noch außer derselben Doppelpunkte haben. Die größte Zahl der Doppelpunkte ist acht. Mit der Fläche vierter Ordnung, die eine Doppellinie und acht Doppelpunkte besitzt, beschäftigte sich Plücker in seiner „Neue Geometrie des Raumes I. Bd., S. 221, Leipzig 1868" (Ausgabe von A. Clebsch). Die vielfachen Geraden einer Fläche waren Gegenstand der Abhandlung „Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface" von H. G. Zeuthen. [2]) Besitzt die Fläche vierter Ordnung zwei sich schneidende Doppellinien, so liegen wieder auf der Fläche sechzehn gerade Linien, von denen acht jede der Doppellinien schneiden. Jede Linie des einen Systems wird von den vier Linien des anderen Systems geschnitten. Die Fläche kann außer den Doppellinien noch vier Doppelpunkte besitzen.

Zu den am gründlichsten erforschten Flächen vierter Ordnung gehören die zuerst von Prof. E. E. Kummer [3]) untersuchten Flächen, auf welchen unendlich viele Kegelschnitte oder Scharen von Kegelschnitten liegen. Wenn eine solche Fläche vierten Grades von einer Ebene endlich und dreifach berührt wird, so muss der Querschnitt einen überschüssigen Doppelpunkt enthalten, d. h. einer der beiden Kegelschnitte muss in zwei gerade Linien zerfallen. Und da jede Fläche im allgemeinen eine bestimmte Zahl dreifach berührender Ebenen besitzt, so folgt hieraus, dass auch diese Fläche vierter Ordnung eine bestimmte Zahl von geraden Linien hat. Ihre Zahl ist — wie Prof. Clebsch [4]) zuerst gefunden — wieder sechzehn. Jede dieser sechzehn Geraden wird durch fünf andere geschnitten und ihre Beziehungen zu einander

[1]) S.: F. Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. (Universitäts-Vorlesungen, Breslau 1856—57). III. Aufl. von L. Natani. Leipzig 1890.

[2]) Math. Annalen Bd. IV, S. 1—20. Leipzig 1871.

[3]) Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1863.

[4]) S.: A. Clebsch, Über die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen. Borchardts Journal, Bd. LXIX, S. 142. Berlin 1868.

lassen sich, wie die Herren Prof. Geiser[1]) und Darboux[2]) bemerkt haben, mit denen der siebenundzwanzig Geraden einer Fläche dritter Ordnung einfach so verbinden, dass man in den letzteren eine Gerade und die zehn anderen, welche sie schneiden, ausschließt. Die sechzehn übrigen verhalten sich dann in Betracht ihrer gegenseitigen Durchschnitte sowie die Geraden der Fläche dritter Ordnung.

Eine allgemeine Theorie der Flächen vierter Ordnung besitzen wir bis heute nicht. Das zu erforschende Gebiet ist ein so weit ausgedehntes, dass einige Flächenfamilien dieser Ordnung, wie z. B. die Cykliden und anallagmatischen oder sich selbst inversen Flächen ein fast ebenso großes Gebiet der Erforschung umfassen, wie die ganze Theorie der cubischen Flächen. Die Theorie der developpablen Flächen hängt auf das innigste mit der Theorie der Raumcurven zusammen. Sie fand eine ganz besondere Pflege durch Monge, Bonnet, Salmon (Cambridge and Dublin Math. Journal, Tom. V, 1850), Cayley „Mémoire sur les courbe à double courbure et les surfaces développables" (Journal de Liouville, tome X, Paris 1845 und „On a special sextic developable", Quarterly Journal of Mathematics, Vol. VII, Cambridge 1866), Cremona (Annali di Mat., Roma 1859, etc.), Zeuthen u. A. Mit den windschiefen Regelflächen vierter Ordnung beschäftigten sich insbesondere Chasles (Comptes rendus, tome LIII, Paris 1861), Cayley (Philosophical Transactions, London 1863—69 und Cambridge and Dublin Math. Journ. Vol. XI, 1868), H. A. Schwarz (Borchardts Journal Bd. LXVII, Berlin 1867) und Cremona (Memorie dell' R. Istituto di Bologna 1868). Eine gründliche Untersuchung fanden die Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte in ihrer allgemeinen Form durch Kummer und Clebsch. Das Gleiche gilt von den unter dem Namen der Cykliden und anallagmatischen Flächen vierter Ordnung. Hieher gehören die geschätzten Arbeiten von Moutard (Nouvelles Annales de Math. Paris 1864), Darboux (Comptes rendus, tome LIX et LXVIII, Paris 1864 und 1869), Maxwell (Quarterly Journ., vol. IX, Cambridge 1867), Casey (Phil. Transactions, London 1871), etc.

Eine geistvolle Erweiterung erhielt die Theorie der algebraischen Flächen vierter Ordnung durch E. E. Kummer (geb. 1810, gest. 1893), Professor der Mathematik an der Universität zu Berlin, welcher den Inhalt seiner berühmten Abhandlung „Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Scharen von Kegelschnitten liegen" am 16. Juli 1863 der

---

[1]) Borchardts-Journal Bd. LXX. S. 249. Berlin 1869.

[2]) Comptes rendus. Tome LXXXIII et XCII. Paris 1873—81.

Berliner Akademie der Wissenschaften mittheilte.[1]) Bei seinen diesbezüglichen Untersuchungen hat Herr Prof. Kummer, wie bereits erwähnt, die „Römerfläche" von Steiner auch selbst entdeckt. Unter diesen Flächen vierter Ordnung, auf welchen Kegelschnittscharen liegen, befand sich neben der „Römerfläche" auch noch eine zweite interessante Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt. Beide Flächen waren bald der Gegenstand zahlreicher werthvoller Untersuchungen. Von der Oberfläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt entdeckte Prof. Kummer im Jahre 1864 die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass die ihr doppelt umgeschriebene Developpable aus fünf Kegeln zweiter Ordnung besteht. Fast gleichzeitig fand Moutard[2]) dieselbe Eigenschaft für den Fall, dass die Doppelcurve der Fläche der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis ist und er bemerkte weiter, gleichzeitig mit Darboux[3]), dass in diesem Falle die Oberfläche zu einem dreifachen Systeme von orthogonalen Oberflächen, gebildet von Flächen derselben Art, gehört.

Die Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt und solche, welche als Doppelcurve einen beliebigen Kegelschnitt, beziehungsweise einen in zwei getrennte oder zusammenfallende Gerade degenerierten Kegelschnitt haben, waren Gegenstand der Untersuchungen von Kummer[4]), Clebsch[5]), Geiser[6]), Sturm[7]), Korndörfer[8]), Cremona[9]), Zeuthen[10]), Berzolari[11]), Segre[12]),

---

[1]) S.: Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1863 und Borchardts Journal, Bd. LXIV, S. 66—76, Berlin 1865. — [2]) S.: Nouvelles Annales de Mathématiques II[e] Serie, Tome V, pag. 306. Paris 1864. — [3]) Comptes rendus. Tome LIX, pag 243. Paris 1864. — [4]) S. E. E. Kummer, Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Scharen von Kegelschnitten liegen. Monatsberichte der Berliner Akademie, Jahrg. 1863 und Borchardts Journal, Bd. LXIV, S. 66—76. Berlin 1865. — [5]) A. Clebsch, Über die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen. Borchardts Journ., Bd. LXIX, S. 142—184. Berlin 1868. — [6]) C. F. Geiser, Über die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben. Ibid. Bd. LXX, S. 249. Berlin 1869. — [7]) R. Sturm, über die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung. Mathematische Annalen, Bd. IV, S. 249. Leipzig 1871. — [8]) Ibid. Bd. I—IV, S. 529, 41, 496 und 117. Leipzig 1869—71. — [9]) Rendiconti dell' Istituto Lombardo di scienze e lettere. Milano 1871 und Math. Ann. Bd. IV, S. 213—230 Leipzig 1871. — [10]) H. G. Zeuthen, Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit. Forhandlinger af Videnskabs Selskab af Kjobenhavn, 1879 und Annali de Matematica II. Ser. Tom. XIV. — [11]) Annali di Mat. II. Ser. Tom. XIII. — [12]) C. Segre, Etude des différentes surfaces du 4[e] ordre à conique double au cuspidale (générale ou décomposée) considerées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions. Math. Annalen, Bd. XXIV, S. 313. Leipzig 1885.

Ciani[1]), Veronese[2]), Domsch[3]), Küpper[4]), Bobek[5]) u. A. An diese Untersuchungen schließen sich jene über Flächen vierter Ordnung, welche einen Cuspidalkegelschnitt besitzen. Es sind dies die Abhandlungen von Korndorfer[6]), Weiler[7]), Fötössy[8]), Rohn[9]), Loria[10]), Segre[11]), etc.

Eine besondere Classe der Flächen vierter Ordnung mit Doppelcurve sind die bereits erwähnten Flächenfamilien der Cykliden und anallagmatischen Flächen, deren Doppelcurve der unendlich ferne Kreis ist.

Prof. Kummer verdanken wir auch die Kenntnis einer anderen wichtigen Classe von Flächen vierter Ordnung, welche nicht singuläre Linien, sondern nur singuläre Punkte enthalten. Prof. Kummer hatte sich schon vor mehr als dreißig Jahren die Aufgabe gestellt, nicht blos die Zahl der Singularitäten eines Systems von unendlich dünnen Strahlen und die Brennfläche dieser Bündel zu untersuchen, sondern auch alle algebraischen Systeme von Strahlen erster und zweiter Ordnung zu bestimmen, bei welchen durch jeden Punkt des Raumes ein oder zwei Strahlen dieses Systemes hindurchgehen. Mit bewundernswerther Gewandtheit gelangte Kummer zu den Gleichungen, welche diese Strahlensysteme erster und zweiter Ordnung und ihre Brennflächen darstellen und entdeckte eine wichtige Classe von Flächen vierter Ordnung, die nicht singuläre Linien, sondern nur singuläre Punkte besitzt. Er fand auch die Singularitäten dieser Strahlensysteme, gelangte zu den Configurationen, die sie bilden und zeigte den Zusammenhang, der zwischen diesen Configurationen und den Singularitäten der Brennfläche besteht. Die interessanteste unter diesen Brennflächen ist jene Fläche vierter

---

[1]) E. Ciani, Sulla superficie diagonali di Clebsch. Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti pag. 227—234. Roma 1891.

[2]) Atti dell' Istituto Veneto. VI. Ser. Tomo I°.

[3]) Inaugural-Dissertation (Leipzig). Greifswald 1885.

[4]) K. Küpper, Über die Flächen dritter und vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, insbesondere deren Geraden. Zeitschrift für Math. und Physik. XXXIV. Jahrg. S. 129—160. Leipzig 1889 und Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. VII. Folge; II. Bd. Prag 1889.

[5]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften vom 11. und 18. December 1884. XC. Bd. S. 923 und 1168, Jahrg. 1884.

[6]) Math. Annalen Bde. I—IV. Leipzig 1869—71.

[7]) A. Weiler, Über Flächen vierter Ordnung mit Doppel- und mit Cuspidal-Kegelschnitt. Zeitschrift für Math. und Phys. XXX. Jahrg. S. 170. Leipzig 1885. S. a. Math. Annalen Bd. VII S. 145. Leipzig 1874.

[8]) Math. Annalen, Bd. XIX. Leipzig 1882.

[9]) Ibid. XVIII. Bd. S. 99. Leipzig 1881.

[10]) und [11]) Torino Mem. II. Ser. Tomo XXXVI. — Math. Annalen, Bd. XXIII. S. 213 und Bd. XXIV, S. 313 Leipzig 1884—85.

Ordnung, welche heute noch unter dem Namen „Kummersche Oberfläche" den Gegenstand werthvoller Forschungen bildet.

Die Kummersche Oberfläche vierter Ordnung hat sechzehn singuläre Doppelpunkte und sechzehn singuläre Tangentialebenen und ist zu sich selbst dual. Prof. Kummer veröffentlichte seine Untersuchungen über diese interessante Fläche vierter Ordnung in den Monatsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1864 und in den Abhandlungen derselben vom Jahre 1866.[1]) Die duale Eigenschaft seiner Fläche veranlasste ihn und Cayley die diesbezüglichen Untersuchungen auch auf Oberflächen beliebiger Ordnung auszudehnen.[2]) Mit den verschiedenen Gestalten der Kummerschen Fläche beschäftigten sich A. Weiler und K. Rohn. Herr Weiler, Docent am Polytechnicum in Zürich, bestimmte mit Benützung der Wurzeln der Gleichung des sechsten Grades alle Flächen, welche durch Specialisierung aus der Kummerschen Fläche hervorgehen.[3]) Herr K. Rohn, Professor am Polytechnicum in Dresden fand, dass es acht verschiedene Linienflächen gibt und widmete den verschiedenen Gestalten der Kummerschen Flächen eine eingehende liniengeometrische, topologische und analytische Behandlung in Punktcoordinaten, bei welcher auch die Grenzfälle und die gestaltlichen Verhältnisse der Grenzflächen nicht unberücksichtigt blieben.[4]) Eine äußerst interessante Abhandlung Prof. Rohns ist auch die im XV. Bande der Mathem. Annalen (Leipzig 1879) veröffentlichte Arbeit „Hyperelliptische Functionen und die Kummersche Fläche", welche die geometrische Behandlung dieser Fläche mit sechzehn reellen Knotenpunkten auf Grund der hyperelliptischen Functionen zum Zwecke hat. Die besonderen Fälle der Kummerschen Fläche waren auch Gegenstand von Abhandlungen, welche Prof. Rohn und C. Segre (Turin) in den Berichten der königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig im Jahre 1884 veröffentlicht haben.

Die Kummersche Fläche vierten Grades mit sechzehn Knotenpunkten ist bekanntlich nach den letzten Forschungen Plückers[5])

---

[1]) E. E. Kummer, Über die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere erster und zweiter Ordnung. Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1866. — Über zwei merkwürdige Flächen vierten Grades. Berlin 1866.

[2]) Berliner Akademie-Berichte 1878.

[3]) A. Weiler, Über die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades. Math. Annalen, Bd. VII, S. 145. Leipzig 1874.

[4]) K. Rohn, Die verschiedenen Gestalten der Kummerschen Fläche. Math. Annalen, Bd. XVIII, S. 99—159. Leipzig 1881.

[5]) S.: Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Nr. 310 f. f. S. a.: F. Klein, Zur Theorie der Complexe des ersten und zweiten Grades. Math. Ann. Bd. II, S. 2. Leipzig 1870

für einfach unendlich viele Complexe des zweiten Grades Singularitätenfläche, d. h. diejenige Fläche, welche der geometrische Ort ist für solche Punkte, deren Complexkegel in zwei Ebenen zerfallen ist, oder eine Fläche, die umhüllt wird von solchen Ebenen, deren Complexcurve sich in zwei Punkte aufgelöst hat. Die Betrachtung dieser Complexe zweiten Grades führte Herrn Prof. Sophus Lie fast unmittelbar zur Bestimmung der Haupttangentencurven der Fläche. Die diesbezügliche Abhandlung Prof. Lies legte Herr Prof. Kummer der Berliner Akademie der Wissenschaften am 15. December 1870 vor. Denselben Gegenstand behandelten Prof. Lie (Christiania) und F. Klein (Leipzig) in einer zweiten Abhandlung „Über die Haupttangentencurven der Kummerschen Fläche vierten Grades mit sechzehn Knotenpunkten" (Math. Annalen, Bd. XXIII, S. 579 – 586, Leipzig 1884), in welcher Lie auch zeigte, dass diese Curven von der 16-ten Ordnung sind, während Klein die Beziehung dieser Curve zu den Complexen zweiten Grades, die zur Kummerschen Fläche gehören, sowie ihre Singularitäten bestimmte. Nach Lie haben diese Haupttangentencurven der 16-ten Ordnung 16 in die Knotenpunkte der Fläche fallende Spitzen und 16 mit den Doppeltangentialebenen derselben identische, stationäre Ebenen; die Ordnung der Doppelcurve der Developpablen ist gleich 200, ihr Geschlecht gleich 5.

Prof. Reye[1]) und C. Segre[2]) zeigten, dass jede asymptotische Curve der Kummerschen Fläche die Grundcurve eines Büschels von Oberflächen vierter Ordnung ist. Die Beziehungen der Strahlensysteme zweiter Classe zur Kummerschen Fläche bildeten auch den Gegenstand einer Abhandlung, welche Herr Prof. Reye im LXXXVI. Bande (S. 84, Berlin 1878) des Borchardtschen Journals veröffentlichte. Er beschäftigte sich auch in eingehender Weise mit der Kummerschen Configuration von sechzehn Punkten und sechzehn Ebenen (Ibid. S. 209). Auch Herr Prof. H. Schröter zog das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummersche Configuration (Journ. für Math., Bd. C, S. 231, Berlin 1886) in den Kreis seiner werthvollen Forschungen. Die äußerst interessanten und innigsten Beziehungen der Oberflächen vierter Ordnung zu den Thetafunctionen entdeckten bekanntlich Cayley, Borchardt, H. Weber, Brioschi und Darboux, während die mit ihren Singularitäten zusammenhängenden Fragen Jordan und Rohn mittelst der Theorie der hyperelliptischen Functionen lösten.[3])

[1]) S.: Journal für Math. Bd. XCVII. Berlin 1884.

[2]) Ibid. Bd. XCVIII. Berlin 1884.

[3]) S.: Journal f. Math. Bde. LXXXIII, LXXXIV und XCIV; ferner Borchardts Gesammelte Werke, S. 341, Berlin 1888 und Comptes rendus. Paris 1881. S. a.: Dr. Rohn, Dissertation (München 1878) und Math. Annalen Bd. XV. Leipzig 1879.

Bekanntlich hat auch Herr Prof. Klein auf das System der Complexe zweiten Grades und die einem solchen Complexe als Singularitätenfläche zugehörige Kummersche Fläche vor fünfundzwanzig Jahren sein elliptisches Liniencoordinaten-System gegründet.[1])

Besondere Gestalten der Kummerschen Fläche vierter Ordnung sind die von Fresnel schon vor fünfundsiebzig Jahren entdeckte Wellenfläche (la surface des ondes) und das von Cayley im J. 1846 entdeckte und im XI. Bande des Liouvilleschen Journals zuerst untersuchte „Tetrahedroid“, einer Fläche vierter Ordnung mit sechzehn singulären Punkten und ebensovielen singulären Ebenen.

Die Kummersche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten und ihre besondere Gestalt das „Tetrahedroid“ bildeten auch in den folgenden Jahren noch oft den Gegenstand der interessantesten Forschungen Cayleys.[2]) Bei seinen in dem Zeitraume von 1863—69 über Regelflächen dritten und vierten Grades durchgeführten und im 153 — 159. Bande der Londoner Philosophical Transactions veröffentlichten Untersuchungen entdeckte Cayley auch die nach ihm benannte Regelfläche dritten Grades, deren Erzeugungsgesetz bekanntlich lautet: „Bewegt sich eine Gerade derart, dass sie stets ein einfaches Hyperboloid in Punkten einer und derselben Erzeugenden berührt und nebstbei einen Kegelschnitt, welcher mit dieser Erzeugenden einen Punkt gemein hat, schneidet, so erzeugt dieselbe eine Cayleysche Regelfläche dritten Grades, für welche die Erzeugende des Hyperboloides die vereinigte Doppel- und einfache Leitgerade repräsentiert.“ Auch von dem Plückerschen orthogonalen Ellipsenconoid dritter Ordnung machte er in seiner Theorie der „Skew surfaces“ vielfache Anwendungen und gab ihm den Namen „Cylindroid.“ Mit der zweiten besonderen Gestalt der Kummerschen Fläche, der Wellenfläche (la surface des ondes), und ihren interessanten, für die mathematische Theorie des Lichtes wichtigen Eigenschaften beschäftigten sich viele Gelehrte, darunter insbesondere Herr Prof. Mannheim, der auch in jüngster Zeit das Plückersche Conoid zum Gegenstande seiner ausgezeichneten

[1]) S. Math. Annalen, Bd. II, S. 224 und Bd. V, S. 293, Leipzig 1870 u. 1872.

[2]) S. a.: A. Cayley, Sur un cas particulier de la surface du quatrième ordre avec seize points singuliers. Borchardts Journal, Bd. LXV, S. 284. Berlin 1866 und Bd. LXXIII, S. 292, 1871. — „First, second and third Memoire on Quartics surfaces.“ Proceedings of the Royal Math. Society of London Tome III, 1871. — „On the 16-nodal quartic surface.“ Borchardts Journal, Bd. LXXXIV, S. 238, Berlin 1878. — „On the Tetrahedroid as a particular case of the 16-nodal quartic surface.“ Ibid. Bd. LXXXVII, S. 161, 1879 und „On the sixteen-nodal surface.“ Ibid. Bd. XCIV, S. 270. Berlin 1883.

kinematischen Forschungen machte.[1]) In seiner schönen Abhandlung „Nouvelle emploi du conoïde de Plücker" (Comptes rendus de séances de l'Académie des Sciences, Paris 13 août 1894), welche Herr Oberst A. Mannheim, Professor der descriptiven Geometrie an der École polytechnique in Paris, so liebenswürdig war uns im Vorjahre mit der ehrenden Widmung „Hommage de l'Auteur" zu übersenden, machte der hochgeschätzte französische Gelehrte von dem Plückerschen Conoide eine geistreiche kinematische Anwendung, indem er mit Hilfe von drei Erzeugenden dieses Conoides und den Krümmungsmittelpunkten der drei orthogonalen Contourcurven einer krummen Fläche auf die Ebenen, welche durch ihre Normale gehen, den Krümmungsmittelpunkt dieser Fläche im Punkte der Normalen bestimmte. Ebenso führte Herr Prof. A. Mannheim in seinem an historischen Daten reichen Werke „Cours de Géométrie descriptive de l'École polytechnique, Paris 1880" (II^e édit. 1886) die Untersuchungen über die dreifach definierte Wellenfläche (surface de l'onde, pag. 241—251 et 318—323) bezüglich ihrer singulären Punkte und Tangentialebenen, sowie die Bestimmung ihrer Normalen, der Mittelpunkte der Krümmungslinien und ihrer Kreispunkte (ombilics) mit Hilfe der Géométrie cinématique durch.

Die Mehrzahl der bisher genannten Forscher beschäftigte sich auch mit den Singularitäten der Flächen vierter Ordnung, sowie mit ihrer Classification und Erzeugung. Die Singularitäten dieser Flächen

---

[1]) Anmerkung: Die Fresnelsche Wellenfläche war seit ihrer ersten Veröffentlichung in den Mémoires de l'Académie des Sciences (Tom. VII, pag. 136, Paris 1827) der Gegenstand von zahlreichen, theils optischen, theils mathematischen Untersuchungen. Mit der Erforschung ihrer Eigenschaften beschäftigten sich Ampère (1828), Cauchy (1830 u. 1842), Herschel, Hamilton, Mac Cullagh, Sylvester, A. Smith, Plücker, A. Cayley, Senf, de Senarmont, Neumann, Lamé, Moon, Walton, J. Bertrand (1858), F. Brioschi (Annali die Matematica II.), Combescure, W. Roberts, Zech (Crelles Journ. Bd. LII), Catalan (Congrès de Paris), Gilbert, Salmon, Billet, Rouché, Mannheim, Kummer, (Berliner Akad. Abth. 1866), F. Klein (Math. Ann. II. und Göttinger Nachrichten 1871) Klein und Lie (Berliner Ber. 1870), C. W. Borchardt (Berliner Ber. 1879), Rohn (Math. Annalen, Bd. XVIII, S. 99, bez. 127—128. Leipzig 1881), etc. (S. a. die sorgfältigen Literaturangaben in A. Mannheim, Cours de Géométrie descriptive. Pag. 250—251. Paris 1880). Besonderes Interesse bieten uns die zumeist mit Hilfe der Géométrie cinématique von Herrn Prof. Mannheim elegant durchgeführten Untersuchungen in den Comptes rendus aus den Jahren 1867, 1874, 1876 und 1879 und im Journal de Physique, tom. V 1876; hierher gehören auch die Leçon d'optique géométrique über die „surface de l'onde" in Prof. Mannheims Cours de Géométrie descriptive de l'Ecole polytechnique, pag. 237 et 318, Paris 1880 (II^e ed. 1886), sowie seine wissenschaftlichen Vorträge auf den Congressen zu Nantes, Clermont-Ferrand, Havre und Paris. (Géométrie descriptive, pag. 241, etc. Paris 1880).

waren insbesondere Gegenstand äußerst interessanter Untersuchungen von Cayley[1]), Kummer[2]), Lie[3]), Reye[4]), Cremona[5]), Loria[6]), Segre[7]), Zeuthen[8]), Rohn[9]), Segen[10]) u. A. Ebenso interessante Untersuchungen über die Classification der Flächen vierter Ordnung verdanken wir Cayley[11]), Zeuthen[12]), Reye[13]), A. Weiler[14]), R. Sturm[15]), K. Rohn[16]), Gino Loria[17]), C. Segre[18]), etc.

Das Verhalten der Hesseschen Fläche in den einfachen Punkten und den vielfachen Curven einer gegebenen Fläche war der Gegenstand einer von Herrn Prof. K. Rohn im XXIII. Bande (S. 82, Leipzig 1884) der Math. Annalen veröffentlichten Abhandlung, während Ett. Caporali in seinem Memoire „Sopra i piani ed i punti singolari delle superficie di Kummer (Memorie della Reale Accademia dei Lincei, Tomo II°, Roma 1877—78) die Lagenrelationen der sechzehn singulären Ebenen und Punkte der Kummerschen Fläche mit den entsprechenden fünfzehn Geraden und Ebenen der cubischen Fläche mit einem Knotenpunkte einer sehr interessanten Betrachtung und Vergleichung unterzog.

Herr Professor Dr. Reye erzeugte die allgemeinen Flächen dritter, vierter und beliebiger Ordnung projectivisch durch Flächenbüschel niederer Ordnung. (Math. Annalen, Bd. I, S. 455—466, Leipzig 1869). C. Hierholzer bestimmte eine Fläche der vierten Ordnung als den geometrischen Ort der Spitze eines Kegels zweiter Ordnung, welcher

---

[1]) S.: Proceedings of the London mathematical Society, 1870 und 1871. — [2]) Berliner Monatsberichte vom Jahre 1872. — [3]) Berliner Berichte 1870 und Math. Annalen. Bd. XXIII. Leipzig 1884. — [4]) Journal für Mathem. Bd. LXXXVI (1879) und Bd. VCI (1884). — [5]) Comptes rendus, Paris 1862. — Math. Annalen, Bd. IV, Leipzig 1871. Lincei Rendiconti 1885 und 1886. — [6]) Torino Mem. II. Ser. Tom. XXXVI. — [7]) Journal für Math. Bd. XCVIII. Math. Annalen, Bd. XXIV, Leipzig 1885, und Bd. XXXIV. Leipzig 1889. — Leipziger Berichte 1884. — [8]) Forhandlinger af Videnskab, Kjobenhavn 1879 und Math. Annalen. Bd. IV, S. 1—20. Leipzig 1874.

[9]) K. Rohn, Über die Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkte. Math. Annalen, Bd. XXIV, S. 55, Leipzig 1885 und die von der fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig preisgekrönte Abhandlung „Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung. (S. a. Math. Annalen, Bd. XXIX. S. 81. Leipzig 1887).

[10]) D. Segen, Über windschiefe Flächen vierten Grades mit drei Doppelgeraden. Journal f. Math. Bd. CXII, S. 39. Berlin 1893. — [11]) Philosophical Transactions. London 1863—69. — [12]) Math. Annalen Bd. IV. S. 1—20. Leipzig 1871. — [13]) Math. Annalen Bd. I. S. 455—466. Leipzig 1869.

[14]) A. Weiler, Über die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades. Math. Annalen Bd. VII, S. 145. Leipzig 1874. — [15]) Ibid. Bd. IV. S. 249—283. Leipzig 1871. — [16]) Ibid. Bd. XXIX, S. 81, Leipzig 1887. — [17]) Torino Mem. II. Ser. Tomo XXXVI. — [18]) Math. Annalen Bd. XXIV. S. 313. Leipzig 1885.

durch sechs gegebene Punkte geht. (Math. Annalen Bd. IV, S. 172—188, Leipzig 1871). Herr Privatdocent K. Bobek veröffentlichte im Jahre 1884 eine Construction der Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt im XC. Bande der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. [1]) C. Segre betrachtete in seinem „Etude des différentes surfaces du 4e ordre" (Math. Annalen, Bd. XXIV, S. 313, Leipzig 1885) die Flächen vierter Ordnung mit Doppel- und Cuspidalkegelschnitt als projectivische Gebilde des Schnittes von zwei quadratischen Varietäten des vierdimensionalen Raumes. Weitere Constructionen der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt gaben Veronese in den Atti dell' Istituto Veneto (VI. Ser. Tom. I°) und M. Panelli in seiner Abhandlung „Sulla superficie del quarto ordine generata da due stella di piani e da una rete di quadratiche projettive fra loro" im XXIX. Bande (S. 133 — 153) des Battaglini Giornale (Napoli 1891). Die sinnreiche Construction einer Cyklide theilte Saltel im III. Bande des Bulletin de la Société mathématique de France mit.

Die rationalen Flächen vierter Ordnung untersuchte M. Nöther im XXXIII. Bde. (S. 546, Leipzig 1889) der Math. Annalen, während sich A. Sucharda im CI. Bande (S. 585) der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien (Jahrg. 1893) mit der bei einer Gattung centrischer Rückungsflächen vierter Ordnung auftretenden Reciprocität beschäftigte. Die sich selbst dualen Flächen waren Gegenstand wertvoller Forschungen von Kummer und Cayley (Berliner Akad. Ber. 1878), die rationalen und elliptischen Flächen untersuchte Armenante im IV. Bande (Ser. II.) der so ausgezeichnet redigierten Annali di Matematica, während L. Heffter im CXV. Bande (S. 1—22, Berlin 1895) des durch seine Schätze berühmten Weierstrass-Fuchs-Journales für die reine und angewandte Mathematik gewisse Flächen vierter Ordnung als Isogonalflächen einer äußerst interessanten Betrachtung unterzog.

In neue Bahnen wurden die geometrischen Forschungen auf den Gebieten der Curven- und Flächentheorie in den letzten Decennien durch die Lehre von den Correspondenzen (Verwandtschaften), Transformationen und Abbildungen gelenkt. Die einfacheren Fälle der eindeutigen geometrischen Verwandtschaft, die Homologie hatte schon Poncelet (1822) studiert, die Gesetze der Collineation oder Homographie erforschten Möbius (1827), Magnus (1833) und Chasles (1837). Eine compliciertere Verwandtschaft oder Correspondenz, die sogenannte „Steinersche

[1]) S.: K. Bobek, Über Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte. I. und II. Mittheilung. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. XC. Bd. S. 923 und 1168. Jahrg. 1884.

Projection", eine eindeutige Beziehung, bei welcher jeder Geraden in der einen Ebene ein Kegelschnitt in der anderen entspricht, entdeckte der Begründer der neueren Geometrie in Deutschland schon im Jahre 1832 in seiner „Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" [1]). Sie wurde im Jahre 1865 von Transon als „Projection gauche" (Nouv. Ann. II. Ser., Tom. IV et V) wiedergefunden. Die Correspondenz zwischen den in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel conjugierten Punkten, welche zuerst Poncelet[2]) entdeckte, untersuchten später Plücker (Crelles Journal V. Bd., 1830), Magnus (Ibid. Bd. VIII, 1832), Schiaparelli (Torino Mem. 1862) analytisch, Seydewitz (Grunerts Archiv VII, 1846) und Reye (Zeitschrift für Math. XI. Jahrg. 1866) synthetisch. Die dritte Art einer eindeutigen Correspondenz ist die unter dem Namen „Transformation durch reciproke Radien" oder „Inversion" bekannte Verwandtschaft, welche jede Gerade in einen Kreis, und jeden Kreis wieder in einen Kreis verwandelt. Sie wurde auch von Thomson (Liouvilles Journal Bd. X und XII, Paris 1875) als „Princip der elektrischen Bilder" studiert. Schon vorher hatten sich G. Bellavitis (1836) und Stubbs (1843) mit dieser eindeutigen Correspondenz beschäftigt. Eine wesentliche Erweiterung erfuhr die Theorie der linearen und quadratischen Transformationen erst in den Jahren 1859 und 1860 durch Jonquières, welcher die nach ihm benannte Transformation n-ter Ordnung einführte, und bald darauf durch Cremona, der in den Bologna Memoiren vom Jahre 1860 und 1863 (Bd. II und V) zur allgemeinen Theorie der geometrischen Transformationen der ebenen Figuren übergieng. Seit jener Zeit bildet die Theorie der höheren Transformationen ein sorgfältig gepflegtes Gebiet der neueren Geometrie, an dessen Erforschung die hervorragendsten Gelehrten wie Cayley, Clebsch, Clifford, Chr. Wiener, Nöther, Rosanes, Sturm, Bertini, Caporali, Beltrami, Laguerre, Le Paige, etc. arbeiteten und viele Gelehrten noch heute ihre besten Kräfte einsetzten.[3]) Bekanntlich veranlasste die Plückersche Correspondenz, eine Erweiterung der Correlation oder Reciprocität zwischen zwei Feldern die Begründung der Theorie der Connexe durch Clebsch. (Math. Ann. Bd. VI, S. 203. Leipzig 1873).

---

[1]) S. d. „schiefe Projection" in dem Art. 59 „Über Abhängigkeit einiger Systeme verschiedenartiger Figuren von einander." (Ges. Werke I. Bd. S. 407, bez. 409).

[2]) Traité des propriétés projectives, pag. 198. Paris 1822.

[3]) Vergl. den an historischen Daten reichen Abschnitt über Abbildungen, Correspondenzen, Transformationen in Dr. Gino Lorias historischer Monographie „Il passato e il presente delle principali teorie geometriche" in den Memorie della Accademia delle Science di Torino (Ser. II, Tomo XXXVIII) oder „Theorien der Geometrie" deutsch von F. Schütte, Leipzig 1888.

Der erste Geometer, der sich mit vielfachen Transformationen beschäftigte, war der Geh. Hofrath, Herr Dr. Christian Wiener[1]),

[1]) Herr Dr. Christian Wiener, Geheim. Hofrath und ord. Professor der Mathematik an der Großherz. polytechnischen Schule zu Karlsruhe, ist am 31. Juli 1896 zu Karlsruhe im 70. Lebensjahre gestorben. Diese betrübende Nachricht erhielten wir noch vor Schluss der Drucklegung unseres Werkes und sie hat uns auch auf das schmerzlichste berührt. Hatte doch Herr Hofrath Dr. Wiener in seinem durch einen systematischen und strengwissenschaftlichen Ausbau so ausgezeichneten Werke zuerst die Geschichte der darstellenden Geometrie begründet, und dem Verfasser war es nicht mehr gegönnt, dieses historische Werk dem verehrten Gelehrten als Ausdruck des Dankes zu überreichen. Der historische Abschnitt in Wieners trefflichem Lehrbuche der darstellenden Geometrie gab dem Verfasser auch unmittelbar die Veranlassung über die Begründung der darstellenden Geometrie als Wissenschaft noch eingehendere Studien zu pflegen, als deren Ergebnis unsere bereits vergriffene Monographie „Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft" (Brünn 1893—95) zu betrachten ist.

Mit besonderem Interesse verfolgte Herr Hofrath Wiener die einzelnen Theile dieser mathematisch-historischen Studie, und mit Wehmuth nahmen wir bei der Nachricht von seinem Tode noch einmal seine vom 22. August 1895 aus Rippoldsau im Badischen Schwarzwald an uns gerichtete Zuschrift zur Hand, um mit betrübtem Herzen von dem auch in Österreich so hochgeschätzten deutschen Gelehrten Abschied zu nehmen. Diese uns ehrende Zuschrift hat folgenden Wortlaut:

> „Hochverehrter Herr Professor! Von einem längeren Ausfluge zurückgekehrt, kam mir erst jetzt Ihr werther Brief in die Hände. Auch für Ihre letzte, mir gütigst zugesendete Abhandlung über Monge sage ich Ihnen meinen ergebensten Dank. Ich konnte sie erst hier in der Sommerfrische zu Ende lesen. Sie hat ebenso wie die früheren Theile mein größtes Interesse erregt sowohl durch die eingehende Charakteristik von Monges Leistungen, und ihre mannigfachen Beziehungen zu den Arbeiten Anderer in jener Zeit, als auch durch die anschauliche, lebendige und treffende Schilderung von Monges Charakter. Mit größter Hochachtung Ihr ergebenster Chr. Wiener."

Seine uns so erfreuende Zuschrift, sowie seine uns zugesendeten Abhandlungen, darunter auch die bei dem feierlichen Acte des Rectorat-Wechsels an der Großh. Badischen technischen Hochschule zu Karlsruhe am 31. October 1891 gehaltene geistreiche Festrede „Die Freiheit des Willens" werden uns ebenso wertvolle Erinnerungen sein, wie uns sein gediegenes Werk schon seit zehn Jahren ein treuer Freund und ausgezeichneter Rathgeber im wissenschaftlichen Berufe geworden ist. Herr Dr. Ludwig Christian Wiener wurde am 7. December 1826 zu Darmstadt geboren, wo er von 1848—1850 als Lehrer an der höheren Gewerbeschule wirkte. Im Studienjahre 1851—52 habilitierte er sich als Privatdocent für Mathematik, Mechanik und Ingenieur-Wissenschaften an der Universität zu Giessen und wurde im Jahre 1852 als Nachfolger von G. Schreiber (geb. 1799, gest. 1871) und ord. Professor der darstellenden Geometrie und der Geodäsie an die polytechnische Schule nach Karlsruhe berufen. Während seiner 44jährigen Lehrthätigkeit an diesem berühmten Polytechnicum hat Herr Hofrath Wiener eine überaus stattliche Schar von wissenschaftlich hochgebildeten Technikern herangebildet, welche mit dem Gefühle innigster Dankbarkeit ihren ausgezeichneten Lehrer stets in bester Erinnerung behalten werden. Sein Werk „Lehrbuch der darstellenden Geometrie", Professor an der Großherzogl. polytechnischen Hochschule in Karlsruhe. In seiner Abhandlung „Die mehrdeutige Beziehung zweier ebenen Gebilde aufeinander" (Math. Annalen, Bd. III, S. 11—33, Leipzig 1871) stellte er zwischen den Geraden einer Ebene und den Curven eines linearen Systemes eine eindeutige Correspondenz her und zwar in der Art, dass einem Punkte, betrachtet als Schnitt zweier Geraden, die Gruppe der Grundpunkte des Büschels zugeordnet wird, welche durch die entsprechenden Curven gebildet ist. Diese Erzeugungsweise vielfacher Transformationen dehnte Tognoli (Giornale di Mat. Tomo X*) auch auf den Raum aus. Mit besonderen vielfachen Transformationen beschäftigten sich dann Paolis, Reye, Segre, Aschieri und andere hervorragende Mathematiker. Herr Prof. Dr. Chr. Wiener, in dessen Werke wir eine ausgezeichnete projective Behandlung der Linien und Flächen zweiten Grades, der Regelflächen dritten und vierten Grades, sowie der Raumcurven vierter Ordnung finden und dessen Beleuchtungslehre als eine geradezu musterhafte bezeichnet werden muss, ist auch der Begründer der Imaginärprojection der Linien und Flächen zweiten Grades. Insbesondere gilt dies in Bezug auf ihre ideelle Darstellung durch reelle Gebilde gleicher Art, und in Bezug auf die dadurch geschaffene Möglichkeit und deren Auswertung, mit den imaginären Gebilden eben so leicht zu construieren, wie mit den reellen, unter anschaulicher Unterscheidung zwischen zwei conjugiert-imaginären Elementen. Die Aufgabe der Bestimmung der imaginären Schnittpunkte von Kegelschnitten hat Herr Prof. Wiener zu dem Begriffe der Imaginärprojection geführt, sowie zu den in seinem Ergebnisse mit ihm zusammenfallenden verallgemeinerten Begriffe von conjugierten Kegelschnitten, welcher letztere in engerem Sinne schon bei den conjugierten Hyperbeln und bei den supplementären Kegelschnitten Poncelets (Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822, pag. 29) auftritt. Solche Kegelschnitte hat auch Herr Prof. Wiener in seiner Abhandlung „Über scheinbare Unstetigkeit geometrischer Constructionen, welche durch imaginäre Elemente derselben verursacht wird" (Zeitschrift für Math. u. Physik. Bd. XII, S. 388, Leipzig 1867) zur Bestimmung der imaginären Schnittpunkte von Kegelschnitten benutzt, welche eine gemeinschaftliche Symmetrallinie besitzen. Die Theorie der Imaginärprojection entwickelte der hochgeschätzte Gelehrte im Anschlusse an die Lehre von den conjugierten Kegelschnitten in seiner projectiven Geometrie (Lehrbuch, I. Bd., S. 315, Leipzig 1884) und wendete sie

welches dem gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft vollkommen entspricht, hat ihm für immerwährende Zeiten einen der ersten Ehrenplätze in der Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie gesichert.

auch auf die imaginäre Projection zweier Büschel oder zweier Scharen von Kegelschnitten aufeinander an, unter der Voraussetzung, dass die Anzahlen ihrer reellen Grundelemente verschieden sind. (Ibid. S. 382). Im zweiten Bande (S. 89, Leipzig 1887) seines systematisch aufgebauten Werkes „Lehrbuch der darst. Geometrie" schließt sich die Theorie der Imaginärprojection im Raume folgerichtig an die Lehre von den conjugierten Flächen zweiten Grades an und findet in der Imaginärprojection der Schnittlinie zweier Flächen zweiten Grades (S. 317) eine interessante und schöne Anwendung.

Auf die unter dem Namen der trilinearen Verwandtschaft bekannte Correspondenz zwischen drei geometrischen Gebilden, deren Theorie Rosanes, Schubert, Benno Klein und Guido Hauck theils analytisch, theils synthetisch begründeten, und welche der letztgenannte Gelehrte auch in die darstellende Geometrie einführte, haben wir bereits im dritten Abschnitte (S. 97) dieses Werkes hingewiesen. Ebenso war die duploprojective Beziehung, durch welche F. August in seiner Berliner Inaugural-Dissertation „Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis" schon im Jahre 1862 die cubische Fläche erzeugte, eine trilineare Verwandtschaft. Eine interessante Anwendung von der Theorie der trilinearen Elementargebilde auf die höhere Curventheorie machte auch in jüngster Zeit Herr Fr. London, indem er die Raumcurve sechster Ordnung vom Geschlechte Eins als Erzeugnis trilinearer Grundgebilde construierte. (Math. Annalen Bd. VL, S. 555, Leipzig 1894). In demselben Abschnitte (III, S. 112) haben wir auch auf die glänzenden Erfolge hingewiesen, welche Herr Prof. Sophus Lie bei seinen Forschungen in dem Zeitraume von 1869 bis 1872 in der Geometrie der Berührungstransformationen erzielte.[1]) Wir erwähnen noch die im Jahre 1884 von der Akademie der Wissenschaften zu Neapel preisgekrönte Abhandlung „Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques" [2]) von S. Kantor, sowie ihren im CXIV. Bande, S. 50 des Journals für Mathematik (Jahrg. 1895) veröffentlichten Auszug „Theorie der eindeutigen periodischen Transformation in der Ebene" und die im Vorjahre von demselben Verfasser veröffentlichte Schrift „Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen" (Berlin 1895).

Ein mächtiges Mittel zur Erforschung der Theorie der höheren algebraischen Flächen ist die dem Geographen und darstellenden

---

[1]) Sophus Lie, Geometrie der Berührungstransformationen. I. Band Leipzig 1896. (II. Band 1897).

[2]) S.: Atti della Reale Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. II. Ser. Vol. I. 1888 ed 1891.

Geometer so naheliegende Theorie der Abbildung der Flächen. Mit der Darstellung einer Oberfläche auf einer Ebene beschäftigten sich schon die darstellenden Geometer des Alterthums Hipparch und Ptolemäus. Im XVI. Jahrhundert projicierten Oberflächen Mercator und im XVIII. Jahrh. Lambert und Lagrange. Die erste conforme Abbildung einer Oberfläche auf der Kugelfläche verdanken wir Gauss (Disquis. 1827). Von ebenso hohem wissenschaftlichen Werte für die Geometrie der Flächen zweiten Grades sind die diesbezüglichen Forschungen von Plücker (Crelles Journ. Bd. XXXIV, Berlin 1847), Chasles (Comptes rendus, tom. LIII, Paris 1861) und Cayley (Philosophical Magazin 1861). Bewundernswerthe Resultate erzielten bei Erforschung der cubischen Fläche Clebsch[1]) und Cremona.[2])

In seiner Abhandlung „Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung" (Borchardts Journal, Bd. LXV, S. 359—380, Berlin 1866) begründete Clebsch die analytische Theorie der Abbildung einer cubischen Fläche auf eine Ebene und zeigte, wie diese ebene Abbildung der Fläche zur Erforschung ihrer Eigenschaften und Singularitäten mit Erfolg benützt werden könne. Die gleichen Resultate hatte Cremona fast zu derselben Zeit in seinem preisgekrönten „Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre" (Borchardts Journ., Bd. LXIV, S. 1—133, Berlin 1865) mittelst reingeometrischer Methoden erzielt.[3]) Mit Hilfe der Abbildung der cubischen Fläche auf eine Ebene untersuchte er die auf dieser Fläche gezogenen Curven, insbesondere ihre ebenen Curven und ihre Durchschnittcurven mit Flächen zweiter, dritter und n-ter Ordnung und gelangte so zur Theorie der Raumcurven vierter, fünfter, sechster und siebenter Ordnung, sowie zur Kenntnis ihrer Eigenschaften und Singularitäten. Cremona bestimmte auch jene Raumcurven auf der Fläche dritter Ordnung, welche den Geraden, Kegelschnitten und cubischen Curven der Ebene, sowie beliebigen Plancurven entsprechen. Die Methode der Abbildung erwies sich schon in diesen berühmten Arbeiten als so fruchtbar, dass sie von beiden Forschern und anderen hervorragenden Geometern in den folgenden Jahren auf die Theorie der Flächen vierter und fünfter Ordnung ausgedehnt wurde.

[1]) S.: Journal für Mathematik. Bd. LXV. S. 359. Berlin 1866 und Math. Annalen Bd. I, S. 253—316, Leipzig 1869.

[2]) Math. Annalen Bde. I und IV. Leipzig 1869 und 1871. — Preliminari di una teoria geometrica delle superficie. IV°. Cap. und „Abbildung einer Fläche dritter Ordnung auf eine Ebene." Cremona-Curtze, Theorie der Oberflächen, S. 185—195. Berlin 1870.

[3]) S. a.: Cremona, Preliminari di una teoria delle superficie. (Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna (II. Ser. Tomo VI ed VII) und Cremona-Curtze, Theorie der Oberflächen, S. 185—195. Berlin 1870.

und zu den schönsten Resultaten führte. Zu ihrer Ausbildung haben vor Allen Clebsch, Cremona, Noether, Cayley, Zeuthen, Korndörfer, Klein, Brill, Darboux, Caporali u. A. beigetragen. Eines der schönsten Resultate der Theorie der Abbildung war, dass Clebsch analytisch und Cremona rein geometrisch zeigten, dass die Haupttangentencurven der Steinerschen Fläche algebraische Curven der vierten Ordnung zweiter Art sind.

Von den diesbezüglichen Abhandlungen nennen wir insbesondere „Über die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen" (Borchardts Journ., Bd. LIX, S. 142—184, Berlin 1868) und „Über die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung" (Math. Annalen Bd. I, S. 253 — 316, Leipzig 1869) von A. Clebsch, „Über die Abbildung algebraischer Flächen" (Göttinger Nachrichten, Jahrg. 1871 u. Math. Annalen, Bd. IV, S. 213—230, Leipzig 1871) von Cremona; ferner „Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und mit einem oder mehreren Knotenpunkten" (Math. Annalen Bd. I, S. 592—626 und Bd. II, S. 41—64, Leipzig 1869—70), „Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelpaaren" (Ibid. Bd. III, S. 496, Leipzig 1871) und „Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche aus zwei sich schneidenden, unendlich nahen Geraden besteht" (Ibid. Bd. IV, S. 117) von G. Korndörfer in Giessen, „Über die Abbildung der Complexflächen vierter Ordnung und vierter Classe (Ibid. Bd. II, S. 371, Leipzig 1870) von F. Klein; ferner „Über die geradlinige Fläche dritter Ordnung und deren Abbildung auf einer Ebene" (Zeitschrift für Math. u. Phys. XXIII. Jahrg., S. 93, Leipzig 1878) von Benno Klein und „Über eine ein-dreideutige ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung" (Journal f. Math. Bd. VC, S. 147, Berlin 1883) von S. Kantor in Prag. Der letztgenannte Schriftsteller benützte auch seine „Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene" (Acta mathematica, Bd. XIX, Stockholm 1895), um mit der in derselben aufgestellten Collineationen, eine cubische Fläche in sich zu transformieren. [1])

In dieses Capitel der neueren Geometrie gehört auch die interessante Untersuchung von J. Dickmann „Über die Modificationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche durch Auftreten von Singularitäten erhält" (Math. Ann. Bd. IV, S. 442, Leipzig 1871). Das Gleiche gilt von der schönen Abhandlung von Caporali[2]) über die dreifach unendlichen

---

[1]) S.: S. Kantor, Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene. Berlin 1895.

[2]) S. s. Dissertation, Rom 1875 u. Ann. di Mat., II. Ser. Tomo VII, pag. 149—188.

linearen Systeme ebener Curven, in welcher er die Theorie der Abbildung einer Oberfläche auf eine Ebene als ein wertvolles Hilfsmittel der Untersuchung auf das Studium solcher Systeme mit besonderem Erfolge anwandte.

In seiner Festschrift „Om Flader of fjerde orden med Dobbeltkegelsnit, Kjobenhavn 1879" hat Zeuthen die Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt mittelst ihrer Centralprojection aus einem Punkte der letzteren untersucht und so ihre Geraden, die Kummerschen Kegel abgeleitet und mit Hilfe derselben eine Eintheilung dieser interessanten Oberflächen begründet. Selbstverständlich waren auch die Cykliden Gegenstand diesbezüglicher Untersuchungen von Moutard, Darboux, Maxwell u. A. Neben den anschaulichen stereographischen Abbildungen des letztgenannten Geometers (Quarterly Journal, IX. Bd. 1867) erwähnen wir noch die conforme Abbildung der Cykliden auf dem Rechteck und unbegrenzter Ebene von Holzmüller. (Journal für Math. Bd. XCIV, S. 237, Berlin 1883). Bekannt sind auch die eleganten analytischen Entwickelungen über Flächen dritter und vierter Ordnung im zweiten Theile von Salmon-Fiedlers Analytischer Geometrie des Raumes (III. Aufl. S. 363—574, Leipzig 1880), deren sorgfältigen Literatur-Nachweisungen geradezu als musterhaft bezeichnet werden müssen.

Noch offen und wenig erforscht ist das Gebiet der Theorie der höheren algebraischen Flächen, trotzdem sich Steiner schon vor dem Jahre 1856 bei seinen Untersuchungen über die Flächen dritten Grades mit Develeppablen vom zwölften Grad und der sechsten Classe und abwickelbaren Flächen vom dreißigsten Grade beschäftigt hatte. [1]) Mit zunehmendem Grad der Oberflächen potenzieren sich die Schwierigkeiten ihrer theoretischen Untersuchung und setzen nicht selten unüberwindliche Hindernisse ihrer Erforschung entgegen. Von Abhandlungen, welche der höheren Flächentheorie angehören, nennen wir „Über die geradlinigen Flächen fünften Grades" (Borchardts Journal, LXVII. Band, S. 23--57, Berlin 1867) von H. Schwarz und „Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symmétriques, Paris 1867", in welchem J. de la Gournerie die in Bezug auf ein Tetraeder symmetrischer Regelflächen höherer Ordnung, darunter seine Quadrispinale und Quadricuspidale von der achten Ordnung untersuchte; ferner die bereits erwähnten Abhandlungen über Flächen fünften Grades von Clebsch

[1]) S.: Steiners Abhandlung „Über Flächen dritten Grades", gelesen in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 31. Januar 1856. (Ges. Werke, II. Bd. S. 658. Berlin 1882).

(Math. Ann. Bd. I, 1869), Sturm (Ibid. Bd. IV, 1871) und Zeuthen (Ibid. Bd. IV). Mit der projectivischen Erzeugung der allgemeinen Flächen beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung beschäftigte sich Prof. Reye (Math. Ann. Bd. I, 1869), die Singularitäten der allgemeinen Fläche n-ter Ordnung untersuchte Prof. Sturm im LXXII. Bande (S. 350, Jahrg. 1870) des Borchardtschen Journales. Besondere Erwähnung verdienen die Abhandlungen „On a surface of the eight order" (Math. Ann. Bd. IV, S. 558, Leipzig 1871) von Cayley, „Sulle tangenti tripple di alcune superficie del sest 'ordine" (Torino Atti, Tomo XXIV, pag. 514, 1889) von M. Pieri, sowie die allgemeinen Untersuchungen „Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales" (Kronecker-Weierstrass Journal Bd. C, Berlin 1887) von E. Picard in Paris, und „Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques" (Math. Ann. Bd. XXXIV, 1889) von C. Segre in Turin und die wertvollen Forschungen von G. Darboux in seinem großen Werke „Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris 1887—94."

Eine ganz stattliche Reihe von gediegenen Abhandlungen hatte die Erforschung gewisser Flächen-Familien zum Gegenstande. Hieher gehören in erster Linie die aus den Oberflächen zweiten Grades abgeleiteten Flächen, wie die Centra-, Fußpunkt- und Aspidalflächen; ferner jene Oberflächen, welche sich als geometrische Orte der Spitzen von Kegelflächen zweiten Grades ergeben, welche n Gerade berühren und durch (6--n) Punkte gehen. Ihre für die Theorie der Charakteristiken der einfach unendlichen Systeme von Kegelflächen zweiter Ordnung wichtigen Untersuchungen wurden von Chasles (Comptes rendus, tome LII), Lüroth (Borchardts Journal LXVIII), Hierholzer (Math. Ann. II) und von Cayley (Proc. math. Soc. IV. u. Comptes rendus, 1861) durchgeführt. Eine gründliche Untersuchung der Centrafläche des dreiachsigen Ellipsoides veröffentlichte Cayley im XII. Bande (S. 319—365) der Cambridge Philosophical Transactions vom J. 1873. Die Centrafläche des elliptischen Paraboloides untersuchte F. Caspari im LXXXI. und LXXXIII. Bande (S. 143, bez. 72, Jahrg. 1876—77) des Borchardtschen Journales.[1]) Die Fußpunkt-Curven und Fußpunkt-Flächen, sowie die Normalen und Normalebenen bilden den Gegenstand einer besonders von den darstellenden Geometern geschätzten Abhandlung (Math. Ann. Bd. VI, S. 241—263, Leipzig 1873) von Herrn Prof. Dr. Rudolf Sturm in Darmstadt. Die Grundlage für diese wertvollen

[1]) S. a. die Abhandlungen über Centralflächen von E. Waelsch (Wiener Sitzungsber. 1889), A. Voss (Math. Ann. Bd. XVI) u. R. von Lilienthal („Zur Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen." (Math. Annalen. Bd. XXX, S. 1—14. Leipzig 1887).

Untersuchungen bildeten theilweise auch Cayleys Forschungen „On reciprocal surfaces" (Philosophical Transaction, London 1869). Zu den Aspidalflächen, welche insbesondere Catalan im XXXVIII. Bande der Mémoires de l'Académie Belgique gründlich untersuchte, gehört als eine der interessantesten die Fresnelsche Wellenfläche mit ihren sechzehn Doppelpunkten. Sie bildete auch eine von den letzten, so wertvollen Untersuchungen Cayleys.[1])

Zwei Fußpunktflächen des Achsencomplexes einer Fläche zweiter Ordnung sind der Gegenstand einer Abhandlung Ch. Bökles im XXXIX. Jahrg. (S. 51) der Zeitschrift für Math. und Phys. (Leipzig 1894). Neuere Untersuchungen über confocale Flächen enthält das bereits erwähnte große Werk von Darboux, in welchem auch die Orthogonal-Flächensysteme eine eingehende Behandlung fanden. In synthetischer Weise wurde das letztere System in J. Gysels Dissertation „Synthetische Untersuchung eines Orthogonal-Flächensystems" (Zürich 1874) studiert. Die rationalen und elliptischen Regelflächen untersuchte Armenante im IV. Bande (Ser. II) der Annali di Matematica. Die Regelflächen bildeten auch den Gegenstand der Abhandlung von Em. Weyr, Ed. Weyr, Eckardt, Chizzoni, Sturm, Affolter u. a. bekannten Geometern. Die ersten Untersuchungen über die allgemeine Normalfläche verdanken wir Herrn Prof. Mannheim (Liouvilles Journ. Tom. XVII. Paris 1872). Bekannt sind die besonderen Untersuchungen über die Normalenfläche des dreiachsigen Ellipsoides (Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wiss. in Prag, VI. Serie, 2. Bd. 1868) von Šolin und „Die Normalflächen der Flächen zweiter Ordnung längs ebener Schnitte derselben" (Sitzungsber. der kais. Akad. der Wissensch. in Wien, LXXXI. Bd. Jahrg. 1880) von E. Koutny. Erweitert wurde die Theorie der Normalflächen[2]) durch die geschätzten Abhandlungen „Beitrag zur Theorie der Normalflächen" (Wiener Sitzungsberichte Bd. LXXXI, S. 1128, Jahrg. 1880), Normalflächen längs ebener Flächenschnitte" (Ibid. Bd. LXXXI, S. 1163), „Normalfläche einer Devoloppablen längs ihres Durchschnittes mit einer krummen Fläche" (Ibid. Bd. LXXXIII, S. 790, Jahrg. 1881) und „Neue Eigenschaften der Normalflächen für Flächen zweiten Grades längs ebener Schnitte" (Ibid. Bd. LXXXIII, S. 381, Jahrg. 1882) des Herrn k. k. Regierungsrathes Dr. G. A. V. Peschka, o. ö. Professor der darst. und neueren Geometrie an der k. k. tech. Hochschule in Brünn. Die von Cayley entdeckten „Monoide"

[1]) S.: A. Cayley, Sur la surface des ondes. Annali di Mat. Ser. II. Tomo XX, pag. 1. Roma 1894.

[2]) S.: Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. II. Theil, S. 488. Leipzig 1887.

wählte Herr Lampe zum Gegenstande seiner Inaugural-Dissertation (Berlin 1864); sie bilden auch den Gegenstand einer schönen von Herrn Prof. Rohn im XXIV. Bde. der Math. Ann. (Leipzig 1885) veröffentlichten Abhandlung. Die cyklischen Flächen, welche eine unendliche Schar von reellen Kreisen enthalten, hatte Prof. Enneper in den Göttinger Nachrichten vom Jahre 1866 und im XIV. Bande der Zeitschrift für Math. und Phys. (Leipzig 1869) untersucht. Auch den Umdrehungsflächen, Cykliden, Conoiden, Schrauben- und Rückungsflächen, sowie den Enveloppen oder einhüllenden Flächen, und besonders den Polar-, Reciprocal-, Kern- und Quadriflächen wurde in den neugeometrischen Forschungen der letzten Jahre eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Mehrere von den bisher genannten Flächenfamilien fanden auch eine eingehende descriptive und projective, bez. auch kinematische Behandlung in den geschätzten, auf modernen Grundlagen ruhenden Werken über darstellende Geometrie von Fiedler, Mannheim, Peschka, Wiener, Rohn-Papperitz [1]) und M. d'Ocagne. [2]) Als einen schönen Abschluss der letzten Forschungen auf dem Gebiete der Flächentheorie können wir die theils synthetischen, theils analytischen Untersuchungen über Minimalflächen von Herrn Prof. Sophus Lie [3]) und die reingeometrische Behandlung ihrer Theorie durch Herrn Prof. R. Sturm [4]) betrachten.

Mit großem Interesse verfolgen die modernen darstellenden Geometer Österreichs seit mehreren Jahren auch die schönen Erfolge, welche insbesondere die beiden hervorragendsten Gelehrten Frankreichs und Deutschlands, Herr Oberst Mannheim, Professor der descriptiven Geometrie an der École polytechnique in Paris und Herr Dr. L. Burmester, Professor der darstellenden Geometrie an der königl. technischen Hochschule in München, mit Hilfe kinematischer Forschungen in der Flächen- und Curventheorie erzielt haben. [5]) Das Gleiche gilt von dem jüngsten Wissenszweige der darstellenden Geometrie, der Photogrammetrie, welche sich schon heute in der Ingenieur- und Militär-Technik einen ehrenvollen Platz erobert hat. Noch jünger, doch schon

---

[1]) S.: Dr. K. Rohn und Dr. E. Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie Leipzig 1893—96.

[2]) S.: Maurice d'Ocagne, Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale. Paris 1896.

[3]) Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Christiania 1877—79 und 1882. — Math. Annalen, Bde. XIV, XV und XX. Leipzig 1879 und 1882.

[4]) Crelle-Fuchs Journal, Bd. CV, S. 101. Berlin 1889.

[5]) S: A. Mannheim, Cours de Géométrie descriptive de l'École polytechnique, Paris 1880. (II[e] édit. 1886) und Principe et développement de Géométrie cinématique, Paris 1894 — Dr. L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik. Leipzig 1888.

ganz in der darstellenden Geometrie eingebürgert, ist der sogenannte „Calcul der abzählenden Geometrie" — ein Problem, welches darin besteht, die Anzahl der geometrischen Gebilde zu bestimmen, die bei gegebener Definition einer hinreichenden Zahl von Bedingungen genügen. Die Grundlage für dieses Problem der abzählenden Geometrie schuf Chasles in seiner „Methode der Charakteristiken" (Comptes rendus, Paris 1854), bei welcher die betrachteten Gebilde Kegelschnitte in einer Ebene waren. Der Hauptgedanke dieses mächtigen Hilfsmittels der neueren Geometrie bestand in dem systematischen Gebrauch der Charakteristiken eines einfach-unendlichen Systemes von Kegelschnitten, d. h. jener Zahlen, welche angeben, wie viele Kegelschnitte des Systemes durch einen gegebenen Punkt gehen, oder wie viele eine gegebene Gerade berühren. Chasles dehnte schon im folgenden Jahre seine diesbezüglichen Untersuchungen auf Kegelschnitte im Raume und auf Flächen zweiter Ordnung aus (Comptes rendus, tome LXI, Paris 1865), und Zeuthen [1]) sowie Maillard [2]) erweiterten die Theorie der Charakteristiken auf ebene Curvensysteme und Curven dritter Ordnung.

Schon in den Londoner Philosophical Transactions vom J. 1858 hatte sich Cayley in seiner Abhandlung „On the curves which satisfy given conditions" mit ähnlichen Betrachtungen wie Chasles beschäftigt. Salmon, Dino, Sturm, Hirst, Jonquières, Fouret und insbesondere Schubert und Clebsch dehnten die gefundenen Sätze auf höhere algebraische und transcendente Curven und Oberflächen aus und 1876 stellte Prof. Clebsch im X. Bande der Math. Annalen den allgemeinen Satz auf: „Die Anzahl der geometrischen Gebilde, welche gewissen gegebenen Bedingungen genügen, oder gewisse Bedingungen erfüllen, bleibt entweder ungeändert, oder sie wird unendlich groß, wenn man die gegenseitige Lage und die Form der den gegebenen Beziehungen und Bedingungen entsprechenden geometrischen Gebilde nach Belieben ändert, ohne jedoch deren wesentliche Definition zu verletzen."

Dieser Satz, ein Fundamentalsatz der abzählenden Geometrie, wurde von Herrn H. Schubert in seinem Werke „Calcül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879" als Princip von der Erhaltung der Anzahl" bezeichnet. Schon in den Göttinger Nachrichten vom J. 1874

[1]) H. G. Zeuthen, Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit, Kjobenhavn 1865 und „Almendolige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver." (Forhandlingar af Videnskab, V. Ser. Tom. X). — S. a. Comptes rendus, tom. LXXIV et LXXV, Paris 1872.

[2]) Maillard, Recherches des caractéristiques des systèmes élémentaires des courbes planes du troisième ordre. Paris 1871

(S. 274) hatte Dr. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg, das Princip von der „Erhaltung der Anzahl," als „Princip der speciellen Lage" für die Theorie der Curven dritten Grades mit Erfolg verwendet. Die Resultate seiner Forschungen haben auch schon vor mehreren Jahren in die modernen Werke über darstellende Geometrie Eingang gefunden.

Ein noch junger Wissenszweig der Mathematik ist die schon auf S. 245 erwähnte und durch Plücker im J. 1865 begründete Liniengeometrie. [1]) Die Forschungen von Plücker über die Geometrie der Geraden, welche er in dem genannten Jahre der königl. Gesellschaft der Wissenschaften in London mitgetheilt hatte, bilden die Grundlage für die Theorie der Complexe zweiten Grades. Neben den Plückerschen Forschungen erwähnen wir noch jene von Klein, Segre, Pasch, Zeuthen, Drach und Paolis (Lincei Mem. 1884--85 über die Geometrie der Geraden, ferner die Untersuchungen über Complexe zweiten Grades von Clebsch, Weiler, Voss, Halphen, Nöther, Klein, Caporali, Aschieri u. A., welche die Eintheilung und Abbildung der quadratischen Complexe zum Gegenstande hatten. Hieher gehören auch jene Arbeiten, die sich mit der Erforschung der Eigenschaften der linearen Congruenzen und mit der Theorie der Strahlensysteme beschäftigten. Auf die diesbezüglichen Forschungen von Kummer haben wir bereits hingewiesen. Sie wurden von Reye, Hirst, Stahl, Caporali, Loria (Torino Atti 1884—86), Sturm (Math. Ann. und Journ. für Math.), u. anderen Mathematikern der Gegenwart fortgesetzt. Eine mustergiltige synthetische Behandlung des linearen Complexes oder Strahlengewindes, des tetraedraten Complexes und der Strahlencongruenzen erster und zweiter Ordnung finden wir in dem neuen Werke „Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie, Leipzig 1892, 1893 und 1896 von Dr. Rudolf Sturm, ord. Prof. an der königl. Universität zu Breslau. Eine schöne analytische Behandlung der Liniengeometrie und insbesondere der linearen Complexe und ihrer Systeme, sowie der infinitesimalen Linien- und der anallagmatischen Geometrie bietet uns Herr G. Koenigs, Professor am Collège de France, in seinem Werke „La Géométrie réglée et ses applications, Paris 1895.

Werfen wir schließlich noch einen flüchtigen Blick auf die durch Riemanns berühmte Abhandlung „Über die Hypothesen, welche der

---

[1]) S.. Dr. Gino Loria, Il passato e il presente delle principali teorie geometriche (Memorie della Reale Accademia delle Science di Torino, Ser. II^a, tom. XXXVIII) und Loria-Schütte, Theorien der Geometrie. S. 98—105 Leipzig 1888.

Geometrie zu Grunde liegen" (Göttinger Abhandlungen vom J. 1867) angeregten Forschungen auf dem Gebiete der Theorie von beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeiten von Helmholtz, Beltrami, Schläfli, Newcomb, Stringham, Killing, Schur, u. A., sowie auf die im n-dimensionalen Raume ausgeführten Untersuchungen in der modernen Kinematik von Clifford, Beltrami, Jordan, Lipschitz, Monro, Scheeffer, Heath und Killing, ferner auf die in n-dimensionalen Räumen ausgeführten curven- und flächentheoretischen Untersuchungen von Jordan, Brunel, Halphen Craig, Kronecker, Beez, Lipschitz, Nöther, Christoffel, Brill, Voss, etc., sowie auf die in diesen Räumen ausgeführten conformen Abbildungen von Craig und auf die Erweiterung der Lehre von den Polyedern auf den n-dimensionalen Raum von Lie, Klein, Jordan, Rudel, Hoppe, Schlegel, Mehmke, Stringham, Biermann, Puchta, etc., so darf uns die im Jahre 1881 im XIX. Bande der Mathem. Annalen, S. 161—234, auf den n-dimensionalen Raum erfolgte Erweiterung der darstellenden Geometrie von Giuseppe Veronese, Professor der höheren Geometrie an der Universität zu Padua, nicht überraschen. Schon im April des folgenden Jahres veröffentlichte Herr Prof. Veronese in den Sitzungsberichten des Reale Istituto Veneto sein interessantes Werk „Geometria descrittiva a quatro dimensioni" und noch in demselben Jahre (1882) dehnte Herr Prof. Dr. Wilhelm Fiedler, der schon im XV. Bande der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (Jahrg. 1870) die von Chasles in seinem Traité de Géom. supérieure, Paris 1852 begründeten projectivischen Coordinaten auf die Ebene erweitert hatte, seine Vorlesungen über darstellende Geometrie am Polytechnicum in Zürich auf den vierdimensionalen Raum aus.

Dieser historische Rückblick (S. 237—349) gibt uns trotz seiner gedrängten Kürze mit dem dritten und vierten Abschnitt dieses Werkes ein sprechendes Bild von dem Ausbau der neueren Geometrie und zeigt uns zugleich den mächtigen Einfluss, den die projective Geometrie seit ihrer Begründung durch Poncelet und Steiner auf die Entwickelung der Mathematik in diesem Jahrhundert im Auslande genommen hat. Diese Macht der projectiven Geometrie musste selbstverständlich jeden activen und passiven Widerstand brechen, den ihr noch vor fünfundzwanzig Jahren die alten und treuen Anhänger der Mongeschen Doctrin entgegengesetzt haben, und so wurde die darstellende Geometrie, welche Monge als Hilfswissenschaft der Ingenieur-Wissenschaften begründet hatte, in der zweiten Hälfte dieses Jahrhundertes eine selbständige Wissenschaft — die Wissenschaft der Raumanschauung.

Der erste Schriftsteller und darstellende Geometer, der die Forschungen von Poncelet und Steiner in die darstellende Geometrie einführte und die projective Geometrie zur Erforschung der Eigenschaften der Projectionen, zur Vereinfachung der Constructionen und zur Erforschung der Linien und Flächen zweiter Ordnung benützte, war bekanntlich Guido Schreiber. Dies geschah in seinem „Geometrischen Port-Foli, Cours der darstellenden Geometrie und ihrer Anwendungen, Karlsruhe, I. Heft 1839, II. Heft 1843."

Von historischem Interesse in der Geschichte der darstellenden Geometrie ist die Begründung, welche der hervorragendste deutsche Schriftsteller Guido Schreiber[1]) für die Neugestaltung der darstellenden Geometrie und für die Umarbeitung seines im Jahre 1828 herausgegebenen Curses der darstellenden Geometrie schon im Jahre 1839 bei der Veröffentlichung seiner „Erläuterung zum geometrischen Port-Folio geltend machte. Imponierend ist auch der Hinweis von Guido Schreiber — damals der beste und gründlichste Kenner der französischen Literatur auf dem Gebiete der Géométrie descriptive — auf die Neugestaltung der darstellenden Geometrie, die zwanzig Jahre später ein ebenso hervorragender Geometer, Professor Karl Pohlke, Mit Recht als eine vieldurchforschte Wissenschaft bezeichnen konnte.

Guido Schreiber, Professor der Mathematik und Vorstand des gesammten graphischen Unterrichtes an der großherz. polytechnischen Schule zu Karlsruhe weist auf die weiteren Entwickelungsmomente hin, die sich aus der fortgesetzten Pflege von Monges Doctrin ergeben mussten, und spricht sich im Gegensatz zu späteren Schriftstellern schon im Jahre 1839 über die wissenschaftliche Stellung der darstellenden Geometrie in Frankreich wie folgt aus:

„In Monges Géométrie descriptive erscheint die darstellende Geometrie als eine Stiefschwester der analytischen Geometrie; das war aber keineswegs die Absicht des berühmten Verfassers. Da er beide Gegenstände gleichzeitig an dem Vorbereitungscurs der damaligen École normale vortrug, so schien es ihm am kürzesten, zur Begründung gewisser Theoreme der Geometrie von drei Dimensionen auf die analytische Deduction zu verweisen; aber dieser Charakter ist, und gewiss mit Unrecht, in der französischen Schule noch bis heute beibehalten worden. So hat noch in dem ganz schätzbaren Buche von Leroy,

[1]) Guido Schreiber, geb. 1799, gest. 1871, war vom Jahre 1827 bis 1851 Professor der darstellenden und praktischen Geometrie an der großherz. polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

dem jüngsten (Paris 1842) über Géométrie descriptive, für die polytechnische Schule zu Paris, die analytische Geometrie den vorherrschenden Eintheilungsgrund abgegeben. Dadurch hat der Stoff alle Selbständigkeit verloren und zugleich einen abstracten Anstrich erhalten, während seine Tendenz vorzüglich, ich möchte fast sagen, ausschließlich auf praktische Anwendbarkeit gerichtet sein musste."

Das nächste Werk, welches insbesondere die Forschungen von Jakob Steiner in der darstellenden Geometrie zu verwerten suchte, war die auf eine reichhaltige Literatur hinweisende „Darstellende Geometrie" von J. M. Ziegler, welche im J. 1843 in Winterthur erschien, wo der Verfasser ein Jahr vorher die berühmte lithographische Anstalt von Wurster & Comp. gegründet hatte, welche sich bald auch als kartographisches Institut einen Weltruf erworben hatte.

Der Verfasser sagt auf S. V der Vorrede seines 148 Folioseiten und 243 Figuren enthaltenden, von analytischen Elementen ganz freien Werkes: „Mochten zwar die vorzüglichen Leistungen vieler ausgezeichneter Schriftsteller [1]) dies- und jenseits des Rheines für den nächsten Zweck der „Géométrie descriptive" genügen, so musste dem, welcher die darstellende Geometrie im bezeichneten Sinne zu bearbeiten unternommen, eine neue Aufforderung dazu beim Studium von Jakob Steiners Werke werden. Die „systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten" ist bis jetzt wohl das vollendetste und zusammenhängendste Werk, welches, im Geiste der neueren Geometrie geschrieben, mit wissenschaftlicher Schärfe die gefundenen Wahrheiten beweist, das Zerstreute in organischen Zusammenhang fasst und zugleich den Leser zum geistigen Anschauen im Raume zwingt."

Dieses gediegene Werk, welches schon vor dreiundfünfzig Jahren die wissenschaftliche Entwickelung und Durchbildung des Vermögens der Raumanschauung als die eigentliche Aufgabe des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie erkannte, hat somit schon vor mehr als einem halben Jahrhundert die Umgestaltung der Methodik dieser damals noch sehr jungen Wissenschaft im Geiste der Steinerschen Geometrie angeregt und angestrebt. Weiter in der Ausbildung der descriptiven Geometrie im Sinne der neueren Geometrie gieng Professor

---

[1]) Anmerkung: J. M. Ziegler, (geb. 1801, gest. 1883) führt in seiner Literatur-Angabe für den Zeitraum 1795—1843 von Monges Géométrie descriptive und Lacroix, Essai de Géométrie bis Schreibers Portofolio 48 Werke der hervorragendsten Schriftsteller und 9 Journale, welche wichtige Beiträge zur darstellenden Geometrie enthalten, an.

K. Pohlke,[1]) welcher im Jahre 1859 in der ersten Abtheilung seines Werkes „Darstellende Geometrie, Berlin 1860, 2. Aufl. 1866" und zwar in den beiden letzten Capiteln, die „Centralprojection" und die „räumliche Projection" die wissenschaftlichen Errungenschaften von Poncelet, Steiner und Chasles für die sich bald bahnbrechende Methodik der Projections- und Modellierungs-Methoden zu verwerten suchte. Diese wissenschaftliche Arbeit ist schon deshalb von großem historischen Werte, weil sie in den nächsten Jahren der Ausgangspunkt für die geistreichen Arbeiten war, welche das neue System der darstellenden Geometrie begründeten.

Dieser von Deutschland ausgehenden Neugestaltung der Géométrie descriptive folgten bald Österreich, die Schweiz, Frankreich und Italien. Ihre Grundlage bildeten hauptsächlich die Werke: „Poncelet J. V., Traité des Propriétés projectives des Figures. Paris 1822. II^e édit. Paris 1865. — Möbius A. F., Der barycentrische Calcul. Leipzig 1827. — Steiner Jakob, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832. — Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. Berlin 1833. — Ch. von Staudt, Geometrie der Lage. Nürnberg 1847. und Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1856—1860. — Chasles M., Traité de géométrie supérieure. Paris 1852." — — — Am ständisch-polytechnischen Institute in Prag (gegründet 1803, eröffnet 1806) wurden die ersten außerordentlichen Vorlesungen über darst. Geometrie in den Jahren 1830, 1831 und 1833 von dem k. k. Pionnier-Lieutenant und suppl. Professor der Baukunst, Karl Wiesenfeld und

[1]) Karl Pohlke, der Begründer des nach ihm benannten Lehrsatzes der Axonometrie, wurde am 28. Jänner 1810 in Berlin geboren, absolvierte nach Vollendung des dortigen französischen Gymnasiums mit mehrfacher Auszeichnung die Kunstakademie und trat später in das Atelier des Professors Hensel ein. Vom Jahre 1835 bis 1847 lebte Pohlke in Paris, wo er ausgedehnte Studien über Perspective betrieb, die ihm die große goldene Medaille der Pariser Akademie der bildenden Künste brachten. Nach Berlin zurückgekehrt, entfaltete er eine umfangreiche und von schönen Erfolgen gekrönte Lehrthätigkeit am Gewerbe-Institut, an der Friedrich Werderschen Gewerbeschule, an der Akademie der Künste und der Bau-Akademie, an welcher er bis wenige Tage vor seinem am 27. November 1876 erfolgten Tode trotz seines bereits leidenden Zustandes den Unterricht mit bewundernswerter Pflichttreue ertheilte. Durch sein bedeutendes, auf modernen Grundlagen ruhendes Werk „Die darstellende Geometrie, I. Abth. Berlin 1860, II. Abth. 1876" hat sich der Begründer des geistreichen Lehrsatzes der axonometrischen Parallelprojection (s. S. 112, III. Aufl. Berlin 1872) den Ruf eines hervorragenden Schriftstellers auf dem Gebiete der darstellenden Geometrie erworben.

von den Adjuncten der Mechanik, Wenzel de Laglio, Johann Sochor und Vincenz Hausmann gehalten.

Durch einen Ministerial-Erlass vom 17. Jänner 1850 wurden an diesem Polytechnicum ordentliche Vorträge über darstellende Geometrie angeordnet und von Prof. Karl Wiesenfeld [1]) übernommen. Nach dessen Rücktritt wurde am 7. November 1852 Rudolf Skuherský zum prov. Professor, und bei Systemisierung der Lehrkanzel (19. Juni 1854) am 16. August 1853 zum wirklichen Professor der darstellenden Geometrie ernannt. [2]) Ihm folgten nach der im Jahre 1864 durchgeführten Reorganisation des polytechnischen Institutes Franz Tilscher, k. k. Hauptmann im Geniestabe und Professor der darstellenden Geometrie an der k. k. Genie-Akademie zu Klosterbruck bei Znaim, und Dr. Wilhelm Fiedler, Lehrer an der höheren Gewerbeschule in Chemnitz.

[1]) Karl Wiesenfeld wurde im Jahre 1802 in Brünn als Sohn eines höheren Officiers geboren und kam mit 10 Jahren in die Cadetten-Bildungsschule zu Olmütz, zwei Jahre darauf in die k. k. Wiener-Neustädter Militär-Akademie, die er im Jahre 1822 als k. k. Lieutenant im Pionnier-Corps verliess, um dann in die Armee einzutreten, der er bis zum Jahre 1829 angehörte. Von 1829—1838 supplierte er am ständisch-polytechnischen Institute in Prag die Lehrkanzel der Baukunst, die ihm am 17. Juli 1838 definitiv übertragen wurde. In den Jahren 1830—1833 hielt Wiesenfeld am Prager Polytechnicum die ersten außerordentlichen Vorträge über darstellende Geometrie, welche er 1850—1852 als ordentliche, vom Ministerium angeordnete Vorträge, wieder übernahm, die nach seinem Rücktritte von dieser Lehrkanzel Prof. Skuherský übertragen wurden. Prof. K. Wiesenfeld starb als geschätzter Architekt und Bautechniker am 7. November 1870.

[2]) Rudolf Skuherský, Professor der beschreibenden Geometrie am königl. polytechnischen Institute in Prag, wurde am 24. April 1828 zu Opočno in Böhmen geboren besuchte die Untergymnasien zu Königgrätz und Braunau, die Oberrealschule zu Prag, 1843—49 die polytechnischen Institute in Prag und 1849—51 in Wien. Im Studienjahre 1851—52 wurde Skuherský Assistent der Lehrkanzel für darstellende Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien, wo er bei Professor Johann Hönig sich eine gründliche wissenschaftliche Ausbildung in allen Gebieten der darstellenden Geometrie aneignete. Nach dem Rücktritte des Professors Wiesenfeld von den Vorträgen über darstellende Geometrie am polytechnischen Institute in Prag wurde Skuherský am 7. November 1853 zu dessen Nachfolger, und 1854 zum ordentlichen Professor der neuerrichteten Lehrkanzel für darstellende Geometrie ernannt. Professor Skuherský, der mit Professor Kořistka den neuen Lehrplan des Prager polytechnischen Institutes entworfen hatte, starb am 9. October 1863. Die erledigte Lehrkanzel füs darstellende Geometrie wurde im Studienjahre 1863—64 von seinem Assistenten und nachherigen Adjuncten Rafael Morstadt suppliert.

Am Anfange des Studienjahres 1864—65 wurden die Professoren Franz Tilscher und Dr. Wilhelm Fiedler an das polytechnische Institut nach Prag berufen, und im Studienjahre 1867—68 eröffnete Professor Karl Küpper seine Vorträge über darstellende und projectivische Geometrie.

Als im Jahre 1869 gemäß der Allerhöchsten Entschließung vom 18. April das Prager polytechnische Institut in ein deutsches und ein böhmisches Institut getheilt wurde, trat an die Stelle von Professor Dr. Wilhelm Fiedler, der im J. 1869 einem Rufe an das eidgenössische Polytechnicum in Zürich gefolgt war, der a. o. Professor für neuere Geometrie (1867), Herr Karl Josef Küpper, vorher Lehrer an der Provinzial-Gewerbeschule in Trier, als ord. Professor der darstellenden und neueren Geometrie, während Professor Franz Tilscher die Vorlesungen über darstellende Geometrie, und die Professoren Josef Šolin und Dr. Eduard Weyr jene über die Geometrie der Lage, beziehungsweise neuere Geometrie am k. k. böhmischen polytechnischen Institute übernahmen.

Nach dem mit Beginn des Studienjahres 1895—96 erfolgten Rücktritte des Herrn Prof. Franz Tilscher von der Lehrkanzel der darstellenden Geometrie an der k. k. böhm. technischen Hochschule wurde mittelst Allerhöchster Entschließung vom 8. Mai 1896 Herr Professor Karl Pelz in Graz zum ord. ö. Professor der darst. Geometrie an der k. k. böhm. technischen Hochschule in Prag ernannt.

An der ständisch-technischen Lehranstalt „Joanneum“ in Graz hielt im Jahre 1842 der Professor der Mechanik, Josef von Aschauer, die ersten außerordentlichen Vorträge über darstellende Geometrie. Im Jahre 1845 gab sein Nachfolger, Prof. Wilhelm Engert den, den Hörern der Mechanik so nothwendigen Unterricht in der darstellenden Geometrie, welche im Jahre 1846 zum selbständigen Gegenstande erhoben und 1846—47 vom Professor des technischen Zeichnens an der Realschule, Moriz Wappler, 1848 von Schnitzer von Lindenstamm und von 1849 an vom Realschulprofessor Max Bauer suppliert wurde. Im Jahre 1852 wurde am „Joanneum“ die Lehrkanzel für darstellende Geometrie systemisiert und 1854 der bisherige Supplent Max Bauer zum Professor derselben ernannt. Als Professor Bauer im Jahre 1859 starb, wurde die Lehrkanzel bis zum Jahre 1861 vom Assistenten Friedrich Kammerer suppliert und in diesem Jahre (1861) der Assistent am Wiener Polytechnicum, Rudolf Niemtschik zum ordentlichen Professor der darstellenden Geometrie am „Joanneum“ ernannt.

Nach seiner im Jahre 1870 erfolgten Berufung an das k. k. polytechnische Institut in Wien wurde Emil Koutny[1]), Docent für

[1]) Emil Koutny wurde am 20. Februar 1840 in Brünn geboren und besuchte nach Vollendung der Mittelschulstudien das k. k. technische Institut seiner Vaterstadt. Von dem damaligen Professor der darstellenden Geometrie, Herrn Dr. G. A. V. Peschka in diese Wissenschaft eingeführt, entfaltete Koutny eine besondere

darst. Geometrie am k. k. technischen Institute in Brünn, zum ord. Professor ernannt, während der Professor der Landes - Oberrealschule in Graz, Herr Karl Pelz, als Docent, dann als ausserord. Professor der Geometrie der Lage und der angewandten darst. Geometrie fungierte. Als Prof. Emil Koutny am 29. September 1880 verschied, wurde Herr K. Pelz ord. Professor der darst. Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Graz, an der er eine hervorragende Lehrthätigkeit entfaltete und unsere Wissenschaft durch eine namhafte Reihe von schönen und wertvollen literarischen Arbeiten bereichert hat.

Die ersten Vorträge über darstellende Geometrie am k. k. technischen Institute in Brünn, dessen Errichtung über Antrag des Ministers für Cultus und Unterricht Grafen Leo Thun mit Allerhöchster Genehmigung vom 13. September 1849 genehmigt wurde, supplierte im Studienjahre 1850—51 der Professor der Brünner Staats-Oberrealschule Herr Anton Mayssl.

Die ordentlichen Vorlesungen über darstellende Geometrie wurden von 1851—67 vom Professor der Bauwissenschaften, Architekten Georg Beskiba und von 1867 — 91 von dem ord. Professor der Mechanik, Herrn Regierungsrath Dr. G. A. V. Peschka gehalten. Als Herr Regierungsrath Dr. Peschka im Jahre 1891 dem ehrenvollen Rufe an die k. k. technische Hochschule in Wien folgte, um dort die nach Prof. Dr. Rudolf Staudigls Tode erledigte Lehrkanzel für darstellende Geometrie zu übernehmen, wurde sein ehemaliger Assistent, Herr Otto Rupp, Privat-Docent für neuere Geometrie, zum ausserord. und 1896 zum ord. Professor der darstellenden Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Brünn ernannt.

Im Jahre 1843 wurde die staatliche Real- und Handels-Akademie in Lemberg durch einen technischen Curs erweitert, aus dem sich allmälig eine technische Akademie entwickelte, die mit Allerhöchster Entschließung vom 12. November 1871 zur k. k. technischen Hochschule mit polnischer Unterrichtssprache erhoben wurde. An der k. k. technischen Akademie in Lemberg supplierte die ersten Vorlesungen über über darstellende Geometrie der Professor der Mechanik Vincenz

---

Vorliebe für dieselbe, wurde 1862 Assistent der Lehrkanzel für darstellende Geometrie und habilitierte sich 1868 als Privatdocent für Schattenlehre und Perspective am technischen Institute in Brünn. Seine hervorragende schriftstellerische Thätigkeit brachte ihm nach Professor Nemtschiks Berufung an das k. k. polytechnische Institut in Wien im Jahre 1870 den Ruf als ord. Professor der darstellenden Geometrie an das ständische polytechnische Institut in Graz, wo er nach zehnjähriger erfolgreicher Thätigkeit am 29. September 1880 leider schon im 41. Lebensjahre verschied.

Hausmann im Studienjahre 1852—53. Von diesem Jahre bis zum Jahre 1873 wurden die ordentlichen Vorlesungen von Herrn Prof. Dr. G. A. V. Peschka gehalten. Nach seiner Berufung an das k. k. technische Institut in Brünn im Jahre 1864 wurde Prof. Wojnarowski zum Professor der darstellenden Geometrie ernannt. Seine Nachfolger sind die Professoren Karl Maszkowsky und seit 1880 Dr. Mieczyslav Lazarski. Durch die Einverleibung des Freistaates Krakau kam im Jahre 1846 auch das dort bereits bestehende technische Institut an Österreich, wo Prof. Bogunski den Unterricht in der descriptiven Geometrie leitete. Dieses technische Institut wurde im Jahre 1871 bei der Erhebung der Lemberger tech. Akademie zur technischen Hochschule in eine Kunstschule und höhere Gewerbeschule umgewandelt.

Am königl. ungarischen Josefs-Polytechnicum in Buda-Pest, welches im Jahre 1846 als Industrieschule in Ofen errichtet und 1871 zur technischen Hochschule erhoben wurde, lehrte zuerst Professor Weiss darstellende Geometrie.

An der durch das Gesetz vom 30. April 1872 begründeten k. k. Hochschule für Bodencultur in Wien lehrte zuerst Professor Josef Schlesinger, vorher Professor an der Oberrealschule am Bauernmarkt und Privat-Docent am k. k. polyt. Institute in Wien, jetzt Prof. Th. Tapla, und an der 1848 errichteten und im Jahre 1874 (Statut vom 15. December) reorganisierten Bergakademie in Leoben lehrte zuerst der k. k. Oberbergrath, Prof. Franz Lorber, und nach seiner Berufung an die k. k. technische Hochschule in Prag der a. o. Professor A. Klingatsch darstellende Geometrie.

Als Professor Johann Hönig nach einer langjährigen und verdienstvollen Lehrthätigkeit am k. k. polytechnischen Institute sein Lehramt niederlegte, folgten ihm am 14. September 1870 seine ehemaligen Assistenten Rudolf Niemtschik [1]), ord. Professor der darstellenden Geometrie am landschaftlich-technischen Institute in Graz, als ordentlicher Professor und Rudolf Staudigl, Adjunct der Lehrkanzel in Wien, als außerordentlicher Professor der Lehrkanzel für darstellende Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien, welches durch den am 4. Mai 1873 genehmigten Gesetzentwurf den Titel „k. k. technische Hochschule“ erhielt. Die Errichtung einer zweiten außerordentlichen Professur am Wiener Polytechnicum hängt mit der Einführung der neueren Geometrie als selbständiger Disciplin im Lehrplane der Hochschule zusammen. Nach Prof. Niemtschiks Tode

[1]) Professor Rudolf Niemtschik wurde am 28. April 1831 in Friedek (Schlesien) geboren und starb am 9. März 1877 in Wien.

wurde Dr. Rudolf Staudigl im Jahre 1877 zum ordentlichen Professor der Lehrkanzel für darstellende Geometrie ernannt, und als dieser am 22. Februar 1891 in Wien verschied, wurde in demselben Jahre Herr Regierungsrath Prof. Dr. G. A. V. Peschka, ord. Professor der Lehrkanzel für darstellende Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Brünn, an die k. k. technische Hochschule nach Wien berufen. Im folgenden Jahre wurde der Adjunct der Bergakademie in Leoben, Herr Franz Ruth, mit der Verpflichtung neuere Geometrie zu lehren, zum außerordentlichen Professor der Lehrkanzel für darst. Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Wien ernannt, der mit Beginn des Studienjahres 1895—96 als ordentl. Professor der Geodäsie an das Polytechnicum in Prag berufen wurde.

Die erste Neugestaltung im Geiste der Geometrie der Lage erhielt die darstellende Geometrie in Österreich in den Vorlesungen, welche Herr Prof. Dr. Wilh. Fiedler in den Jahren 1864—69 am deutschen ständisch-polytechnischen Institute in Prag hielt. Sein Nachfolger Herr Prof. K. Küpper setzte in seinen Vorträgen, sowie in seinen wertvollen wissenschaftlichen Publicationen diesen Ausbau der darstellenden Geometrie auf moderner Grundlage fort.

Im Studienjahre 1867 — 68 hatte sich der Professor der darstellenden Geometrie an der öffentlichen Oberrealschule im I. Bezirke in Wien, Josef Schlesinger, ein Hörer von Johann Hönig, als Privatdocent für Geometrie der Lage und graphische Statik am k. k. polytechnischen Institute in Wien habilitiert. Im folgenden Studienjahre 1869—70 wurde der Adjunct der Lehrkanzel für darstellende Geometrie, Herr Rudolf Staudigl zum Docenten für neuere Geometrie ernannt.

Am k. k. polytechnischen Institute in Wien blieb auch der Nachfolger von Prof. Joh. Hönig, sein ehemaliger Assistent, Herr Prof. Rudolf Niemtschik bis an sein Lebensende (1877) der darstellenden Geometrie im Geiste Monges treu. Dieser berühmte Lehrer am polytechnischen Institute in Wien, bekannt durch seine außergewöhnliche Sympathie für die Ingenieur-Wissenschaften und seine Vorliebe für die beschreibenden Naturwissenschaften, insbesondere für die Krystallographie, geschätzt durch seine hervorragende schriftstellerische Thätigkeit, dieser Meister der Theorie war auch bekannt durch sein ablehnendes Verhalten gegen alles, was man in den letzten drei Decennien neuere Geometrie nannte.[1]) Wenn er auch den Wert der auf diesem modernen Wege gewonnenen geistigen Errungenschaften nicht in Abrede stellte,

[1]) Vergl.: Dr. J. Kolbes Nachruf „Professor Rudolf Niemtschik †“ im I. Jahrg. der Zeitschrift für das Realschulwesen. S. 696 – 698 Wien 1877.

so blieb er doch der festen Meinung: „Wenn auch die neuere Geometrie viel geleistet hat, und uns noch mehr erwarten lässt, so können wir doch mit den Mitteln der alten Geometrie dasselbe leisten.“ Und so finden wir in manchen seiner wissenschaftlich-wertvollen Abhandlungen, auf die wir noch zurückkommen werden, gewisse der Geometrie der Lage angehörige Principien in sehr scharfsinniger Weise in solche Begriffe umgesetzt, die der von Monge begründeten „Géométrie descriptive“ eigen sind. Diese merkwürdige Selbstständigkeit seiner wissenschaftlichen Grundansichten verpflanzte aber Professor Niemtschik mit Erfolg auch auf mehrere seiner jetzt als geschätzte Mittelschullehrer wirkende Schüler, deren jüngsten literarischen Arbeiten uns zeigen, dass die vor hundert Jahren von Monge begründeten Lehren noch heute ihre Fruchtbarkeit nicht verloren haben.

Die ersten ordentlichen Vorträge über neuere Geometrie hielt an der k. k. technischen Hochschule in Wien Herr Dr. Rud. Staudigl[1]), der im Jahre 1875 ad personam zum ordentlichen Professor der darstellenden Geometrie ernannt wurde, mit der Verpflichtung auch Vorträge über neuere Geometrie zu halten. Der Neugestaltung der darstellenden Geometrie auf projectivischer Grundlage folgten dann die technischen Hochschulen in Prag (böhm.), Brünn, Graz und Lemberg.

Die ersten Vorträge über die „Geometrie der Lage“ hielt an der k. k. technischen Hochschule in Brünn Herr Dr. Gust. A. V. Peschka, Professor der darstellenden Geometrie, im Sommersemester des Studienjahres 1872—73, denen sich in den folgenden Jahren die Vorträge über „Kotierte Ebenen“, „Stereotomie“ und „Freie schiefe Projection“ anschlossen.

Bis zum Jahre 1850 beschränkte sich die Pflege der darstellenden Geometrie in Österreich auf die polytechnischen Institute in Prag, Wien und Graz, ferner auf die seit 1846 zu Österreich gehörige technische Akademie zu Krakau und die militär-technischen Akademien zu Wien und Wiener-Neustadt.

---

[1]) Dr. Rudolf Staudigl wurde am 14. November 1838 in Wien geboren, trat 1849 ins Gymnasium, das er im folgenden Jahre mit der Realschule vertauschte. In den Jahren 1856—61 absolvierte er mit ausgezeichnetem Erfolge das k. k. polytechnische Institut in Wien, fungierte 1861—66 als Assistent der Lehrkanzel für darstellende Geometrie, 1866—67 als honorierter Docent des technischen und Freihandzeichnens und von 1867—69 als Adjunct der Lehrkanzel für darstellende Geometrie. Im Jahre 1869 wurde er von der Universität in Rostock in absentia zum Doctor der Philosophie promoviert und 1869—70 zum außerordentlichen Professor, 1875 zum ordentlichen Professor der Lehrkanzel für darstellende Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Wien ernannt. Dr. Rudolf Staudigl starb am 22. Februar 1891.

Der sorgfältigen Pflege der darstellenden Geometrie in den beiden letztgenannten Anstalten verdanken wir neben Alemanns trefflichen „Elementen der entwerfenden Geometrie, Wien 1825“ das umfangreiche „Lehrbuch der darstellenden Geometrie und ihrer Anwendungen auf die Schattenbestimmung, Perspectivlehre und den Steinschnitt“, welches im J. 1847 in Wien (Universitäts-Buchhandlung von A. Dolls Enkel) in zwei Bänden (638 Seiten und 55 Tafeln mit 395 Figuren) erschienen ist und den Hauptmann im k. k. Ingenieur-Corps und Professor an der k. k. Ingenieur-Akademie Josef Stampfl zum Verfasser hatte.

Eine besondere Pflege erfuhr die darstellende Geometrie als Wissenschaft durch die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, welche Kaiser Ferdinand I. an seinem Namenstage im Jahre 1846 geschaffen hatte und welche mittelst Allerhöchsten Patentes vom 14. Mai 1847 ihre Statuten erhielt.

Zu ihrem erlauchten Protector und ersten Curator ernannte Kaiser Franz I. den Schöpfer des Grazer Joanneums, Erzherzog Johann, welcher am 2. Februar 1848 die kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien durch eine huldvolle Ansprache feierlichst eröffnete.[1])

Als Erzherzog Johann am 11. Mai 1859 der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften durch den Tod entrissen wurde, ernannte Seine Majestät unser Allergnädigster Kaiser Franz Josef I. den durch seinen Kunstsinn und seine Liebe zu den Wissenschaften in der Gelehrtenwelt hochgeschätzten, durchlauchtigsten Herrn Erzherzog Rainer zum Curator, den die kaiserliche Akademie der Wissenschaften schon im Jahre 1861 zu ihrem Ehrenmitgliede gewählt hatte.

Fördernd wirkten auf die Entwickelung und Neugestaltung der darstellenden Geometrie die mathematisch-naturwissenschaftlichen Classen der schon im Jahre 1769 als Privatgesellschaft und 1785 als staatliche Corporation anerkannten königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag und der im J. 1872 gegründeten polnischen Akademie der Wissenschaften zu Krakau.[2])

Eine größere Zahl von schätzenswerten Aufsätzen, welche theils die Theorie, theils die Methodik der darstellenden Geometrie zum

---

[1]) S.: „Die feierliche Eröffnungs-Sitzung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.“ Sitzungsberichte der philosophisch-historischen Classe. I. Bd. Jahrg. 1848, S. 3.

[2]) Anmerkung: Im Jahre 1825 wurde die königl. ungarische Gesellschaft der Wissenschaften zu Buda-Pest, 1861 die südslavische Gesellschaft der Wissenschaften in Agram und 1891 die böhmische Akademie der Wissenschaften in Prag gegründet.

Gegenstande haben, finden wir in der von Herrn Dr. Josef Kolbe, o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule und Präses der k. k. wissenschaftlichen Realschul-Prüfungs-Commission in Wien im Jahre 1877 ins Leben gerufenen Zeitschrift für das Realschulwesen. Ebenso enthält die von der Vereinigung böhmischer Mathematiker (Jednota českých mathematiků) herausgegebene, von 1871—1880 von Dr. F. J. Studnička, Professor der Mathematik an der Universität zu Prag, seit 1881 von Dr. Eduard Weyr, Professor der Mathematik an der k. k. böhm. technischen Hochschule in Prag, und in den letzten Jahren von Prof. Dr. A. Panek redigierte Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik (Časopis pro pěstování mathematiky a fisiky) eine größere Zahl von Abhandlungen über descriptive und projective Geometrie.

Gediegene Untersuchungen auf dem Gebiete der darstellenden und neueren Geometrie enthalten die mit Unterstützung des hohen k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht von 1890—1894 von den Universitäts-Professoren Dr. Gustav von Escherich und Dr. Emil Weyer, seit 1895 von dem erstgenannten Universitäts-Professor und Dr. L. Gegenbauer in Wien herausgegebenen Monatshefte für Mathematik und Physik. Schätzenswerte Abhandlungen finden wir auch in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines in Wien, in dem Technischen Organ des Ingenieur-Vereines zu Lemberg, ferner in den Verhandlungen des Naturforschenden Vereines in Brünn, sowie in den Jahresberichten mehrerer wissenschaftlicher Vereinigungen und Lehrer-Vereine der österreichisch-ungarischen Monarchie. Ein erfreuliches Bild reger literarischer Thätigkeit der Lehrkräfte österreichischer Mittelschulen bieten die vielen Programmaufsätze in den Jahresberichten dieser Unterrichtsanstalten und die stattliche Zahl trefflicher Werke und Lehrbücher, sowie die zahlreichen Abhandlungen heimischer Gelehrten und Lehrer in ausländischen Zeitschriften.

Die stattliche Reihe von wissenschaftlich-wertvollen Abhandlungen über darstellende Geometrie in den Sitzungsberichten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien eröffnete ein Hörer von Professor Johann Hönig am k. k. polytechnischen Institute, Rudolf Skuherský, mit der Abhandlung „Die orthographische Parallelperspective,“ deren Inhalt im V. Bande, Jahrg. 1850, S. 326 — 343 der Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien veröffentlicht ist. Diese Abhandlung war auch der Gegenstand eines freien Vortrages, den Skuherský in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften am 31. Oktober 1850 hielt. Rudolf Skuherský, der schon im folgenden Jahre zum Assistenten von Prof. Hönig ernannt und im Jahre 1852 als Professor der darstellenden Geometrie an das ständisch-polytechnische Institut nach Prag berufen wurde, entwickelte in diesem Vortrage die Grundgesetze seiner auf dem Principe der ähnlichen Transformation der Coordinaten (Veränderung der Lage der Bildfläche) beruhenden orthographischen Parallelperspective, welche auch mit Vortheil auf die Mohssche Projectionsmethode der Krystallgestalten verwendet werden kann.

Am Schlusse dieser Abhandlung dankt der Verfasser, der sich selbst noch als Anfänger in der darstellenden Geometrie bezeichnete, seinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Hönig, für die vorzügliche Anleitung und für sein rastloses Bemühen in der Unterweisung seiner lernbegierigen Hörer. Der Inhalt dieser Abhandlung lag auch einer später veröffentlichten Arbeit von Prof. Rudolf Skuherský „Ausführliche Bearbeitung der orthographischen Parallelperspective, Prag (Calve) 1855“ zu Grunde. Rudolf Skuherský, der im Jahre 1851 zum Assistenten der Lehrkanzel für darstellende Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien ernannt und schon im J. 1853 mit den selbständigen und erweiterten Vorträgen am ständischen polytechnischen Institute in Prag betraut und im Jahre 1854 (16. August) zum ordentlichen Professor der descriptiven Geometrie ernannt worden war, setzte seine Studien auf diesem Gebiete fort, die er unter dem Titel: „Die Methode der orthogonalen Projection auf zwei Ebenen, die keinen rechten Winkel mit einander einschließen, als Grundlage für jede auf dem Principe der orthogonalen Projection beruhende perspectivische Projectionsart oder Parallel-Perspective“ in den Sitzungsberichten der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag vom J. 1858 veröffentlichte.

Geistiges Eigenthum des österreichischen Bürgerstandes wurde aber die darstellende Geometrie erst in der zweiten Hälfte dieses Jahrhundertes, wo unter der **glorreichen Regierung** unseres **Allergnädigsten Kaisers Franz Josef I.** die bereits bestandenen sechs zwei- bis dreiclassigen Realschulen [1]) zu siebenclassigen Realschulen erweitert und 61 Oberrealschulen, 17 Unterrealschulen, 1 Militär-Oberrealschule, 4 Militär-Unterrealschulen, 3 Kunst-Gewerbeschulen, 16 höhere Staats-Gewerbeschulen, 1 Lehranstalt für Photographie, 80 Fachschulen für gewerbliche Zweige, ferner zwei Berg-Akademien, die technischen

[1]) Wien (err. 1813), Prag (deutsch und böhmisch, err. 1833 und 1849), Rakonitz (1829, eröff. 1833), Reichenberg (1837) und Graz (1845).

Institute zu Lemberg und Brünn, die Hochschule für Bodencultur neu errichtet, und die technischen Institute und Berg-Akademien, sowie die Akademie der bildenden Künste zu Hochschulen erhoben wurden.[1]) Infolge dieses geradezu colossalen Aufschwunges, den das technische, reale und gewerbliche Unterrichtswesen in Österreich seit dem Regierungsantritte unseres edelsten Monarchen genommen, stieg die Zahl der Studierenden dieser Unterrichtsanstalten von etwa dreitausend auf die imposante Höhe von nahezu fünfzigtausend.

Die österreichische Unterrichts-Politik in diese neuen, dem Bürgerstande segenbringenden Bahnen gelenkt zu haben, ist ein Verdienst des ehemaligen Ministers für Cultus und Unterricht, Leo Grafen von Thun, auf dessen allerunterthänigsten Vortrag vom 12. Februar 1851 die kaiserliche Verordnung vom 2. März 1851 der Vervollständigung der Realschulen in Wien, Prag, Graz, Reichenberg und Rakonitz und der Errichtung der Realschulen in Brünn, Lemberg, Krakau, Linz, Salzburg, Innsbruck, Klagenfurt, Laibach, Triest, Zara und Troppau die Allerhöchste Genehmigung ertheilt, und die unverzügliche Vornahme der Verhandlungen wegen Reorganisierung der technischen Institute angeordnet wurde. Sein umsichtiger Ministerialrath Dr. Marian Koller hat sich in den Jahren 1851 — 1866 um die Organisation der österreichischen Realschulen große Verdienste erworben.

Seit jener Zeit hat eine Reihe von verdienstvollen und berühmten Männern, wie Dr. Leopold Hasner, Karl Edler von Stremayer, Sigmund Freiherr Conrad von Eybesfeld und seit 5. November 1885 Seine Excellenz Dr. Paul Freiherr Gautsch von Frankenthurn als Minister für Cultus und Unterricht für die Gründung und Hebung des realen, gewerblichen und kunstgewerblichen Unterrichtes und für die Blüthe unseres technischen Hochschulwesens zum Segen unseres Vaterlandes ihre besten und edelsten Kräfte eingesetzt.

Nach dem durch die Allerhöchste Entschließung vom 6. September 1849 und die hohen Verordnungen Seiner Excellenz des Herrn Ministers für Cultus und Unterricht vom 15. April 1879, Z. 5607 und 23. April 1880, Z. 6233 genehmigten Entwurfe der Organisation der Realschulen in Österreich wurde die darstellende Geometrie als obligater Lehrgegenstand mit zusammen 10, bezw. 9 Lehrstunden wöchentlich in die drei Classen der Oberrealschule eingeführt. Ebenso wurde die darstellende Geometrie in die Studienordnung (1877) der im Jahre 1871 in Wien errichteten Kunst-Gewerbeschule des k. k. österr. Museums,

[1]) **Anmerkung:** In diesen Zahlen sind die 36 Realschulen in Ungarn, Siebenbürgen, Croatien und Slavonien nicht inbegriffen.

sowie in den Lehrplan der in dem Zeitraume von 1870—1891 errichteten 16 Staats-Gewerbeschulen als obligater Lehrgegenstand aufgenommen, und findet in den zahlreichen Fachschulen für gewerbliche Zweige mannigfache praktische Anwendungen. Selbstverständlich fand diese Wissenschaft auch in den Studienplänen der Berg-Akademie in Leoben, die durch die Allerhöchste Entschließung vom 15. December 1874 ihr jüngstes Statut erhielt, und der im Jahre 1872 errichteten Hochschule für Bodencultur in Wien als ordentlicher Gegenstand Aufnahme, während sie an der Berg-Akademie in Przibram im Bau- und Maschinenwesen eine vielfache praktische Verwendung findet.

Nicht unerwähnt können wir lassen, dass sich besonders im letzten Decennium hervorragende Gelehrte sowohl des Inlandes als auch des Auslandes für die Einführung der darstellenden Geometrie, deren Elemente bereits in unseren gewerblichen Fortbildungsschulen Eingang gefunden haben, in den Gymnasial-Unterricht ausgesprochen haben.[1])

Diese hervorragende Stellung, welche die österreichische Unterrichtspolitik der darstellenden Geometrie als Wissenschaft im technischen, realen und gewerblichen Unterrichtswesen seit dem Jahre 1850 eingeräumt hatte und die große, volkswirtschaftliche Bedeutung, welche Monges Doctrin schon vor drei Decennien in unserem Staatswesen erlangt hatte, waren die anregenden Ursachen für ausgedehnte Forschungen in allen Zweigen der darstellenden Geometrie, welche heute in Österreich ihre eigene, reichhaltige und im Auslande geschätzte Literatur besitzt.

Hatte aber schon im Jahre 1818, dem Todesjahre des größten Reformators in der französischen Unterrichtspolitik, die Pariser Akademie der Wissenschaften die geistige Unübertrefflichkeit der Grundlagen von Monges Doctrin die verdiente Anerkennung gezollt und ihre Principien

---

[1]) S. d. Artikel: „Überblick über die geschichtliche Entwickelung und die wissenschaftliche Aufgabe der darstellenden Geometrie“ in dem trefflichen Werke „Lehrbuch der darstellenden Geometrie“ des Geheimen Hofrathes Herrn Dr. Christian Wiener in Karlsruhe. (Leipzig 1884. I. Bd. S. 59—61).

S. a. d.: „Vorrede“ zu „Elemente der darstellenden Geometrie“ von Dr. Rudolf Sturm, ord. Professor am Polytechnicum zu Darmstadt, Leipzig 1874. — „Wert und Bedeutung des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie an Mittelschulen.“ Vortrag gehalten vom k. k. Regierungsrath, Herrn Dr. G. A. V. Peschka, ord. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien, in der 42. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Wien. Mai 1893. (Sonderabdruck, Leipzig 1894).

Vergl. a.: „Der Übergang aus dem philosophischen in das naturwissenschaftliche Zeitalter,“ Rede gehalten aus Anlass der Gründung der Berliner Universität in der Aula der königl. Friedrich Wilhelms-Universität am 3. August 1893 vom Rector Rudolf Virchow. (Berlin 1893, bei Aug. Hirschwald).

als ein unveränderliches, dauerndes und vollkommenes Muster von intellectueller Klarheit anerkannt, — hatte schon im Jahre 1830 der bekannte französische Philosoph Auguste Comte in seinem großen Werke „Cours de Philosophie positive“ [1]) sich über Monges Schöpfung in folgenden Worten geäußert: „Cette importante création mérite singulièrèment de fixer l'attention de tous les philosophes qui considèrent l'ensemble des opérations de l'espèce humaine, comme étant un premier pas, et jusqu' ici le seul réelment complet, vers cette révocation générale des travaux humains“ und hat endlich die darstellende Geometrie schon fast vor drei Jahrzehnten ihren selbständigen wissenschaftlichen Aufbau vollendet, und ist sie in Folge ihrer Befähigung das Raumanschauungsvermögen zu entwickeln in besonders hohem Grade geeignet, den Grund für das Studium der analytischen und noch mehr der höheren Geometrie zu legen, so blieb trotzdem ihre wissenschaftliche Pflege bis zur Gegenwart auf die technischen Hochschulen beschränkt — die Pforten der Universitäten blieben ihr als ordentlichem Lehrfach — wenigstens in Österreich — bis zum Jahre 1896 verschlossen.[2])

[1]) Cours de Philosophie positive par Auguste Comte. Paris 1869. (IV[e] édit.). — S. a. das Compendium des philosophischen Systemes von Jules Rig. Paris 1880.

[2]) Anmerkung: Schon vor fünfzig Jahren (1845) besass die Universität Padua eine Lehrkanzel für darstellende Geometrie, welche durch fünfunddreißig Jahre (1845—1880) der berühmte Verfasser des gehaltreichen Werkes „Lezioni di geometria descrittiva, Padova 1851,“ Professor Giusto Bellavitis (geb. 1803, gest. 1880) inne hatte. Vor dreißig Jahren hatte Professor Denzler an der philosophischen Facultät der Universität in Zürich neben den Vorlesungen über analytische Geometrie sowohl während des Winter- als auch während des Sommersemesters Vorträge über descriptive Geomtrie, Axonometrie und Perspective gehalten, die jetzt in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section dieser Facultät vom Professor A. Weiler gehalten werden. Aber nicht bloß die Schweiz hat an ihrer Universität der darstellenden Geometrie als Wissenschaft die ihr gebührende Stelle im Studienplane eingeräumt, sondern auch zahlreiche deutsche Universitäten haben diesen Fortschritt in den modernen Wissenschaften Rechnung getragen. So verbindet an der Universität zu Göttingen Professor Dr. Schoenflies seine Vorlesungen über Raumcurven und Oberflächen mit besonderen Vorträgen über darstellende Geometrie. Die mathematisch-naturwissenschaftliche Facultät der Universität zu Strassburg besitzt in den Professoren Dr. Reye (synthetische Geometrie) und Dr. Maurer (analytische Theorie der projectiven Geometrie) zwei bekannte und hervorragende Vertreter der geometrischen Wissenschaft. Das Gleiche gilt von den Universitäten Breslau, Würzburg und Halle, wo die Professoren Dr. Sturm, Dr. Voss und Dr. H. Wiener der Liniengeometrie und der Nicht-Euklidischen Geometrie, der Theorie der krummen Linien und Flächen eine den Fortschritten der neueren Geometrie entsprechende Pflege zuwenden. Ebenso hielten an der Universität zu Rostok in den letzten Semestern Professor Dr. Staude und an der natur-wissenschaftlichen Facultät der Universität zu Tübingen Professor Dr. Hölder Vorträge über darstellende Geometrie. Im Studienjahre 1878—79 hatte sich Herr

Blieb aber bei uns in Österreich die streng-wissenschaftliche Pflege der darstellenden Geometrie auf die technischen Hochschulen, die Hochschulen für Berg- und Hüttenkunde, die Hochschule für Bodencultur und die militär-technischen Akademien beschränkt, so erreichte doch ihre Literatur in den letzten Decennien eine ungeahnte und überaus erfreuliche Ausdehnung, an der auch viele Lehrer dieser Disciplin an der Mittelschule den regsten Antheil nahmen. Schon seit Jahren besitzt die österreichische Realschule eine reiche Auswahl von trefflichen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie, für welche in den ersten Jahren Hönigs „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie, Wien 1845" die didaktische Grundlage bildete.

Die darstellende Geometrie und Perspective waren fast bis zum Jahre 1850 und an manchen technischen Instituten selbst über diesen Zeitraum hinaus nur Hilfswissenschaften der Ingenieur- und Baukunst. [1]) Die Errichtung selbständiger Lehrkanzeln befreite beide von ihrem Abhängigkeitsverhältnis und sicherte ihnen eine freie Entwickelung als selbständige Wissenschaft. Dies war aber die Grundbedingung für einen weiteren wissenschaftlichen Ausbau, der sich auf neugeometrischen Forschungen in den folgenden Jahren rasch vollziehen konnte.

Im Studienjahre 1895—96 lehrten an den technischen Hochschulen in Österreich darstellende und projective Geometrie und zwar: in Wien, Herr k. k. Regierungsrath Prof. Dr. G. A. V. Peschka (darst. Geometrie 4 St. Vortrag und 10 St. Constructionsübungen); die Vor-

---

Josef Streissler, Professor der darstellenden Geometrie an der Staats-Oberrealschule in Graz als Privat-Docent für angewandte Geometrie an der Universität zu Graz habilitiert. Erst seit Beginn des Wintersemesters 1895—96 hält der a. o. Professor Herr Dr. K Bobek an der deutschen Karl-Ferdinands-Universität zu Prag durch wochentlich zwei Stunden Vorträge über darstellende Geometrie, nachdem derselbe im letzten Sommersemester (1895) während einer Stunde wochentlich geometrische Constructions-Übungen geleitet hatte. Ebenso gehört die Privat-Docentur des Herrn Karl Schober, Professor der darstellenden Geometrie an der Staats-Oberrealschule in Innsbruck, an der Universität zu Innsbruck dem letzten Studienjahre an.

[1]) Anmerkung: Diese praktische Richtung, welche die darstellende Geometrie — trotz ihres wissenschaftlichen Ausbaues durch Monge — durch so viele Jahre verfolgen musste, war auch eine von jenen Ursachen, die ihr so lange die Pforten der Universitäten verschlossen hatten. Glücklicher war die „Geometrie der Lage," welcher sich aus der darstellenden Geometrie entwickelt hatte und ganz unabhängig von der Ingenieur- und Baukunst sich auf rein wissenschaftlicher Grundlage aufbauen konnte. Schon in den Siebziger Jahren (1870—75) besass die Universität in Prag in Dr. Emil Weyr, später in Dr. Eduard Weyr ausgezeichnete Docenten für „Neuere Geometrie," von welchen der erstere im September des Jahres 1875 als ordentlicher Professor der neueren Geometrie und der höheren analytischen Geometrie an die Universität nach Wien berufen wurde.

träge in der Bauschule über darstellende Geometrie, sowie jene über neuere Geometrie (3+2 St) hielt bis 1895 Herr a. o. Prof. Fr. Ruth, der mit Beginn des Studienjahres als ord. Professor der Geodäsie an die k. k. techn. Hochschule in Prag berufen wurde; seine Vorlesungen in Wien wurden suppliert; in Graz, Herr Prof. Karl Pelz (darst. Geometrie 5+10 St.), Herr Docent Dr. Schüssler (projective Geom. 2 St.); in Prag (deutsche technische Hochschule), Prof. K. Küpper (darst. Geometrie, I. Curs 3+8 St., II. Curs 2+2 St., Geometrie der Lage 1+1 St.), dipl. Ingenieur Steiner, (Photogrammetrie 2 St.); böhmische technische Hochschule, Docent Fr. Prochaska (in Vertretung des beurlaubten Prof. Fr. Tilšer), (darst. Geom. I., II., III. Curs je 5+5 St.; Beleuchtungslehre und Intensitäts-Constructionen 2 St.; Geometrie der Lage 2 St.; Kinematik 2 St.); Prof. Dr. Eduard Weyr, (Geometrie der Lage 3 St.); in Brünn, Prof. Otto Rupp (darst. Geometrie 5+10 St.; ausgewählte Partien aus dem Gebiete der darst. Geom. 2. St. und Geometrie der Lage (neuere Geometrie) 2 St.); in Lemberg, Prof. Dr. L. Lazarski, (darst. Geometrie 5+10 St., neuere Geom. 2. St.); in Wien (Hochschule für Bodenculter), Prof. Theodor Tapla (darst. Geom. 4 St.); in Leoben (Berg-Akademie), a. o. Prof. A. Klingatsch, (darst. Geom. 3+4 St.)[1])

[1]) Anmerkung: An den technischen Hochschulen des Auslandes lehrten im Studienjahre 1895—96 darstellende Geometrie: Aachen, Prof. Dr. Friedrich Schur (darst. Geom. 4 St. Vortrag und 4 St. Constructionsübungen in der Woche, Elemente der darst. Geom. 2+2 St., graphische Statik 3+2 St. — Berlin, Prof. Dr. Hauck (Projectionslehre mit projectivischer Geometrie 5+5 St.; praktische Perspective und Schattenlehre 5+5 St.), Docent Dr. Hertzer (Parallel- und Central-projection 5+5 St., Schattenlehre und praktische Perspective 5+4 St.). — Braunschweig, Prof. Dr. R. Müller (darst. Geom. 4+6 St., Perspective und Schattenlehre 2 St., Geometrie der Lage 3 St., Geometrie der Bewegung (Kinematik) 3 St. — Darmstadt, Prof. Dr. Hermann Wiener (darst. Geom. I. Curs 4+6 St., II. Curs 1+2 St., synthetische Geom. 2 St., Hofrath Dr. Nell (darst. Geom. für Geometer 1 St.). — Dresden, Prof. Dr. K. Rohn, (darst. Geom. 4+6 St., Geom. der Kegelschnitte 1 St., Theorie der krummen Flächen 2 St.). Prof. Dr. Rittershaus, (Kinematik 4+2 St.). — Helsingfors (Finnland), Prof. K. E. Palmén (darst. Geom. I. Curs 3+6 St., II. Curs 2+4 St., projective Geom. 2 St.). — Freiberg. (Berg-Akademie), Prof. Dr. Papperitz (darst. Geom. 2+3 St.). — Hannover, Prof. Dr. Rodenberg (darst. Geom. 3+6 St.), Prof. Dr. Kiepert (Geometrie der Lage 4 St.). — Karlsruhe, Geheimrath Dr. Christian Wiener (darst. Geom. I. Curs 4+4 St., II. Curs 4+4 St.; Perspective 2+2 St.); Prof. Dr. Scholl (neuere synthetische Geometrie 3 St.). — München, Prof. Dr. Burmester (darst. Geom. 4+4 St. project. Geom. und Kinematik. Prof. Dr. von Braunmühl (project. Geom. 3 St.), Prof. Dr. Finsterwalder (Photogrammetrie 2 St.). — Padua (R. Scula d'applicazione per gli Ingeneri. Padova), Docent E. Legnazzi (Geometria descrittiva 6 St.). — Paris (Ecole polytechnique) Prof. Colonel A. Mannheim (Géométrie descriptive et cinématique, Stéréotomie, Géométrie de

Ein sprechendes Bild dieses wissenschaftlichen Ausbaues und der Neugestaltung der darstellenden Geometrie und Perspective auf projectivischer Grundlage gibt uns die Literatur dieser Wissenschaft, welche dem Hönigschen Werke vom Jahre 1845 in rascher Aufeinanderfolge eine stattliche Reihe von wertvollen Werken und Abhandlungen folgen liess.

Hönigs „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie" (Wien 1845) folgte schon im Jahre 1847 das umfangreiche, 638 Seiten und 395 Figuren umfassende Lehrbuch der darstellenden Geometrie und ihrer Anwendungen auf die Schattenbestimmung, Perspectivlehre und den Steinschnitt von Josef Stampfl, Hauptmann im k. k. Ingenieur-Corps und Professor an der k. k. Ingenieur-Akademie in Wien, welches durch viele Jahre der Leitfaden für den descriptiven Unterricht an unseren militär-technischen Bildungsanstalten war.

Dieses Werk behandelt im ersten Bande (312 Seiten und 23 Tafeln mit 141 Figuren) in ausführlicher und leicht verständlicher Weise den theoretischen Theil der darstellenden Geometrie, welcher im sechsten Abschnitte die verschiedenen Arten der windschiefen Flächen, u. zw. das gerade Konoid (S. 286), die windschiefe Fläche des schrägen Tonnengewölbes (S. 288) und die windschiefe Schraubenfläche (S. 290) mit ihren praktischen Anwendungen (S. 290—296) behandelt, die Construction der Tangentenebenen an windschiefe Flächen erläutert und sich im Anhange (S. 298 — 312) mit der Kotierung unter Benützung einer Projection, sowie mit diesbezüglichen Aufgaben beschäftigt und die Grundsätze der bei Fortificationszeichnungen gebräuchlichen Darstellungsmethoden entwickelt. Der zweite Band (326 Seiten und 32 Tafeln mit 254 Figuren) ist ganz den praktischen Anwendungen der darstellenden Geometrie gewidmet und behandelt in der ersten Abtheilung (S. 1—112) die Lehre von den geometrischen Schattenbestimmungen, in der zweiten Abtheilung (S. 113—240) die Perspectivlehre und in der dritten Abtheilung (S. 241 — 326) die Lehre vom Steinschnitt. Die wissenschaftliche Grundlage für dieses Lehrbuch, das sich durch einen

---

position). (32+30 Vorträge zu $1^1/_2$ St. und Repetitionen). — Riga, Prof. Dr. Bock (darst. Geometrie I. Curs 4+4 St.), Docent von Westermann (darst. Geometrie II. Curs 1+2 St.); Prof. Dr. Bock (Geometrie der Lage 2 St.). — Stuttgart, Prof. Dr. Mehmke (darst. Geometrie 4+6 St., synthetische Geometrie 3+2 St., Kinematik 3+2 St). Prof. A. Göller (Schatten- und Beleuchtungskunde 4 St., theor. Perspective 2 St. — Zürich, Prof. Dr. Wilhelm Fiedler (darst. Geom. 3+1+4 St. (Vortrag, Repetion, Constructionsübungen), projective Geometrie 2 St., Centralprojection und Cyklographie 2 St.). Ingenieur- und mech.-techn. Schule), Docent Dr. A. Weiler (darst. Geom. 2+1+4 St., Bauschule).

besonderen Reichthum gut gewählter, praktischer Aufgaben auszeichnet, bildeten die Werke von Monge, Hachette, Vallée, Leroy, Bordoni, Adhémar und Schreiber.

Das erste Lehrbuch für Realschulen, ein „Compendium der darstellenden Geometrie" erschien im Jahre 1853 in Pressburg und hat den Lehrer der darstellenden Geometrie und des Bauzeichnens an der dortigen öffentlichen, städt. Oberrealschule, J. Nigris, zum Verfasser. Nigris benützte bei der Verfassung dieses Lehrbuches (155 Seiten und 154 Figuren), welches er seinem verehrten Lehrer, Professor Johann Hönig in Wien widmete, seine Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie; ferner Stampfl's Lehrbuch der darst. Geometrie, die „Geometrische Constructionslehre" von G. Schaffnit (Darmstadt, II. Aufl., 1837), die „Projectionslehre" von C. A. Menzel (Leipzig, II. Aufl. 1852), etc. Der achte Abschnitt ist den Schatten-Constructionen, der neunte Abschnitt der Perspective gewidmet.

Im Jahre 1856 erschienen bei Carl Winiker in Brünn die bekannten „Grundzüge der darstellenden Geometrie nebst ihrer Anwendung auf Schattenbestimmung, Linear- und Parallel-Perspective" von Rudolf Schnedar, Lehrer an der k. k. Oberrealschule in Brünn, welche insbesondere den Zweck hatten, dem die Studienbahn verlassenden Oberrealschüler ein abgeschlossenes, zu praktischen Zwecken hinreichendes Ganzes und dem die technischen Studien fortsetzenden eine brauchbare Grundlage für seine weitere wissenschaftliche Ausbildung zu bieten. Diesen Zweck erreichte das 320 Seiten und 279 Figuren enthaltende treffliche Lehrbuch, welches dem Ministerialrathe im k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht Herrn Marian Wolfg. Koller gewidmet ist, vollständig und fand in den Fachkreisen eine solche freundliche Aufnahme, dass schon im Jahre 1859 von dem Werkchen die zweite Auflage erschien. Diesen schönen Erfolg verdankte Schnedars Lehrbuch, welches noch heute in der von Prof. Josef Streissler in Graz durchgeführten und dem neuen Lehrplane entsprechenden Bearbeitung (I. Auflage, Brünn 1875, II. Auflage 1879, III. gekürzte Auflage, Brünn 1894) an vielen unserer Realschulen im Gebrauche ist, dem ausgezeichneten Geiste, den Prof. Johann Hönig in seinen Vorträgen am k. k. polytechnischen Institute in Wien und in seinem Werke „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie" seinen Hörern für ihre wissenschaftliche und lehramtliche Laufbahn mitzugeben verstand.

Die „Elemente der darstellenden Geometrie" von Josef Streissler, Professor an der Staats-Oberrealschule und Privat-Docent an der k. k. Universität in Graz, erschienen in ihrer ersten Auflage bei Carl Winiker in Brünn im Jahre 1875. Die zweite, verbesserte Auflage

(190 S., 339 Fig. und 9 Tafeln) erschien 1879, der im Jahre 1894 die dritte gekürzte Auflage (181 S., 207 Figuren und 5 Tafeln) in demselben Verlage folgte.

Ein hervorragender Schriftsteller und Verfasser von Lehrbüchern war der Realschul-Professor Ferdinand Alex. Heissig in Wien, dessen „Anleitung zum Zirkel- und Lineal-Zeichnen" im Jahre 1855 erschien, der im Jahre 1859 das „Lehrbuch der darstellenden Geometrie und ihrer Anwendung auf die Schatten-Construction, freie Perspective und auf das technische Zeichnen, Wien 1859" folgte. Im Jahre 1864 erschienen seine „Grundzüge der trimetrischen Projectionsmethode mit ihrer Anwendung auf das Entwerfen geometrischer Objecte", die im Jahre 1885 bei Spielhagen und Schurich in zweiter Auflage zur Ausgabe gelangten.

Im Jahre 1862 veröffentlichte der Professor an der Communal-Oberrealschule auf der Wieden in Wien, Carl Güntner, sein „Lehrbuch der darstellenden Geometrie", dessen zweite Auflage (199 S. und 272 Fig.) bei Carl Graeser in Wien im Jahre 1878 erschien. Im Jahre 1864 erschienen bei Carl Winiker in Brünn die „Grundzüge der zeichnenden Geometrie als Anleitung zur perspectivischen Aufnahme" (159 S. und 177 Fig.), welche den wirkl. Lehrer der darst. Geometrie und Maschinenlehre an der Staats-Oberrealschule in Brünn, Prof. Franz Matzek zum Verfasser hatten.

Für Realschulen mit böhmischer Unterrichtssprache erschienen in den Jahren 1862 und 1863 in Prag das aus zwei Theilen bestehende Lehrbuch „Zobrazujíci měřictví" (Géométrie descriptive) von D. Ryšavý und im Jahre 1877 (bei L. Kober) das Lehrbuch „Deskriptivní geometrie" von Franz Šauda, Professor der Staats-Mittelschule in Tabor. Seine Grundzüge der Perspective (Základové perspektivy) gab Professor M. Kuchinka im Jahre 1873 in Königgrätz heraus. Im Jahre 1874 veröffentlichte Franz Smolík, Professor an der Staats-Oberrealschule in Budweis, sein Lehrbuch der freien Perspective und in den Jahren 1875 und 1876 folgte das von demselben Verfasser herausgegebene, aus zwei Theilen bestehende Lehrbuch der darstellenden Geometrie im Verlage bei Stropek in Budweis, welches 1882 in neuer Auflage und Bearbeitung als „Elemente der darstellenden Geometrie" erschien. Ein recht gutes „Lehrbuch der darst. Geometrie" verfasste auch Irenäus Kreuszel, Professor an der Landes-Oberrealschule in Prossnitz, das im J. 1876 bei Fr. Karafiat in Brünn erschienen ist.

In den Jahren 1875—77 erschienen in Prag die drei Theile des böhmischen Lehrbuches der darstellenden Geometrie „Deskriptivní geometrie" (426 Seiten und 420 Fig.) von Vincenz Jarolímek, Professor an der böhm. Staats-Realschule in Prag, dem im Jahre 1887 die zweite Auflage folgte. Im Jahre 1893 gab Herr V. Jarolímek, k. k. Direktor der böhm. Staats-Oberrealschule in Königgrätz die dritte Auflage (276 S. und 330 Fig.) seines Lehrbuches heraus.[1])

Im J. 1882 erschienen in Prag bei F. Tempsky die „Elemente der darstellenden Geometrie" (271 S. und 345 Fig.) vom k. k. Ober-Realschul-Professor Franz Smolík. In demselben Jahre erschien bei A. Hölder in Wien das treffliche und vielbenützte „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" von Josef Menger, Professor der Staats-Oberrealschule in Graz, (337 S. mit 228 Original-Holzschnitten), das Prof. J. Zian in Rovereto zum Gebrauche für Ober-Realschulen mit italienischer Unterrichtssprache ins Italienische übersetzte.

Im Schuljahre 1891—92 erschien bei Spielhagen & Schurich in Wien für den Gebrauch an Bau- und Maschinen-Gewerbeschulen „Die Projectionslehre mit besonderer Berücksichtigung des Bau- und Maschinenfaches" von Johann Kuglmayr, Ingenieur und Lehrer an der k. k. Staats-Gewerbeschule in Wien. Dieses Lehrbuch, 168 S. und 51 Tafeln mit 322 Fig. enthaltend, verbindet in zweckentsprechender Weise unter Benützung der orthogonalen Projectionsmethode die Lehre von den Ebenen-Schnitten (Dachausmittlungen), eckigen Körpern und die Theorie der Flächen zweiter Ordnung, der Rotations-, windschiefen und gewundenen Flächen mit der Praxis und löst im Anhange (S. 159 bis 168) einige dieser Aufgaben auch mittelst der Axonometrie.[2])

Für Gewerbe- und Ackerbauschulen hatte Nikolaus Fialkowski, Professor an der Communal-Realschule im VI. Wiener Bezirke, im Jahre 1883 ein Lehrbuch unter dem Titel „Die Projectionslehre mit Inbegriff der Schatten-Construction und der orthogonalen Parallelperspective nebst einem Anhange über die reine Perspective, Wien 1883" (27 Seiten, 26 Tafeln mit 266 Figuren) verfasst.

---

[1]) Anmerkung: Bezüglich der Pflege der darstellenden Geometrie und ihrer Literatur in Böhmen bis zum Jahre 1878 bez. 1883 verweisen wir auf die „Historie deskriptivní geometrie, Praha 1878" von Wenzel Lavička, Professor der Staats-Oberrealschule in Kuttenberg, später in Pardubitz und auf seine begonnene Abhandlung „Deskriptiva ze stanoviště historicko paedagogického, Sešit prvý, Pardubice 1883," (Die descriptive Geometrie vom historisch-pädagogischen Standpunkte, I. Heft, Pardubitz 1883). Die allgemeine Geschichte der darstellenden Geometrie und ihre Pflege in Polen bildet den Gegenstand der interessanten Abhandlung „Krótko zebrana hystorya geometryi wykreślnej, Stanisławów 1890 a 1891" von Professor Michael Rembacz, veröffentlicht in den Jahresberichten der Staats-Oberrealschule in Stanislau (Galizien) in den Schuljahren 1890 u. 1891.

[2]) Vergl. Kuglmayers „Projectionslehre" mit dem „Lehrbuch der darstellenden Geometrie, I.—III. Theil, Dresden 1893—94" (2. Aufl.) von J. Schlotke, Oberlehrer der allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg.

Seit dem Jahre 1882 ist für die technische Militär-Akademie in Wien, ferner für die Militär-Akademie zu Wiener-Neustadt und die Artillerie- und Pionnier-Cadettenschulen in Wien und Hainburg vom k. k. Reichs-Kriegs-Ministerium Herrn Prof. Johann Choura's „Leitfaden für den Unterricht in der darst. Geometrie. Wien 1882" (296 S. und 281 Figuren) als Lehrbuch, bezw. als Lehrbehelf vorgeschrieben. Dieser Leitfaden der darst. Geometrie für militär-technische Zwecke behandelt im ersten Abschnitte (S. 1—137) die orthogonale, im zweiten Abschnitte (S. 138—170) die schiefe oder klinogonale Parallel-Perspective. Der dritte Abschnitt (S. 171—248) ist der Perspective und der Central-Projection gewidmet, während im vierten Abschnitte (S. 249—296) die kotierte Projectionsmethode (kotierte Ebenen) und ihre Anwendung auf praktische Aufgaben den Gegenstand der Vorträge des Herrn Regierungsrathes J. Choura, ord. Professor an der k. u. k. technischen Militär-Akademie in Wien, bilden.

An Beispiel-Sammlungen besitzen wir die „Aufgaben aus der darstellenden Geometrie" (186 an der Zahl) von Josef Mikoletzky, k. k. Professor der I. deutschen Staats-Oberrealschule in Prag, die im Jahre 1877 in Wien bei Ed. Hölzel erschienen. Für Realschulen mit böhmischer Unterrichtssprache erschienen 1880 in Prag die „Sbírka úloh z deskriptivní geometrie" (1224 Aufgaben) von Prof. Vincenz Jarolímek. Im Jahre 1887 veröffentlichte Joachim Steiner, k. k. Oberlieutenant im 2. Genie-Regimente und Lehrer an der k. k. Militär-Oberrealschule zu Mähr.-Weisskirchen in Commission bei A. Hölder in Wien seine „Sammlung von Maturitätsfragen aus der darstellenden Geometrie", welche 1029 Fragen enthaltend — bis auf die letzten sechs Fragen — den officiellen Jahresberichten der öffentlichen Realschulen entnommen sind. Das jüngste Hilfsbuch dieser Art, die „Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der darstellenden Geometrie für Realschulen" erschien im Schuljahre 1892—93 bei A. Hölder in Wien und hat Josef F. Heller, k. k. Professor an der Staats-Oberrealschule in Linz zum Verfasser. Der 1. Theil für die fünfte Classe enthält 690 Aufgaben, bezw. Beispiele; der 2. Theil für die sechste Classe 603 und der dritte Theil für die siebente Classe enthält 258 Aufgaben und Beispiele, so dass in dieser reichhaltigen Sammlung dem Lehrer und Schüler 1551 Aufgaben und Beispiele aus den verschiedenen Capiteln der darstellenden Geometrie zur Verfügung stehen.[1])

[1]) **Anmerkung:** Interessant ist ein Vergleich der Beispielsammlungen der Gegenwart mit der Beispielsammlung von Leopold Mossbrugger, Professor an der Kantonschule in Aarau, „Größtentheils neue Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive, Zürich 1845."

Für bau- und kunstgewerbliche Zwecke soll die in der Ausgabe begriffene Sammlung „Praktische Beispiele aus der darstellenden Geometrie" von Josef Wildt, Professor an der Staats-Gewerbeschule in Reichenberg dienen, von welcher die erste musterhaft ausgeführte Lieferung 1895 in Reichenberg erschienen ist.

Von einleitenden Lehrbüchern erwähnen wir die Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie von J. Menger, K. Moshammer, J. Streissler, Hočevar, Rossmanith-Schober, etc., welche der darstellenden Geometrie eine gute Grundlage schaffen.

Für die Ausbildung des Raumanschauungsvermögens dienen die zweckmäßigen Modelle für die darstellende Geometrie von den bekannten Firmen Franz Steflitschek in Wien und Dr. Houdek-Hervert in Prag, während A. Steinhauser in Graz im J. 1871 seine „Netze der Poinsotschen Körper" dem stereometrischen Unterrichte zuführte.

Die technischen, realen und gewerblichen Bildungsanstalten der polnischen Nation, welche frühzeitig der darstellenden Geometrie ihre Aufmerksamkeit und eine besondere Pflege zugewendet hatte,[1]) besitzen ihre eigene Literatur. Wir erwähnen aus den letzten Jahren nur folgende Werke und Lehrbücher: „Kurs geometryi wykreślnej, Lwow 1870" vom Realschul-Professor Greg. Grzybowski in Lemberg; „Geometrye wykreślna, Kraków 1875 vom Adjunkten des astronomischen Observatoriums in Krakau, Dr. Daniel Wierzbicki; „Nauka wolney perspektywy, Lwow 1879" von Karl Maszkowski, o. ö. Professor der darstellenden Geometrie an der k. k. polytechnischen Hochschule in Lemberg; „Perspektywa linijna, Lwow 1880" von Dr. Mieczyslaw Lazarski, o. ö. Professor der darst. Geometrie an der k. k. tech. Hochschule in Lemberg, sowie dessen „Zasady geometryi wykreślnej, Lwow 1889" zum Gebrauche für Oberrealschulen.

Sämmtliche der hier genannten Lehrbücher behandeln den Lehrstoff der darstellenden Geometrie im Geiste Monges nach der synthetischen Methode. Die Verfasser dieser Elemente der darstellenden Geometrie haben in denselben die Errungenschaften der neueren Geometrie entweder mit Absicht — als nicht in die Mittelschule gehörig — ganz unberücksichtigt gelassen, oder denselben nur einen bescheidenen Raum überlassen. Das letztere gilt insbesondere von den unendlich fernen Elementen der Grundgebilde, dem Princip der Reciprocität, der

---

[1]) Anmerkung: Wir verweisen hier bezüglich der Pflege der darstellenden Geometrie in Polen auf den Artikel „Nauka Monge'a w Polsce" von Professor Michael Rembacz im Jahresberichte 1891 der Staats-Oberrealschule in Stanislau. (S. 52—63).

Collineation und Affinität und den — sozusagen in die Augen springenden — einfachsten Singularitäten der Curven. Dieser Standpunkt war einerseits ein durch die maßgebenden Ansichten hervorragender Fachgelehrten fast bis zur Gegenwart berechtigter. So spricht sich einer der hervorragendsten Vertreter der neugeometrischen Richtung auf dem Gebiete der darstellenden Geometrie, der nach der Reorganisation des ständisch-polytechnischen Institutes (1864) nach Prag und später nach Zürich berufene Herr Prof. Dr. Wilhelm Fiedler in der Vorrede (S. VII), seines im Jahre 1871 in der ersten und im Jahre 1875 in der zweiten Auflage veröffentlichten Werkes „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, Leipzig 1871 und 1875“ bezüglich der Umgestaltung der Elemente der darstellenden Geometrie im Sinne der neueren Geometrie folgendermaßen aus:

„Ich habe eine Reform des Unterrichtes in den Elementen nicht im Auge und halte sie für entbehrlich, glaube aber, dass man sie in keinem Falle wird vollziehen können, ohne eine Reform des gesammten geometrischen Unterrichtes damit zu verbinden“. [1])

Diese heute — nach zwanzig Jahren — umso interessantere Stelle, welche ein im Dienste der darstellenden Geometrie ergrauter Gelehrter und Lehrer im Jahre 1883 vielleicht mit inniger Befriedigung citierte, um sich in so entschiedener Weise gegen die Einführung der neueren Geometrie in die Elemente der darstellenden Geometrie auszusprechen, fehlt aber im I. Bande der dritten in den Jahren 1883—85 erschienenen Auflage von Prof. Dr. Wilhelm Fiedlers Werk „Die Methoden der darstellenden Geometrie und die Elemente der projectiven Geometrie“ — und zwar mit vollem Rechte.

Diese Reform der darstellenden Geometrie, von welcher noch im Jahre 1858 einer der bedeutendsten Geometer Frankreichs J. de la

---

[1]) Vergl.: Dr. Wilhelm Fiedler: „Zur Reform des geometrischen Unterrichtes,“ XXII. Bd. der Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrg. 1877 und „Über die Nothwendigkeit einer gründlichen Reform des Unterrichtes in den Elementen der darstellenden Geometrie“ in dem Artikel „Kritische Bemerkungen zur Einführung in die Anfangsgründe der Géométrie descriptive“ von Franz Tilšer, Professor an der k. k. böhm. technischen Hochschule in Prag, Reichsraths-Abgeordneter, etc. Wien 1883. S. 20, 26 und 27.

S. a.: H. Drasch, Über die Stellung der synthetischen Geometrie zur darstellenden Geometrie. Zeitschrift für das Realschulwesen, V. Jahrg. S. 393—401, Wien 1880 und Cl. Barchanek, Die darstellende Geometrie als Unterrichtsgegenstand an Realschulen. Jahresbericht der Staats-Oberrealschule in Görz für das Schuljahr 1875—76.

Gournerie[1]) sagen konnte: „La géométrie descriptive est une science nouvelle: elle ne date que de Monge“ im Sinne der neueren Geometrie hat sich im Laufe von wenigen Jahren an allen Hochschulen vollzogen und sie wird sich auch auf ihre grundlegenden Elemente erstrecken müssen, wenn die Realschulen ihr Schülermaterial auf wissenschaftlicher Grundlage für die Hochschulen wirklich vorbereiten wollen. Wenn auch Monges Doctrin in ihrer Einfachheit und Klarheit auf Jahre hinaus dieser Reform zu widerstehen geeignet war — das geistige Band zwischen der vorbereitenden Mittelschule und der streng wissenschaftlichen Hochschule wird schon jetzt vermisst, weil die technischen Hochschulen der Gegenwart — ihrer Aufgabe die Ingenieurwissenschaften zu pflegen treu bleibend — Hochschulen der Mathematik und der Naturwissenschaften geworden sind. Schon zu Ende der sechziger Jahre hat die österreichische Realschule die ihr zuerst zugewiesene gewerbliche Richtung verlassen, die nun von den zahlreichen Staatsgewerbeschulen und gewerblichen Fachschulen eine insbesondere Pflege findet. Durch diese Anstalten in ihren Aufgaben entlastet, wird die Oberrealschule sich in möglichst innigster Weise an die technische Hochschule anschließen müssen, um mit ihr das beiden Bildungsstätten gesteckte hohe und geistig bildende Ziel vollständig zu erreichen.

Schon vor nahezu zwanzig Jahren war Herr Guido Hauk, Professor der darstellenden Geometrie an der königl. technischen Hochschule in Berlin, in seinem im Jahre 1877 in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der XXXI. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Tübingen gehaltenen Vortrage: „Über die Stellung der neueren Geometrie zur Euklidischen“ zu dem Schlusse gelangt, dass mit Rücksicht auf den gegenwärtigen Stand sowohl der Mathematik als der technischen Wissenschaften es ein dringendes Bedürfnis sei, dass die neuere Geometrie in den Lehrplan der zehnclassigen Realschulen und Realgymnasien Deutschlands aufgenommen werde. Referent sprach sich bezüglich des neuen Lehrganges dahin aus, dass derselbe analog demjenigen sei, wie ihn Prof. Dr. Wilhelm Fiedler in seinem classischen Lehrbuch der descriptiven Geometrie durchgeführt hat.[2]) Im Gegensatze zu dem geschätzten Referenten

[1]) S.: J. de la Gournerie, „Discours sur l'art du Trait et la Géométrie descriptive.“ Paris 1858, pag. 5. — Vergl. a: M. Chasles, „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie. Paris 1875, pag. 189.

[2]) S.: Professor Guido Hauck's Vortrag „Über die Stellung der neueren Geometrie zur Euklidischen und die Aufnahme der ersteren in den Lehrplan der 10-classigen Realschulen und Realgymnasien“ im Correspondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen Würtembergs und in der Zeitschrift für das Realschulwesen. Wien 1877, II. Jahrg. S. 834—847.

müssen wir uns bezüglich des neuen Lehrganges aber dahin aussprechen, dass auch diese Neugestaltung der Elemente der darstellenden Geometrie auf projectiver Grundlage für die Oberrealschule den Grundbedingungen unserer Pädagogik und Didactik entsprechen und vom einfachen und leichteren Lehrstoffe zum schwierigen fortschreiten muss. Gestützt auf die Congruenz und Affinität, die Aehnlichkeit und Collineation ebener Gebilde und der Entwickelung der Kegelschnitte als affine und collineare Projection des Kreises, muss der didaktische Lehrgang der Mittelschule im Gegensatze zu dem strengwissenschaftlichen Lehrgange der Hochschule nicht von der Centralprojection, sondern von der orthogonalen Projection ausgehend, die ebenflächigen Gebilde und die Flächen der zweiten Ordnung behandeln.[1])

Diese Reform[2]) des descriptiv-geometrischen Unterrichtes, welche umso leichter durchzuführen sein wird, als der Lehrstand schon seit dreißig Jahren an den Hochschulen Österreichs im Geiste der modernen Geometrie herangebildet wurde, vollzieht sich auf dieser Grundlage — freilich nur innerhalb der Grenzen des Lehrplanes vom Jahre 1880 — schon seit Jahren gewissermaßen von selbst. Die Géométrie descriptive, welche Monge vor hundert Jahren als eine neue, auf dem Gebiete der Geometrie epochemachende Wissenschaft geschaffen hatte, blieb doch fast bis zum Jahre 1864 in allen Culturstaaten des Continentes und der transatlantischen Länder nur eine Hilfswissenschaft der Ingenieur- und Kriegswissenschaften, trotzdem Frézier[3]) schon im Jahre 1750 die sorgfältigsten Erwägungen über den Formenwandel und die Classification der Durchdringungscurven der Kegelflächen zweiten Grades angestellt und Hachette — der Nachfolger Monges — im Jahre 1808 im ersten Bande der „Correspondance sur l'École polytechnique, pag. 368" die Meinung ausgesprochen hatte, dass die Projectionen dieser Durchdringungscurven alle Curven vierter Ordnung liefern müssten — mit

[1]) Vergl. die Methoden-Lehre in Dr. Wilhelm Fiedlers Werk „Die darstellende Geometrie, (I. Aufl. Leipzig 1871, II. Aufl. 1875 und III. Aufl. 1883, 1885 und 1888) mit jener in Dr. Karl Rohn und Dr. Erwin Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. I. Bd. Leipzig 1893. (II. Bd. 1896). — S. a.: „Die Elemente der darstellenden Geometrie" von Dr. Rudolf Sturm, ord. Prof. am Polytechnicum zu Darmstadt. Leipzig 1874.

[2]) Vergl.: Dr. E. Dühring, „Logik und Wissenschaftstheorie." Leipzig 1878. S. 266, etc. und Dr. Wilhelm Fiedler, Zur Reform des geometrischen Unterrichtes. XXII. Bd. der Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 1877.

[3]) S.: Frézier, „La théorie et la pratique de la coup des pierres et des bois, ou traité de stéréotomie. Strasbourg 1738 et 39. (Nouv. édit. Paris 1754, 68 et 69) Pag. 280.

Ausnahme jenes Falles, in welchem die Kegelflächen eine gemeinsame Mantellinie besitzen.

Die Forschungen von Poncelet, Steiner, Chasles, von Staudt etc. blieben in der descriptiven Geometrie, die eine praktische Wissenschaft geworden war, unbeachtet. Diesen Charakter einer praktischen Wissenschaft tragen auch sonst alle bis zum Jahre 1864 in Frankreich, Deutschland, der Schweiz, Österreich, Italien etc. verfassten Werke, welche in ihrem strengwissenschaftlichen Theile noch auf analytischer Grundlage aufgebaut erscheinen. Dies gilt auch von dem großen, an trefflichen Einzelnheiten so reichen Werke von J. de la Gournerie „Traité de Géométrie descriptive" 3 part. Paris 1860—64, dessen erster Theil (Paris 1860) noch ganz den Charakter eines praktisch-wissenschaftlichen Werkes trägt. Aber schon im zweiten 1862 erschienenen Bande, sah sich der gelehrte Verfasser unter dem Eindrucke der schönen Erfolge, welche die moderne Geometrie bis zu diesem Zeitpunkte erlangt hatte, den Plan seines Werkes zu ändern und insbesondere den Ponceletschen Forschungen eine entsprechende Berücksichtigung einzuräumen — doch Descartes analytische Methode beherrschte in diesem ausgezeichneten Werke bei der Begründung von Constructionen gewissermaßen mit einer wissenschaftlichen Berechtigung noch ein weites Gebiet der darstellenden Geometrie.

Diesen analytischen Charakter finden wir selbstverständlich in der Curventheorie (S. 220—307) des schon im Jahre 1845 erschienenen Hönigschen Werkes „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie, Wien 1845", dessen praktische Richtung der Verfasser schon in dem Zusatze des Titels mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung bei dem Zeichnen technischer Gegenstände, insbesondere jener der Baukunst, der praktischen Geometrie und des Maschinenwesens" zum Ausdruck brachte.

Bescheiden sind die Fortschritte, welche auf dem Gebiete der „Freien Perspective" nach ihrer Begründung durch J. H. Lamberts Werk (Zürich 1759) im XVIII. Jahrhundert und in der ersten Hälfte des XIX. Jahrhunderts erzielt wurden. Fast bis zum Jahre 1860 war die Perspective wohl ein beliebter Gegenstand der Kunst, aber nicht ein solcher der Wissenschaft und es währte verhältnismäßig lange, bis sie in ihren Constructionen auf die Benützung des Grund- und Aufrisses, bez. der Horizontal- und Verticalebene ganz verzichtete. Die ersten Fortschritte auf dem Gebiete der neueren Perspective finden wir wieder in Frankreich, wo sie besonders von den Professoren der Akademie der bildenden Künste in Paris als neuere französische Perspective begründet wurde. Dies geschah zuerst durch das Werk „Géométrie perspective, Paris 1828“ von B. E. Cousinery, sowie durch das im Jahre 1827 von Chapuis herausgegebene Werk über Linearperspective von Thibault und später durch das im Jahre 1838 in Paris erschienene Buch „Traité de perspective linéaire“ von Professor Adhémar, welches Möllinger ins Deutsche übersetzte (2. Ausgabe 1850). Auch in dem großen Werke „Traité de perspective linéaire, Paris 1859“ von J. de le Gournerie, Professor der darstellenden Geometrie an der École politechnique, finden wir eine noch oft vorkommende Verwendung des perspectivischen Grundrisses und der Breiten-, Tiefen- und Höhenmaßstäbe.

In Professor J. Hönigs „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie, Wien 1845“ bildet die perspectivische Projection den nur 30 Seiten umfassenden Schluss des 513 Seiten starken Werkes. Doch genügten schon diese Ausführungen Prof. Hönigs mit den in den Vorlesungen gegebenen Anregungen seinem ersten Assistenten Rudolf Skuherský, um über die Theorie der Theilungspunkte in der freien Perspective weitergehende Studien anzustellen, welche die Verlegung des Theilungspunktes zum Zwecke von genaueren Constructionen zum Gegenstande hatten. Die diesbezüglichen Untersuchungen bilden den Gegenstand eines Vortrages, den Assistent R. Skuherský am 30. October 1851 in der Sitzung der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien hielt.[1]) Einen größeren Raum (S. 113—240) gewährte der Hauptmann J. Stampfl der Perspective in seinem Lehrbuche der darstellenden Geometrie (Wien 1874). Als geometrische Wissenschaft wurde die Centralprojection aber erst begründet durch die Programmschrift „Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft“ (Chemnitz 1860) von Professor Dr. Wilhelm Fiedler und besonders durch die Werke „System der technisch-malerischen Perspective, Prag 1867,“ von Prof. F. Tilscher und „Freie Perspective in ihrer Begründung und Anwendung, Hannover 1868, von Gustav Ad. V. Peschka, o. ö. Professor am k. k. tech. Institute in Brünn und Emil Koutny, Privatdocent für Perspective und Schattenlehre an demselben Institute. In der erstgenannten Programmschrift (41. S.) hat Herr Dr. Wilhelm Fiedler, damals Lehrer der darst. Geometrie an der höheren Gewerbeschule in Chemnitz, durch Einführung der perspectivischen Elemente in die Constructionen der darstellenden Geometrie die freie Perspective oder Centralprojection als geometrische Wissenschaft begründet und sie von dem Grundriss und Aufriss ganz unabhängig gemacht.

[1]) S.: Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. VII. Bd. S. 471—477, Jahrg. 1851.

Den weiteren Ausbau der freien Perspective als geometrische Wissenschaft verdanken wir aber den beiden Werken von Tilscher und Peschka-Koutny. Das letztere 434 Seiten umfassende Werk, dessen vorzügliche typographische Ausstattung und 336 in den Text gedruckten Holzschnitte das höchste Lob in Fachkreisen fanden, erklärte Herr Prof. Dr. O. Schlömilch im Jahre 1869 für das beste neuere Lehrbuch der Perspective.[1])

Prof. Fiedlers Abhandlung „Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft, Chemnitz 1860" zerfällt in zwei Abschnitte, von denen der erste die ebenflächigen Raumformen, der zweite die krummen Oberflächen, insbesondere die Kegelflächen behandelt.[2]) Die Theorie anderer Flächen, wie die der Drehungsflächen, der Rückungsflächen, der Umhüllungsflächen, ist nicht gegeben. Der erste Abschnitt besteht aus drei Theilen, von welchen der erste sich mit der perspectivischen Darstellung der geometrischen Grundgebilde (Punkt, Gerade, Ebene) und ihrer Anwendung zur Auflösung von Aufgaben beschäftigt, während der zweite die Ableitung der wahren Größe und Lage projicierter Raumformen zum Gegenstande hat. In dem dritten Theile wird die Ableitung der Projectionen aus gegebenen Elementen der Größe und Lage gelehrt.

Die allgemeinen Gesetze der Centralprojection als Darstellungsmethode entwickelte Herr Prof. Fiedler an der Untersuchung der geometrischen Elementarformen und ihrer einfachen Verbindungen in dem ersten Theil der Methodenlehre seines geschätzten Werkes „Die darstellende Geometrie, Leipzig 1871" (S. 5—70), welches sich im Wesentlichen an seine an der technischen Hochschule in Prag in den Jahren 1864—69 gehaltenen Vorlesungen anschließt. An diesen Abschnitt, in welchem die Gesetze der Centralprojection bereits in ihrer organischen Verbindung mit der Geometrie der Lage entwickelt wurden und die Doppelverhältnisse von Strahlen- und Ebenenbüscheln, die harmonische Theilung, die projectivischen Reihen- und Strahlenbüschel, ferner die Involution, die involutorischen Reihen und Büschel und die Collineation mit ihren fünf besonderen Fällen in der elegantesten Weise in die Centralprojection eingeführt wurden, schließt sich die constructive Theorie der Kegelschnitte als Kreisprojectionen (S. 71—121) unmittelbar an, welche in der centrischen Collineation räumlicher Systeme als Theorie der Modellierung-Methoden (S. 121—138) eine sinnreiche Erweiterung findet. Im vierten Abschnitte (S. 139—194) werden die

[1]) S.: Schlömilchs Zeitschrift für Math. und Phys. XIV. Jahrg. S. 5—6 der Literaturzeitung. Leipzig 1869.

[2]) S. a.: Wilhelm Fiedlers Inaugural-Dissertation „Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft. Leipzig 1859.

Grundgesetze der orthogonalen Parallelprojection, ihre Transformation und die Axonometrie als besondere Fälle der Centralprojection entwickelt. Die constructive Theorie der krummen Linien und Flächen bildet den zweiten Theil (S. 195—504) dieses trefflichen Werkes, welches mit der Theorie der projectivischen Coordinaten (S. 505—580) einen modernen und zeitgemäßen Abschluss findet. Die zweite Auflage dieses durch seine reichen Quellen und Literatur-Nachweise ausgezeichneten Werkes erschien bekanntlich schon im Jahre 1875, der in dem Zeitraume 1883—88 die dritte, wesentlich erweiterte Auflage folgte.

Seine ersten wissenschaftlich-wertvollen Arbeiten über die Neugestaltung der darstellenden Geometrie veröffentlichte Herr Dr. Wilhelm Fiedler, Lehrer an der Gewerbeschule in Chemnitz, in dem bereits erwähnten Programme dieser Anstalt für das Jahr 1860 „Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft“ und in der Zeitschrift für Mathematik und Physik (S. a. d. Noten, Bd. V u. VI. S. 56 u. 76, Jahrg, 1860 u. 61) unter dem Titel „Über das System in der darstellenden Geometrie“ (VIII. Jahrgang, S. 444 — 447, Leipzig 1863) und „Über die Transformationen in der darstellenden Geometrie“ (IX. Jahrg. S. 331—355, Leipzig 1864). Herr Dr. Fiedler, der im Jahre 1864 als Professor der darstellenden Geometrie an das ständisch-polytechnische Institut nach Prag berufen wurde, spricht sich am Schlusse dieser in demselben Jahre (1864) veröffentlichten Abhandlung wie folgt aus: „Ich habe es nie für ein zufälliges historisches Zusammentreffen ansehen können, dass die Entwickelung der darstellenden Geometrie des Monge an der Schwelle der neueren Epoche der geometrischen Entdeckungen steht; dass sie den Anstoss gab zu den Untersuchungen von Poncelet und Chasles ist bekannt. Wäre nicht die Perspective allzu ausschließlich in den Dienst der Kunst getreten, welcher der Geometrie nicht günstig ist, so würde man die darstellende Geometrie auch als die natürliche Quelle der Wissenschaft Jacob Steiners und seiner Nachfolger erkannt haben; sie war schon immer die Wissenschaft der Strahlenbüschel und Ebenenbüschel und das Gesetz der Doppelschnittverhältnisgleichheit ist ihr allgemeines Grundgesetz. Unter diesem Gesichtspunkte bildet die neuere analytische Geometrie und Algebra die eine, die darstellende und die neuere reine Geometrie die andere Seite der Entwickelung desselben Gedankens. Die neuere Algebra und die reine Geometrie sind aber dann ihrer Natur gemäß zu Erweiterungen geschritten, die der darstellenden Geometrie nicht mehr angehören. Dies ist aber die Stelle, wo die neuere Geometrie sich an die wissenschaftliche Sphäre der technischen Lehranstalten anschließt, der die darstellende Geometrie von jeher angehört."

Prof. Dr. W. Fiedler, der schon im Jahre 1862 seine „Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen" als Beitrag zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen auf Grund der neueren Forschungen von Georg Salmons „Lessons introductory to the modern higher Algebra" und A. Cayleys „Memoirs upon Quantics" veröffentlicht hatte, setzte seine Untersuchungen über die Neugestaltung der darstellenden Geometrie in der umfangreichen Abhandlung „Die Methodik der darstellenden Geometrie zugleich als Einleitung in die Geometrie der Lage" in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien (LV. Bd., II. Abth., S. 659—740, Jahrg. 1867) fort und untersuchte hier — von der Centralprojection als den richtigsten Ausgangspunkt der Methodik der darstellenden Geometrie — ausgehend, die collinearen Systeme an den Grundgebilden der ersten, zweiten, dritten und vierten Stufe, die Gesetze der Dualität, die Erzeugnisse (Curven) projectivischer Elementargebilde (projectivischer Büschel), die Gesetze der involutorischen Centralcollineation, involutorische Reihen und Büschel, harmonische Pole und Polare, die Kegelschnitte als Involutionsgestalten, die Gesetze der centrischen Collineation räumlicher Systeme und ihre Beziehungen zu den Methoden der Modellierung solcher Systeme im Raume, die Verbindung der Theorie der Kegelschnitte mit der Geometrie der Lage zur Behandlung der Flächen zweiten Grades und aller von ihnen abhängigen Formen, etc. Der Verfasser schließt seine Ausführungen mit dem Hinweis auf die Forschungen von Pascal, Brianchon, Brasseur, B. E. Cousinery und die den Zweck nicht erreichende „Transformation homologique" von J. de la Gournerie, ferner auf die grundlegenden Werke von Steiner und von Staudt, bei denen die volle wissenschaftliche Allgemeinheit zum Ausdruck kam, und sich besonders in dem Werke des letzteren Meisters in der gänzlichen Beseitigung des graphischen Elementes geäußert hat.

Eine vollständige Verschmelzung der darstellenden Geometrie mit der neueren Geometrie führte Prof. Dr. Fiedler in seinen Vorträgen am polytechnischen Institute in Prag und am eidgenossenschen Polytechnicum in Zürich durch, deren Gegenstand den Inhalt seines im Jahre 1871 bei B. G. Teubner in Leipzig erschienenen großen Werkes (590 Seiten, 228 Fig.) „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage" bildet.

Das treffliche Werk, welches auf strengwissenschaftlichen Grundlagen ruhend, technische Anwendungen und Beispiele ausschliesst, die eigentliche Aufgabe des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie „die wissenschaftliche Entwickelung und Durchbildung des Vermögens der Raumanschauung" im Geiste moderner Geometrie in allen Capiteln sich zum Ziele gesetzt hat, und durch seine sorgfältigen Quellen- und Literatur-Nachweisungen ein gründliches Selbststudium wesentlich erleichtert, wurde schon im Jahre 1874 von den Professoren Padova und Sagno in Florenz ins Italienische übersetzt und erschien 1875 in zweiter (761 S., 260 Fig.) und 1883 — 1888 in dritter vermehrter Auflage.

Der erste Band (376 S., 138 Fig. und 6 Tafeln) der III. Auflage (Leipzig 1883) enthält „Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projectivischen Geometrie"; der zweite Band (560 S., 127 Fig. und 16 Tafeln, Leipzig 1885) enthält „Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen, während im dritten Bande (660 S., 53 Fig. und 1 Tafel, Leipzig 1888) „Die construierende und analytische Geometrie der Lage" eine ausgedehnte und sorgfältige Behandlung findet. Das 1596 Seiten enthaltende Werk, das uns in sprechender Weise den Aufschwung, den die darstellende Geometrie in den letzten dreißig Jahren genommen, vor Augen führt, zeichnet sich in seiner letzten Auflage durch eine vollständigere Vorbereitung und Durchführung der Lehre von der Involution, des charakteristischen Doppelverhältnisses der Centralprojection und seiner Anwendungen der Lehre von den projectivischen Coordinaten und insbesondere durch seine gediegene Methodenlehre aus.

Berücksichtigen wir noch, dass sich Herr Prof. Dr. W. Fiedler durch die in mehreren Auflagen erschienenen deutschen Übersetzungen der epochemachenden Werke von George Salmon „A Treatise on Conic Sections," „Treatis on the higher plane Curves," „Analytic Geometry of three dimensions" etc. ein besonderes Verdienst um die Neugestaltung der mathematischen Literatur[1]) erworben hat, so können wir mit vollem Rechte diesen Vertreter der darstellenden Geometrie als einen der hervorragendsten Forscher der Gegenwart auf dem Gebiete der modernen Raumgeometrie bezeichnen.[2]) Es ist auch ein Verdienst des Herrn Prof. Dr. Wilhelm Fiedler während seiner lehramtlichen

[1]) S. a.: Dr. Wilhelm Fiedler, Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Behandlung der Kreis- und Kugelsysteme. Leipzig 1882.

[2]) S. a.: Dr. Wilhelm Fiedlers interessante Abhandlungen in der Schlömilchschen Zeitschrift für Mathematik und Physik (Jahrg. IV. — IX Leipzig 1859—64, etc. und in der Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. XV, Jahrg. 1870 bis Bd. XXVII, Jahrg. 1882, etc.

Thätigkeit an der k. k. technischen Hochschule in Prag im Vereine mit Herrn Prof. Karl Küpper zwei unserer hervorragendsten Gelehrten und Schriftsteller, Dr. Emil Weyr, o. ö. Professor der höheren Geometrie an der Universität in Wien und Karl Pelz, o. ö. Professor der darstellenden Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Graz in die „Geometrie der Lage" eingeführt zu haben. Eine besonders in den österreichischen Lehrkreisen auf das beste aufgenommene methodische Darstellung erhielt die Centralprojection in dem großen, 2548 Seiten umfassenden Werke „Darstellende und projective Geometrie nach dem gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft, Wien 1883—85," welches der Verfasser, Herr k. k. Regierungsrath Dr. Gustav Ad. V. Peschka, ord. ö. Professor der darstellenden Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Brünn, Seiner kaiserlichen und königlichen Hoheit dem durchlauchtigsten Kronprinzen Erzherzog Rudolf in unwandelbarer Treue und Hingebung, in tiefster Ehrfurcht und Unterthänigkeit treu ergebenst gewidmet hat.

Der gelehrte Verfasser behandelt in seiner Methodik der Centralprojection (I. Bd., S. 7—211, Wien 1883) nach Darstellung des Punktes, der Geraden und der Ebene die projectivischen Beziehungen zwischen diesen Grundgebilden (S. 29—49), untersucht hierauf ihre metrischen Eigenschaften (S. 49—128) und übergeht auf die Entwickelung der Gesetze der projectivischen Geometrie (S. 129—211, welche mit der Collineation eingeleitet werden und mit dem Gesetze der polaren Reciprocität ihren Abschluss finden. In diesem Capitel wird das Doppelverhältnis von vier Punkten oder vier Strahlen unter Berücksichtigung der Doppelpunkte und Doppelstrahlen entwickelt, die Lehre von den involutorischen Punktreihen und Strahlenbüscheln, ferner von den harmonischen Punkten und Strahlen begründet und nach den harmonischen Eigenschaften eines vollständigen Viereckes oder Vierseites werden die projectivischen Fundamental-Eigenschaften des Kreises einer eingehenden Behandlung unterzogen. Nun folgen die Kegelschnitte als projectivische Erzeugnisse mit dem Pascalschen und Brianchonschen Satze als Collineargebilde des Kreises, die harmonische Collineation und die Lehre von den Polen, Polaren, conjugierten Polen und Polaren. In eingehender Weise werden die Durchmesser, Mittelpunkte, conjugierten Durchmesser, Hauptachsen, Asymptoten, Brennpunkte und Krümmungskreise behandelt, die Kreise als Centralprojectionen von Kreisen dargestellt und nach diesbezüglichen Aufgaben wird das Gesetz der polaren Reciprocität entwickelt. Die historische Grundlage für diese Untersuchungen bilden die Forschungen von Desargues, Pascal, De la Hire, Brianchon, Poncelet, Möbius, Steiner, von Staudt, Chasles, Reye, Fiedler, Schröter, Thomae, Paulus etc. Eine noch weitergehende Berücksichtigung neugeometrischer Forschungen erhielt die freie Perspective, welche in ihrer allgemeinsten Form als Centralprojection den Schlüssel für die „Geometrie der Lage" bildet, in dem ausgezeichneten Werke „Freie Perspective, Leipzig 1888--89" von Herrn Regierungsrath Dr. Gustav A. V. Peschka, ord. Professor der darstellenden Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Brünn, in dessen beiden Bänden die wertvollen Forschungen von Steiner, von Staudt, Pohlke, Reye, Schröter, Schur, Klein, Burmester, Hauck, Staudigl, Weyr, Salmon, Fiedler, J. de la Gournerie, Cremona, Darboux, Thomae, Chr. Wiener etc. uns oft begegnen und dem gediegenen Werke einen ganz modernen und eleganten Charakter verleihen. Es behandelt im ersten Abschnitte (S. 1—99) die Grundzüge der Centralprojection, im zweiten Abschnitte (S. 100—147) die Elemente der projectivischen Geometrie, die Curven zweiten Grades als projectivische Erzeugnisse (S. 148—234), ferner die collineare Verwandtschaft zweier ebenen Systeme und die speciellen Formen desselben und löst die Aufgaben der darstellenden Geometrie in centralprojectivischer Darstellung mit Benützung projectiver und collinearer Constructionen. (S. 271—289). Besonders wissenschaftliches Interesse verdient die im III. Abschnitt (S. 290—302) durchgeführte Theorie der Transformation des Projectionscentrums, aus welcher sich die bisher übliche Verschiebung des Centrums längs der Falllinie der Fluchtebene als ein besonderer Fall ergibt.

Eine ausgezeichnete, auf projectiver Grundlage ruhende Behandlung erzielt die Centralprojection oder die Perspective im engeren Sinne in Dr. Chr. Wieners Lehrbuch der darstellenden Geometrie" (I. Bd., S. 452—468 und II. Bd., S. 603—645, Leipzig 1884—87) und besonderes Interesse erwecken auch die beiden Capitel „Freie Perspective" (S. 411—448) und „Angewandte Perspective" (S. 448—475) im II. Bande des „Lehrbuches der darstellenden Geometrie, Leipzig 1896" von K. Kohn und E. Papperitz. Eine besonders sorgfältige Pflege fanden in technischen und naturwissenschaftlichen Kreisen die orthogonale Projection, die orthographische Parallel-Perspective, und die Axonometrie. Die erstere hatte Monge in seiner „Géométrie descriptive, Paris 1795" bereits in einem so vollkommen entwickelten Zustande den Geometern des XIX. Jahrhunderts hinterlassen, dass es mehr als ein halbes Jahrhundert währte, bis Brasseur in seinem „Mémoire" (Bruxelles 1853) durch Einführung der Achse der Affinität einen Fortschritt im Sinne der neueren Geometrie erzielte. Ihren weiteren Ausbau in diesem Sinne erhielt die Mongesche Orthogonal-Projection durch Dr. Wilhelm Fiedler in seinem Werke „Die darstellende Geometrie, Leipzig 1871“ in dem Abschnitte (S. 139—184) „Die Grundgesetze der orthogonalen Parallelprojection und ihre Transformation“ und später durch Professor Peschka im VIII. Capitel „Monge's Orthogonalprojection“ (Bd. I., S. 276—339) seines großen Werkes „Darstellende und projective Geometrie“ (Wien 1883).

Mit großer Vorliebe bedienten sich schon frühzeitig die Naturforscher der orthographischen Parallel-Projection oder Parallel-Perspective zur graphischen Darstellung der Krystallgestalten. Schon in seinem „Grundriss der Mineralogie, 1822—24“ und in seinen „Leichtfassliche Anfangsgründe der Naturgeschichte“ (I. Theil, 2. Aufl., Wien 1836, S. 30—156) bediente sich der k. k. wirkl. Bergrath Friedrich Mohs[1]) zur graphischen Darstellung der tessularischen Krystallgestalten der nach ihm benannten trimetrischen Projectionsmethode.

Eine noch recht kurze Behandlung der schiefen Projection oder Parallel-Perspective finden wir im fünften Abschnitte (S. 453—456 und S. 479—482) von Joh. Hönigs „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie, Wien 1845.“ Sie wird hier zu Constructionen in Darstellungen der orthogonalen Projection und zur Gewinnung perspectivartiger Bilder in trimetrischer, dimetrischer und isometrischer Parallel-Perspective oder Cavalier-Perspective verwendet. Etwas umfangreicher ist in diesem Werke die Benützung der schiefen Projection zur Construction der Schatten. (S. 457—479). Wie bereits erwähnt, bildet „Die orthographische Parallelperspective“ den Gegenstand der ersten in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien (Bd. V, S. 326—343) im Jahre 1850 veröffentlichten descriptiv-geometrischen Abhandlung, deren Verfasser Rudolf Skuherský, ein Hörer von Professor Johann Hönig am Wiener polytechnischen Institute war.

Dieser Abhandlung Skuherskýs folgte in den Sitzungsberichten der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften vom Jahre 1858 die Abhandlung „Die Methode der orthogonalen Projection auf zwei Ebenen, die keinen rechten Winkel miteinander einschließen, als Grundlage für jede auf dem Principe der orthogonalen Projection beruhende perspectivische Projectionsart oder Parallel-Perspective, Prag 1858,“ in welcher er die Construction statt der von Weisbach[2]) für die Winkel

[1]) Gestorben am 29. September 1839 auf einer wissenschaftlichen Reise in der Bergstadt Agordo.

[2]) S.: J. Weisbach, Über die monodimetrische und anisometrische Projectionslehre (polytechnische Mittheilungen von Volz und Karmarsch, Tübingen 1844, Bd. I, S. 125—136) und Anleitung zum axonometrischen Zeichnen. Freiberg 1857.

und die Verkürzungsverhältnisse der Axen angewendeten Rechnung benützte und den Wert der rationalen Verhältnisse bestritt, weil er durch Herstellung besonderer Maßstäbe aufgehoben werde. Die „Parallelperspective" bildet auch einen lesenswerten, zehn Seiten umfassenden Aufsatz des ersten wirklichen Lehrers der darstellenden Geometrie in Mähren, Rudolf Schnedar, im Programme der Staats-Oberrealschule in Brünn für das Schuljahr 1854—55 und fand schon vor dreißig Jahren als erwünschter Anhang (S. 303—320) in seinen gediegenem Lehrbuche „Grundzüge der darstellenden Geometrie, Brünn 1856" (II. Aufl. 1859) Aufnahme. Auch sein Nachfolger im Lehramte, der erste Lehrer des Verfassers dieses historischen Werkes in der darstellenden Geometrie, Professor Franz Matzek (gest. 1868) wählte „Die Methoden der Axonometrie" zum Gegenstande seines im Jahresberichte der Staats-Oberrealschule in Brünn für das Jahr 1865 erschienenen Programmaufsatzes. Im Jahre 1862 veröffentlichte der Professor an der Staats-Oberrealschule in der Wiener Vorstadt Landstraße, Ferdinand A. Heißig, seine „Grundzüge der trimetrischen Projectionsmethode mit ihrer Anwendung auf das Entwerfen geometrischer Objecte vermittelst oder ohne Trimeters, Wien 1862", dessen zweite Ausgabe (80 S. und 41 Fig.) im Jahre 1885 bei Spielhagen und Schurich erschien. Herr Josef Schlesinger, Professor an der öff. Oberrealschule des I. Bezirkes in Wien und Privatdocent für Geometrie der Lage und graphische Statik am k. k. polytechnischen Institute, der in seinem Lehrbuche „Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie, Wien 1870" (499 S. mit 194 Holzschn.) die Verschmelzung der darstellenden Geometrie mit der projectiven Geometrie durchgeführt hat, fasste einen bereits von J. H. Lambert in seiner „Freyen Perspektive" (Zürich 1759) angeregten Gedanken wieder auf und löste, wie es in der Perspective geschieht, mit Hilfe des Distanzkreises eine Reihe von Fundamentalaufgaben der schiefen Projection mittelst des Distanzkreises auf. Er nahm (III. Absch. S. 223—236) in endlichem Abstande von der Bildebene einen Punkt als Hilfsauge an, legte durch dasselbe Parallele zu den gegebenen Geraden und Ebenen, deren Schnitte mit der Bildebene er die Fluchtpunkte der Geraden, bez. die Fluchtspuren der Ebenen nannte, und löste mittelst dieser die Aufgaben über die metrischen Beziehungen von Geraden und Ebenen in schiefer Projection. Auch hier wurde, wie bei den älteren Methoden der Parallelperspective nebst der verticalen Bildebene noch häufig eine zweite (horizontale) Coordinatenebene verwendet.

Das Problem der Axonometrie für orthogonale Parallelprojection, seine Lösung durch Transformation, sowie durch directe Construction aus dem Spurendreieck der Projectionsebene und durch Rechnung, ferner die einfachen Verhältnisse der Maßstäbe, die isometrische, monodimetrische und anisometrische Darstellung bildeten mit dem Problem der Axonometrie für schiefwinkelige Parallelprojection und dem Pohlkeschen Satz als Specialfall der Bestimmung collinearer Systeme den Schluss der Methodenlehre in Prof. Dr. Wilhelm Fiedlers Vorlesungen am Prager Polytechnicum.[1])

Nachdem schon Herr H. Anton, ein Hörer von Prof. Hönig, in seiner Abhandlung „Die Grenzebene" (Ein Beitrag zur Linearperspective, Wiener Sitzungsberichte 1866, S. 230—254, Bd. LIV), und Herr Prof. R. Niemtschik in seiner Abhandlung „Allgemeine Methoden zur Darstellung der Durchschnitte von Ebenen mit Kegel- und Cylinderflächen, von Geraden mit Kegelschnittslinien und von confocalen Kegelschnittslinien unter sich" (Wiener Sitzungsberichte 1871, S. 571—603, Bd. LVIII) besondere Anwendungen von dem „Princip der Identität von Constructionen" in der darstellenden Geometrie gemacht hatten, erkannte und begründete Herr Dr. Rudolf Staudigl, a. ö. Professor am k. k. polytechnischen Institute in Wien, das diesen Constructionen zu Grunde liegende allgemeine Princip in seiner Abhandlung „Über die Identität von Constructionen in perspectivischer, schiefer und orthogonaler Projection." (Wiener Sitzungsberichte 1871, S. 490—494, LXIV. Bd.). Er gelangte zu dem schönen, für die darstellende Geometrie so wichtigen Satze: „Alle Aufgaben der darstellenden Geometrie, bei denen weder ein Längen- noch ein Winkelmaß in Betracht kommt, also alle Aufgaben, welche der Geometrie der Lage angehören, können auf ganz gleiche Weise, durch ganz dieselben Liniencombinationen sowohl in perspectivischer, wie in schiefer, als auch in orthogonaler axonometrischer Projection gelöst werden."

Eine Durchführung der am häufigsten vorkommenden Aufgaben der darstellenden Geometrie gab Herr Prof. R. Staudigl in seinem Werke „Die axonometrische und schiefe Projection (Parallel-Perspective), Wien 1875," in dessen Vorwort er auf die diesbezüglichen Werke über Axonometrie von Weisbach (1844), C. Th. u. M. H. Meyer (1852—63), Möllinger (1853), Weisbach (1857), Skuherský (1858), Heissig (1864), Delabar (1860 u. 69) und auf die Abhandlung „Die schiefe Parallel-Perspective" (Zeitschrift für Math. u. Phys., Jahrg. 1871, S. 449—460) von L. Burmester hinwies. Eine nicht unbedeutende Vereinfachung ergab sich bei den axonometrischen Constructionen dieses, 147 S. und 89 Figuren umfassenden Werkes dadurch, dass Prof. Staudigl den Elevationswinkel des Projections-

[1]) S. s. Werk: Die darstellende Geometrie. S. 184 – 194. Leipzig 1871.

systemes als gegeben voraussetzte und dadurch die axonometrischen Constructionen vom Axenkreuz unabhängig machte.

Eine ausgiebige Pflege fand die schiefe Projection schon zu Beginn der sechziger Jahre an der Lehrkanzel für darstellende Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien unter Prof. Hönig, wobei freilich die Axonometrie in den Hintergrund trat. Ein kleiner Theil dieser Vorträge wurde von den Hörern in Autographien veröffentlicht. Die hiebei verwendete Methode machte aber stets von der schiefen Projection des Grundrisses Gebrauch und bestimmte den projicierenden Strahl durch seine beiden orthogonalen Projectionen auf die Bild- und Grundebene, aus welchen sich in der schiefen Projection das sogenannte Projectionsdreieck von selbst ergab. Diese Art der schiefen Projectionsmethode, bei welcher in den meisten Fällen, besonders bei allen Problemen, wo metrische Verhältnisse eine Rolle spielen, ein Zurückführen auf die orthogonale Projection nothwendig war, ist strenge genommen keine selbständige schiefe Projection, sondern eine Schattenbestimmung für Parallelbeleuchtung bei in orthogonaler Projection gegebener Lichtquelle.

Die „Freie schiefe Projection", welche von der schiefen Projection des Grundrisses ganz unabhängig ist, begründete Herr Professor Dr. Gustav A. V. Peschka im Jahre 1877 in seiner unter dem gleichen Titel im Maiheft der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien (LXXV. Bd. S. 917—940, Jahrg. 1877) veröffentlichten Abhandlung, in welcher er mit Hilfe eines angenommen Projectionsdreieckes die Stellung der projicierenden Strahlen gegen die Bildebene fixierte und durch Verwendung einer in beliebiger Entfernung von der Bildebene angenommenen und zu ihr parallelen „Distanzebene" die Lage der Geraden und Ebenen im Raume durch ihre Spuren auf der Bild- und Distanzebene bestimmte. Wählt man eine beliebige, zur Bildebene normale Strecke zwischen den beiden Parallelebenen des Projectionssystems, so ist dieses durch Annahme der schiefen Projection der „Distanz" schon vollständig bestimmt. Diese Bestimmungsstücke genügen vollständig, sowohl zur Darstellung, als auch zur Untersuchung räumlicher Gebilde in einer freien schiefen Projection, welche als selbständige Projectionsart der freien Perspective ganz analog ist, und ebenso einfache Constructionen, als auch interessante projective Beziehungen liefert. Die umgelegten ebenen Gebilde des Raumes sind mit ihren schiefen Projectionen affin. Die orthogonale Projection ist ein besonderer Fall dieser freien schiefen Projection, welche in die erstere übergeht, wenn die eine Seite des Projectionsdreieckes verschwindet.

Die klinographische oder schiefe Projection bildet den zweiten Abschnitt der „Methodik" (S. 212—233) im I. Bande (Wien 1883) von Herrn Regierungsrath Dr. G. A. V. Peschkas inhaltsreichem Werke „Darstellende und projective Geometrie," dessen VI. Capitel (S. 233—262) die metrischen Beziehungen in parallel-projectivischer Darstellung zum Gegenstande hat und dessen VII. Capitel (S. 262—272) der Affinität und den affinen Gebilden (Parallelprojectionen) des Kreises und der Kegelschnitte gewidmet ist. Die Methode der schiefen Projection mittelst zweier auf einander senkrecht stehender Projectionsebenen, die projectivischen Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen und die metrischen Beziehungen bilden den Inhalt des IX. Capitels (S. 340—367) der besonders eingehend durchgeführten Methodik dieses großangelegten Werkes, in dessen X. Capitel die „Orthographische Parallel-Perspective" (S. 368—384), und in dessen XI. Capitel die „Axonometrie" (S. 384—403) mit der Militär- oder Cavalier-Perspective eine sehr sorgfältige, methodisch gegliederte Behandlung erhielten. Der vierte Abschnitt (S. 404—455) beschäftigt sich mit Transformationen in centraler, schiefer und orthogonaler Projection, sowie mit diesbezüglichen Aufgaben und ihrer Lösung.

Im Jahre 1877 veröffentlichte Herr Dr. G. A. V. Peschka sein Werk „Kotierte Ebenen und deren Anwendung", welches in den Kreisen der Ingenieure und Militärtechniker die beste Aufnahme fand. In diesen 193 Seiten und 122 Figuren umfassenden Werke über die kotierten Projectionen fanden neben zahlreichen und gut gewählten Beispielen aus der technischen Praxis (Dachausmittlungen, etc.) auch die topographischen Flächen (S. 149—172) eine recht eingehende und sehr sorgfältige Behandlung.

Die orthogonale Parallel-Perspective und die schiefe oder klinogonale Parallel-Perspective bilden auch den ersten Abschnitt (S. 6—137), bez. zweiten Abschnitt (S. 138—170) des Lehrbuches „Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden Geometrie" (Wien 1882) von Prof. Johann Choura, welches vom k. k. Reichskriegs-Ministerium als Lehrbuch für die technische Militär-Akademie und als Lehrbehelf für die Militär-Akademie zu Wiener-Neustadt, die Artillerie- und Pionnier-Cadettenschule vorgeschrieben ist. Der dritte Abschnitt (S. 171—248) behandelt die Central-Perspective, während im vierten Abschnitt (S. 250—296) die „Kotierten Projectionen" sammt praktischen Aufgaben gelehrt werden.

Trotz des Umstandes, dass die orthogonale Axonometrie seit der Mitte dieses Jahrhundertes durch die Originalarbeiten von Möllinger (Adhemar), Weisbach, M. H. u. C. Th. Meyer, Skuherský und spätere

Schriftsteller besonders im Vergleiche zur klinographischen Perspective eine recht sorgfältige Pflege gefunden hatte, so fehlte ihr doch bis in die jüngste Zeit (1880) sowohl in den theoretischen Partien als auch in den Anwendungen noch jener Grad der wissenschaftlichen Vollkommenheit, den sie als selbständige Projectionsmethode und als einer der wichtigsten Zweige der reinen Geometrie besitzen sollte. Einen wertvollen Beitrag zu ihrer theoretischen Begründung und praktischen Anwendung gab Herr Karl Pelz, Professor der k. k. technischen Hochschule in Graz, in seiner gediegenen Abhandlung „Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie", welche er in drei Abschnitten in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien in den Jahren 1880, 1881 und 1884 veröffentlicht hat.[1] Nicht unerwähnt wollen auch wir mit dem geschätzten Verfasser lassen, dass Herr Prof. Pelz, dem im Wintersemester des Studienjahres 1878—79 durch Verwendung seines Freundes Prof. Koutny die Vorlesungen über darstellende Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Graz anvertraut wurden, in seiner schönen Arbeit von Prof. Koutny in vielfacher Richtung unterstützt und gefördert wurde. In geistreicher Weise hat es Herr Prof. K. Pelz auch verstanden, die herrlichen „Vorlesungen über synthetische Geometrie" von Jakob Steiner in der orthogonalen Axonometrie zu verwerten. Der wissenschaftliche Wert dieser orthogonal-axonometrischen Untersuchungen wird noch dadurch wesentlich erhöht, dass die Constructionen derselben mit nur sehr unwesentlichen Modificationen auch für die klinogonale Axonometrie gelten. — Während eine schon von Carnot in seinem Memoire „De la corrélation des figures de géométrie, Paris 1801" (S. 170) und später in seiner „Géométrie de position, Paris 1803" (S. 309—311) veröffentlichte metrische Beziehung zwischen den Seitenflächen eines orthogonalen Trieders, welches durch eine beliebige Ebene geschnitten wird, und der Fläche dieser Ebene als räumliches Analogon zum Pythagoräischen Lehrsatze[2] fast unbeachtet geblieben war, übte die von Professor Pohlke um das Jahr 1853 entdeckte und in seiner „Darstellenden Geometrie, Berlin 1860" (S. 113, III. Aufl., Berlin 1872, S. 112) zuerst mitgetheilte projective Beziehung zwischen

[1] S.: Karl Pelz, Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. LXXXI. Bd. S. 300—330, Jahrg. 1880, LXXXIII. Bd. S. 375—384, Jahrg. 1881 und XC. Bd. S. 1060—1075, Jahrg. 1884.

[2] Vergl.: J. A. Grunert, Lehrbuch der Mathematik. Greifswald 1832 und Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXXVIII S. 383, Leipzig 1893 und Bd. XXXIX, S. 64, 192. Leipzig 1894.

den gleich langen Kanten eines rechtwinkeligen Trieders oder Dreibeines (nach Steiner) durch mehr als ein Vierteljahrhundert eine ganz besondere Anziehungskraft auf die hervorragendsten Geometer aus. Wir meinen den Pohlkeschen Fundamentalsatz der Axonometrie: „Drei beliebige Strecken, die in einer Ebene von einem gemeinschaftlichen Punkte aus unter beliebigen Winkeln gegen einander gezogen werden, können immer als schiefe Parallelprojectionen dreier gleich langer, auf einander senkrechten Strecken des Raumes betrachtet werden, oder kurz nach Hofrath Wiener: „Jedes ebene Axenkreuz ist die Parallelprojection eines rechtwinkelig-gleichschenkligen Axenkreuzes." Prof. Pohlke hat seinen Satz mit Zuhilfenahme einer Schar von einfachen Hyperboloiden bewiesen, welche die Projectionsebene in confocalen Hyperbeln schneiden, und leitete später aus diesem Beweise eine ziemlich einfache Construction der Bestimmungsstücke ab. Da er der Meinung war, dass der Beweis dieses Fundamentalsatzes der Axonometrie nicht elementar geführt werden könne, so behielt er sich die Beweisführung desselben erst für die zweite Abtheilung seiner „Darstellenden Geometrie" vor. Den ersten elementaren Beweis dieses interessanten Satzes versuchte Herr von Deschwanden, Director des eidgenössischen Polytechnicums in Zürich, in seiner Abhandlung „Anwendung schiefer Parallelprojection zu axonometrischen Zeichnungen"[1]) (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, VI. Jahrg., S. 254—284, 1861) und bald folgte der analytische Beweis von dem Mathematik-Lehrer Kinkelin in Bern (Ibid. S. 358—367). Den ersten elementaren strengen Beweis lieferte bekanntlich Herr H. A. Schwarz, ein gew. Hörer von Prof. Pohlke im LXIII. Bande, S. 309—314, Jahrg. 1863 des Crelle-Borchardtschen Journales.[2])

Der Beweis von Prof. H. A. Schwarz wurde auch in alle späteren Auflagen von Pohlkes „Darstellende Geometrie" (IV. Aufl., Berlin 1876") aufgenommen. Im Jahre 1866 hat Herr Prof. Dr. Theodor Reye im XI. Bande der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich diesen Hauptsatz der klinographischen Axonometrie mit Hilfe der Geometrie der Lage bewiesen und durch die Anlage der Beweisführung derselben auch auf die schiefe gegenseitige Lage der Strecken im Raume ausgedehnt.[3]) Prof. Reye zeigte, dass

[1]) S. a.: Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft VII. Jahrg. S. 159, Zürich 1862 und IX. Jahrg. S. 273, Zürich 1864.

[2]) S. a.: H. A. Schwarz, Gesammelte Werke, II. Bd. S. 1—7. Berlin 1890 und XIX. Bd. der Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. S. 205.

[3]) S. a.: Dr. Th. Reye, Beweis von Pohlkes Fundamentalsatz der Axonometrie, Zeitschrift für Math. und Phys. XII. Jahrg. S. 433—437, Leipzig 1867 und

man immer ein Tetraeder finden kann, dessen Parallelprojection einem gegebenen Vierecke ähnlich ist, und führte den Beweis durch die Lösung der Aufgabe: „Ein Tetraeder soll durch parallele Strahlen so auf eine beliebig zu wählende Ebene projiciert werden, dass seine Projection einem gegebenen Vierecke ähnlich wird."

Prof. Pohlke hat den Beweis seines Fundamentalsatzes der klinographischen Parallelprojection nie veröffentlicht, aber beide, Satz und Beweis, dem genialen Steiner mitgetheilt, der im Jahre 1858 eine vielleicht durch Pohlkes Mittheilung angeregte Aufgabe über die rechtwinkelige dreiseitige Pyramide im LV. Bande, S. 377, die sogenannte „Steinersche Aufgabe" stellte. Steiner theilte auf einer Reise in der Schweiz im Jahre 1856 den Pohlkeschen Satz dem Director von Deschwanden mit, der in seinem 1861 erschienenen recht ausführlichen, jedoch nicht mit der nothwendigen wissenschaftlichen Schärfe behandelten Beweisführung den Pohlkeschen Satz irrthümlicher Weise Steiner zugeschrieben hatte. Die kurze Notiz von H. A. Schwarz, der in seinem ersten elementaren und strengen Beweise zugleich die Priorität Pohlkes auf diesen Satz gewahrt hatte, dass Pohlke seinen Satz mit Zuhilfenahme einer Schar von einfachen Hyperboloiden, welche die Projectionsebene in confocalen Hyperbeln schneiden, bewiesen hatte, genügten Herr Karl Pelz, Professor an der Landes-Oberrealschule und Privatdocent an der k. k. technischen Hochschule in Graz, einen mit dem Pohlkeschen Beweise sehr nahe verwandten, zweifellos auch ganz identischen Beweis herzustellen, den er im LXXVI. Bande, S. 123—138 der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien im Jahre 1877 veröffentlichte.

Construiert man mit der Kante des Dreibeines als Halbmesser im Raume eine Kugel und mit den schiefen doppelten Projectionen der Kanten als conjugierten Durchmessern drei Ellipsen in der Bildebene, so gibt die Contour oder der schiefe Umriss der Kugel eine vierte Ellipse, welche den Halbmesser der Kugel zur kleinen Achse hat und diese drei Ellipsen doppelt berührt. Die Unvollständigkeit des Beweises von Deschwanden bestand eben darin, dass er für diese Umrissellipse der Kugel keine genaue Construction angab, sondern dieselbe nur versuchsweise und demzufolge nur annähernd richtig ermittelt hatte. Frühere Untersuchungen und insbesondere die schönen Resultate der Abhandlung „Über eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades" (Wiener Sitzungsberichte 1877,

„Das Problem der Axonometrie für schiefwinklige Parallelprojection und der Pohlkesche Satz als Specialfall der Bestimmung collinearer Systeme" in Dr. Wilhelm Fiedlers Werk „Die darstellende Geometrie" (Leipzig 1881) S. 190—193.

Bd. LXXV, S. 175—217) setzten Herrn Prof. Pelz in die angenehme Lage, uns einen selbst den strengsten Anforderungen genügenden Beweis dieses Fundamentalsatzes im Geiste Pohlkes zu liefern und die Construction der doppelt berührenden Umrissellipse in eleganter Weise durchzuführen.

Den ersten elementaren Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie verdanken wir in Österreich Herrn k. k. Regierungsrath Dr. G. A. V. Peschka, Professor an der k. k. technischen Hochschule in Brünn, dessen leichtfassliche und auf ganz elementaren Wege durchgeführte, und auf den bloßen Principien der schiefen Projection beruhende Sicherstellung des Pohlkeschen Satzes, als auch die Auffindung der Richtung des schief projicierenden Strahles den Gegenstand der im LXXVIII. Bande der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien (S. 1043—1055, Jahrg. 1878) veröffentlichten Abhandlung „Elementarer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie“ bildet. Der gelehrte Verfasser verwendete zur Auffindung der Richtung des schief projicierenden Strahles bloß die projectivischen Beziehungen des Problemes.[1]) Der Pohlkesche Fundamentalsatz mit den Beweisen von Peschka und Schwarz bildet auch den Gegenstand der §§. 391 u. 392 (S. 386—393) des XI. Capitels „Axonometrie“ in dem I. Bande des Werkes „Darstellende und projective Geometrie“ (Wien 1883) des erstgenannten Hochschulprofessors. Diesem Beweise unseres verehrten Lehrers der darstellenden und neueren Geometrie an der Brünner tech. Hochschule folgte im Jahre 1880 ein neuer sinnreicher Beweis des orthogonal-axonometrischen Fundamentalproblems sammt diesbezüglichen eleganten Constructionen, den mein geschätzter Lehrer an der Staats-Oberrealschule Herr Josef Tesař, dz. Professor an der Staats-Gewerbeschule in Brünn, im LXXXI. Bande, S. 453—478, der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien in der Abhandlung „Der orthogonale-axonometrische Verkürzungskreis“ veröffentlichte. In dieser Abhandlung führte Herr Prof. Tesař den Begriff des Verkürzungskreises ein, eines Kreises, der sich auch als die orthogonale Projection einer Curve vierten Grades ergibt, längs welcher sich der Rotationskegel von Kreissehnen mit der von diesem Kreise erzeugten Kugelfläche schneidet. Die Radien der Verkürzungskreise dreier normal zu einander liegenden Coordinatenaxen gaben die Seiten des Verkürzungsdreieckes, aus dessen analytischer oder synthetischer Behandlung sich die Lösung sämmtlicher Specialfälle des axo-

[1]) S. a.: G. A. V. Peschka, Graphische Lösung der axonometrischen Probleme. XIX. Bd. S. 205 der Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure Berlin 1875.

nometrischen Problems ergibt. Diese Einführung des Verkürzungskreises ermöglichte eine graphische, mittelst des Kreises und der Geraden leicht durchführbare Lösung des orthogonal-axonometrischen Fundamentalproblems, ohne dass der Axonometrie ganz fremde Gebiet der trigonometrischen Analysis zu betreten.[1]) Deutschlands bedeutendster darstellender Geometer, Geheim. Hofrath Dr. Chr. Wiener, hat das sinnreiche Verfahren zur Auflösung des orthogonal-axonometrischen Fundamentalproblems des geschätzten österreichischen Schriftstellers als ein treffliches anerkannt und den Tesař'schen Begriff des Verkürzungskreises und des Verkürzungsdreieckes — wenn auch mit einer anderen Begründung — in den VIII. Abschnitt über „Axonometrie" seines ausgezeichneten Werkes (Bd. I, S. 436) aufgenommen.

Einen neuen Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes sammt Construction veröffentlichte auch Herr Heinrich Drasch, Professor an der Staats-Realschule in Steyr, im VIII. Jahrgang S. 516—519 der „Zeitschrift für das Realschulwesen" (Wien 1883). Dieser Beweis, der mit Hilfe einer elementaren Beziehung aus der neueren Geometrie allgemein geführt wird und ganz unabhängig davon ist, ob man orthogonale, klinogonale oder centrale Projection voraussetzt, stützt sich auf den Satz: „Schneidet man die einer Oberfläche zweiter Ordnung zugehörige Ebeneninvolution durch eine beliebige Ebene, so ist die so erhaltene Strahleninvolution allen Kugelschnitten zugehörig, welche man erhält, wenn man die aus den Punkten des Trägers (der Ebeneninvolution) der gegebenen Fläche umschriebenen Kegel durch die beliebige Ebene schneidet."

Den nächsten Beweis des Pohlke'schen Lehrsatzes der Axonometrie und eine Verallgemeinerung desselben veröffentlichte Herr Julius Mandl, k. u. k. Lieutenant im ersten Genie-Regimente, im XCIV. Bande (S. 60—65) die Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien im Jahre 1886. Er stützt sich auf die Construction der Contour der schiefen Projection eines Ellipsoides aus den schiefen Projectionen von drei conjugierten Radien desselben. In dieser Abhandlung entwickelt Herr Genie-Lieutenant Mandl auf S. 62 auch einen Satz, von welchem der Pohlke'sche Satz ein besonderer Fall ist. Drei Jahre später erschien im XXXIII. Bande, S. 474—475 der Mathematischen Annalen (Leipzig 1889) „Der Satz von Pohlke" von Herrn Karl Küpper, Professor an der k. k. deutschen tech. Hochschule in Prag, dessen Beweisführung sich auf seine seit dem Jahre

[1]) Vergl. d. Vorwort zu R. Staudigl's Lehrbuch der axonometrischen und schiefen Projection. Wien 1875.

1867 am k. k. deutschen Polytechnicum in Prag vorgetragenen Herleitung und Bestimmung des Durchmessers der Contourellipse, sowie die Bestimmung der Projectionsrichtung auf die Benützung der confocalen Hyperbeln stützen. Zugleich wahrt Herr Prof. Küpper in der kurzen Abhandlung sein Prioritätsrecht bezüglich der Verwendung confocaler Kegelschnitte zur Lösung des Pohlkeschen Fundamentalproblems der Axonometrie.

Wir erwähnen noch den neuen Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der klinogonalen Axonometrie von F. Ruth, Adjunct an der Bergakademie in Leoben, welcher denselben in den Wiener Sitzungsberichten vom J. 1891 (Bd. C, S. 1088—1092) mitgetheilt hat. Herr Ruth, jetzt Professor an der k. k. techn. Hochschule in Prag, stützte seinen einfachen Beweis auf den Satz: Irgend eine Ellipse und ein beliebiger Punkt in der Ebene derselben können stets als schiefe Projection der Basis und Spitze eines ganz beliebigen geraden Kreiskegels und insbesondere auch eines gleichseitigen betrachtet werden.“ Den letzten von einem hervorragenden österreichischen Gelehrten ausgeführten Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes erhielten wir mit einem herzlichen Gruße im October des Vorjahres von Herrn Karl Pelz, Professor an der k. k. technischen Hochschule in Graz. Dieser Beweis befindet sich im Anhange der Abhandlung (S. 12—15) „Zur klinogalen Darstellung der Rotationsflächen“, welche Herr Professor Pelz in den Sitzungsberichten der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften im Februar 1895 veröffentlicht hat, und mit der Abhandlung „Zur Joachimsthalschen Lösung des Normalenproblems“, sowie mit einem trefflichen Bilde von „Monge“ so liebenswürdig war, uns in dankender Erwiderung für die von ihm als ausgezeichnet anerkannte literarische Arbeit „Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft“, einzusenden. Sein Beweis hängt mit der eleganten Lösung der für die klinographische Axonometrie so eminent wichtigen Aufgabe zusammen: „Aus den Projectionen dreier conjugierten Kugelradien die wahre Länge des Halbmessers und die Contour der Kugel constructiv zu ermitteln.“ Herr Professor Karl Pelz führt auch hier die Construction der doppelt berührenden Contourcurve der Kugel auf einen in den Wiener Sitzungsberichten im Jahre 1877 veröffentlichten Satz zurück, nach welchem die zu construierende Contourcurve confocal ist mit jener Ellipse, welche den Abstand des Brennpunktes der durch die beiden ersten Projectionen der Axen als conjugierte Halbmesser bestimmten Ellipse vom Coordinatenursprung und die Projection der dritten Axe zu conjugierten Halbdiametern hat. Die Lösung dieser Aufgabe, auf welche Herr Friedrich Schur, Professor am Polytechnicum in Aachen im Journal für Mathematik (Bd. CXVII, S. 24, Berlin 1896) auch aufmerksam gemacht hat, kann nun in einfacher Weise mit Hilfe der Chaslesschen Construction der Brennpunkte einer Ellipse, die durch zwei conjugierte Halbmesser bestimmt ist, leicht durchgeführt werden.

Das theoretische Interesse und die praktische Wichtigkeit des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der klinogonalen Axonometrie bezeugt auch der Beweis von Prof. Dr. Wilhelm Fiedler, welcher in seinem Musterwerke „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, Leipzig 1875“ auf S. 203—208 (III. Aufl. I. Theil, S. 334, Leipzig 1883) auf einer von Steiner in seiner „Systematischen Entwickelung“ (S. 226, 231 oder S. 147, 157 § 53) gemachten Bemerkung beruht und — soweit er sich auf Affinität bezieht — den einen Theil des Pohlkeschen Satzes in projective Form setzt. Dies gilt aber nicht von jenem Theil des Satzes, welcher sich auf Ähnlichkeit bezieht.

Trotz seiner so vielfachen Behandlung wurde bis zum Jahre 1885 nicht der Versuch gemacht, den Fundamentalsatz der Axonometrie in in projective Form zu kleiden, obwohl von vornherein zu erwarten war, dass er dann alles Überraschende verlieren und sein Beweis sich somit von selbst ergeben würde. Bei einer zufälligen Beschäftigung mit dem Pohlkeschen Satze gelang es Herrn Prof. Friedrich Schur in Leipzig, diesem Satze eine projective Form zu geben, deren Mittheilung und Beweis den Gegenstand seiner im XXV. Bande, S. 596—597 der Math. Annalen (Leipzig 1885) veröffentlichten Abhandlung bildet. [1])

Eine, den heutigen strengen Anforderungen moderner Geometer vollkommen entsprechende Darstellung erhielt die Axonometrie und schiefe Projection mit dem Pohlkeschen Satze in dem VIII. Abschnitte (S. 427—451) des ersten Bandes und im XII. Abschnitte (S. 593—603) des zweiten Bandes des schon oft genannten, ausgezeichneten Werkes „Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Leipzig 1884 und 1887“ von dem Geh. Herrn Hofrath Dr. Christian Wiener, ord. Professor an der Großherz. technischen Hochschule zu Karlsruhe. Die Geschichte dieser beiden Projectionsmethoden enthält bekanntlich der erste Band auf S. 42—47. Die Abbildung mittelst schiefwinkeliger Coordinatenaxen durch Construction und durch Rechnung finden wir auch in dem von Herrn Dr. Hauck, Professor am Polytechnicum in Berlin, im XXI. Jahrg. S. 82 der Zeitschrift für Math. und Phys. (Leipzig 1876) veröffentlichten Aufsatze „Grundzüge einer allgemein axonometrischen

[1]) S.: Friedrich Schur, Über den Pohlkeschen Satz.

Theorie der darstellenden Perspective," sowie in dem durch seine klare Darstellung bekannten Werke von Tessari „Projezioni assonometriche orthogonali ed oblique, Torino 1882" und endlich in den auf modernen Grundlagen durchgeführten Werken „Neue Behandlung der Parallelprojection und der Axonometrie, Leipzig 1889 und 1896" von Dr. A. Weiler, Professor am Polytechnicum in Zürich und „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" von K. Rohn und E. Papperitz (II. Bd. S. 363—410, Leipzig 1896).

Das außergewöhnliche Interesse, welches dieser Fundamentalsatz der klinographischen Parallelprojection besonders in den Kreisen der darstellenden Geometer [1]) erweckte, bezeugen uns ferner seine Aufnahme in den „Cours de géométrie descriptive de l'École polytechnique" Paris 1880 und 1886, S. 134) von Herrn Artillerie-Oberst A. Mannheim und in den „Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden Geometrie" (Wien 1882, S. 144) an der technischen Militär-Akademie in Wien und an der Militär-Akademie zu Wiener-Neustadt, sowie an der Artillerie- und Pionnier-Cadettenschule von Herrn Prof. J. Choura. Wir erwähnen noch die interessante Construction, welche Herr A. Beck, Professor am russischen Polytechnicum in Riga, zur Bestimmung des Originalaxenkreuzes aus den gegebenen Bildstrecken im CVI. Bande, S. 121—123 des Journals für Mathematik (Berlin) im Jahre 1890 mitgetheilt hat, und verweisen zugleich auch auf die lichtvolle Darstellung, welche der Pohlkesche Lehrsatz in dem neuen und trefflichen „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" (Bd. I, S. 109, Leipzig 1893 und Bd. II, S. 366, Leipzig 1896) von K. Rohn und E. Papperitz, ersterer Professor am Polytechnicum in Dresden, letzterer an der Berg-Akademie in Freiberg erhalten hat.

Die jüngste uns bekannte und vorliegende, auch mit dem Beweise des Pohlkeschen Satzes zusammenhängende Construction veröffentlichte Herr Friedrich Schur, Professor am Polytechnicum in Aachen, im CXVII. Bande, S. 24--28, Jahrg. 1896 des Weierstrass-Fuchsschen Journals in Berlin. Diese — selbstverständlich nicht letzte — Construction des Originalkreuzes und der Strahlenrichtung, welche auf das Minimum der möglichen Linien beschränkt ist, und folglich sich durch einen hohen Grad der Genauigkeit auszeichnet, gibt eine durch ihre Kürze sich besonders empfehlende Construction der Umrissellipse und setzt zu ihrem Verständnisse nur ganz elementare Sätze über affine Verwantschaft

[1]) S. a.: „Neuer Beweis für den Weisbachschen Hauptsatz der Normalaxonometrie," von Prof. Dr. J. E. Böttcher, Rector des Realgymnasiums zu Leipzig. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht von J. C Hofmann. XXV. Jahrg. S. 1—20. Leipzig 1894.

und über conjugierte Durchmesser der Ellipse voraus. Auch Herr Prof. Schur geht wie die Herren Professoren Küpper, Pelz und Beck von den drei aufeinander senkrechten Radien der Kugel aus, deren Umrissellipse, beziehungsweise ihre beiden conjugierten Halbmesser er mittelst einer affinen, leicht ausführbaren Transformation bestimmt.

Die in Österreich erschienenen Abhandlungen und Werke, welche sich mit der Darstellung ebenflächiger Körper, krummer Flächen und technischer Objecte in axonometrischer oder schiefer Parallelprojection beschäftigt haben, sollen später in den diesbezüglichen Abschnitten erwähnt werden. —

Während die Perspective als Centralprojection und die orthographische und klinogonale Parallel-Perspective verhältnismäßig bald durch die Geometer eine strengwissenschaftliche Richtung erhielten, und sich besonders die Perspective seit Jahrhunderten einer eifrigen Pflege seitens der Künstler erfreute, so blieb die Reliefperspective in Österreich doch bis in die jüngste Zeit nur in den Händen der bildenden Kunst. Selbst in dem umfangreichen Werke von J. Hönig „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie, Wien 1845", welches mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung bei dem Zeichnen technischer Gegenstände, insbesondere jener der Baukunst, der praktischen Geometrie und des Maschinenwesens verfasst war, ist die Reliefperspective ganz unberücksichtigt geblieben. Es ist aber zweifellos ein Verdienst dieses ersten ord. Lehrers der darstellenden Geometrie, die Aufmerksamkeit seiner Hörer auch auf diesen Wissenszweig gelenkt zu haben. Auf diejenigen Werke, welche zuerst im Auslande eine wissenschaftliche Behandlung der Reliefperspective anbahnten, haben wir bereits im III. Abschnitte (S. 95—96) dieses historischen Werkes hingewiesen. Es sind dies Arbeiten von Breysig, (Magdeburg 1798), Poncelet (Paris 1822), Anger (Danzig 1834), Guido Schreiber (Karlsruhe 1854), Möbius „(Entwickelung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hilfe der Collineationsverwandtschaft" in den Berichten der königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 1855), J. de la Gournerie (Paris 1859), Poudra (Paris 1862), von Staudt (Nürnberg 1860), Reye (Hannover 1866—68), Hertzer (Berlin 1875), Burmester (Leipzig 1883), Wiener (Leipzig 1884--87), etc. Die ersten erfolgreichen Anregungen zum wissenschaftlichen Ausbau der Reliefperspective gab in Österreich Herr Prof. Dr. Wilhelm Fiedler in seinen Vorträgen über darstellende und projective Geometrie am Polytechnicum in Prag. Sein Assistent Rafael Morstadt, der in der ersten Hälfte der sechziger Jahre nach den Principien der räumlichen Darstellungsmethode bereits mehrere gelungene Modelle einfacher geometrischer Körper und ein schönes architektonisches Relief einer gewölbten Halle für Unterrichtszwecke ausgeführt hatte, veröffentlichte im Jahre 1867 im XII. Jahrgange, S. 326—339 der Zeitschrift für Mathematik und Physik die Abhandlung „Über die räumliche Projection (Reliefperspective) insbesondere diejenige der Kugel", in welcher er die neugeometrischen Beziehungen, namentlich jene der Involution von räumlich collinearen Systemen, welche von besonderem wissenschaftlichen Interesse und bedeutender Erweiterungen fähig sind, größtentheils den Vorlesungen des Herrn Prof. Dr. Fiedler über darstellende und neuere Geometrie am Prager Polytechnicum entlehnte. Der Verfasser weist nach der Erklärung des Begriffes der centralen Lage von Raumgebilden, darauf hin, dass die räumliche Darstellung von Raumgrößen den Begriff zweier unendlichen, sich durchdringenden Räume voraussetzt und spricht unter Anderen den interessanten Satz aus, dass die orthogonale Projection einer Reliefperspective auf die Bildfläche auch die Perspective des Gegenstandes für ein Auge ist, welches mit dem ursprünglichen Auge in einer Normalen zur Bildfläche liegt, aber von der letzteren Ebene den gleichen Abstand besitzt, welche das ursprüngliche Auge von der Fluchtebene hat. Er behandelt die collineare Verwandtschaft der Flächen zweiter Ordnung mit der Kugel, bez. mit dem einschaligen Umdrehungshyperboloide und gibt im Anhange einige Aufklärungen über die Beleuchtungsverhältnisse des Reliefs. Die Vorlesungen über die centrische Collineation räumlicher Systeme als Theorie der Modellierungs-Methoden bilden mit Einschluss der Beziehung von drei räumlichen Systemen, welche paarweise centrisch collinear sind, den dritten Abschnitt (S. 121—138) der reingeometrischen Methodenlehre in Dr. Wilhelm Fiedlers Werk „Die darstellende Geometrie, Leipzig 1871." Herr Docent Rudolf Staudigl, Adjunct der Lehrkanzel für darstellende Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien, hat in seinem Werke „Grundzüge der Reliefperspective, Wien 1868" die für die Technik brauchbaren Regeln dieses Wissenszweiges weiter entwickelt und dabei eine Reihe von nützlichen Sätzen aufgestellt, wie z. B. jenen, dass der Grundriss einer Reliefperspective auch als Perspective des Grundrisses des Gegenstandes auf der Bildfläche genommen werden kann, wenn man das Auge in seiner zur Basis senkrechten Ebene so verschiebt, dass seine Höhe über der horizontalen Projectionsebene gleich dem Abstande der Bild- und Fluchtebene, und sein Abstand von der Bildebene gleich seinem ursprünglichen Abstande von der Fluchtebene wird. Auch Prof. Josef Schlesinger hat die räumlichen Collinear-Projectionen in sein Lehrbuch „Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie, Wien

1870" (S. 227—263) aufgenommen und hier eine einfache Methode zur Construction von Reliefs aus zwei gegebenen orthogonalen Projectionen des Raumgebildes mittelst ihrer Centralprojectionen angegeben. Herr Regierungsrath Prof. Dr. G. A. V. Peschka hat die „Collineation der Räume" und die „Relief-Projection" in den fünften, besondere Darstellungsmethoden umfassenden Abschnitt seines großen Werkes „Darstellende und projective Geometrie, Wien 1883—85" (Bd. I, S. 461—476) aufgenommen und selbstverständlich die neueren Forschungen auf diesem Gebiete vollständig berücksichtigt. Wir erwähnen noch die „Grundzüge der Relief-Perspective", welche Miloslav Pelišek, Assistent am deutschen Polytechnicum in Prag, im Jahre 1886 in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften (Jahrg. 1886, S, 434—450) veröffentlicht hat und in welchen er die Pflege dieses Wissenszweiges durch französische Forscher, wie Cousin, Goujon, Bontemps, Desjardins, Pilon, Paget, Saint-Georges etc. besonders berücksichtigt hat. Nicht unerwähnt wollen wir auch die von Max Klar, Prof. der darst. Geometrie an der Landes-Oberrealschule in Sternberg (seit 1896 in Wiener-Neustadt), ausgeführten und besonders von den Geographen geschätzten orographischen Reliefs (Ortler-Gebiet etc.) lassen.

Eine treffliche Schrift sind die „Grundzüge der Reliefperspective nebst Anwendung zur Herstellung reliefperspectiver Modelle, Leipzig 1883" von Dr. L. Burmester, Professor am Polytechnicum in München, und ein Muster streng-wissenschaftlicher und eleganter Darstellung sind die Capitel „Die perspectivische Collineation zweier räumlicher Systeme oder die Reliefperspective" und „Reliefperspective der Flächen zweiten Grades" in Dr. Chr. Wiener Lehrbuch der darst. Geometrie (I. Bd. S. 468—477, Leipzig 1884, bez. II. Bd. S. 645—649, Leipzig 1887). Ähnliches gilt von dem jüngsten, uns vorliegenden Werke „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" von K. Rohn und E. Papperitz, in dessen II. Bande (Leipzig 1896) die „Centralcollineation räumlicher Figuren" oder „Reliefperspective" den Schluss (S. 475—480) des XVI. Capitels „Angewandte Perspective" bildet.[1])

Selbstverständlich blieb bei der Behandlung der Flächen zweiten Grades die stereographische Projection nicht unberücksichtigt. Wir finden sie im zweiten Theile von Prof. Dr. W. Fiedlers Vorlesungen

---

[1]) S. a.: „Die Grenzen zwischen Malerei und Plastik und die Gesetze des Reliefs," Rede, zum Geburtstage Seiner Majestät des Deutschen Kaisers und Königs Wilhelm II. in der Aula der königl. Technischen Hochschule zu Berlin am 21. März 1885 gehalten von dem zeitigen Rector Guido Hauck. Berlin 1885.

„Die darstellende Geometrie, Leipzig 1871" (S. 374, II. Aufl. S. 375 u. 678). Die stereographische Projection, ihre Verallgemeinerung für Flächen zweiten Grades und ihre specielle Anwendung als Kartenprojection bilden das XXXII. Cap. (S. 782—791) des dritten Theiles von Herrn Prof. Peschkas Werk „Darstellende und projective Geometrie, Wien 1884."[1]) Im Quellen- und Literatur-Verzeichnis weist der geschätzte Verfasser auf Baltzers „Mathematik", Reuschs, „Stereographische Projection" und Gretschels „Kartenprojection" hin.

Wie die Perspective so fand auch die Schatten- und Beleuchtungslehre erst in der letzten, etwa fünfzig Jahre umfassenden Zeitperiode eine wissenschaftlichen Anforderungen entsprechende Pflege. Einen verhältnismäßig bescheidenen Raum nehmen noch die mit der Darstellung technischer Objecte so innig zusammenhängenden Schatten- und Beleuchtungs-Constructionen in dem Abschnitt „Die schiefe Projection" (S. 453—482) in Joh. Hönigs „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie, Wien 1845" ein. Nach den einleitenden Erklärungen über Schatten-, Selbst- und Schlagschatten, Schattierungen und Schattenseiten von Ebenen (S. 461) werden die Glanzkanten, die Schattierung ein- und ausspringender Flächenwinkel, die Trennungslinien der Licht- und Schattenseiten behandelt (S. 463), worauf das Schattieren krummer Flächen, die Bestimmung der Linien gleicher Beleuchtungsintensität und die Bestimmung und das Schattieren der Schlagschatten (S. 466—479) an der Kugel, an der Wulstfläche und an je einem Object des Maschinenbaues und des Hochbaues (Pumpwerk und gewölbte Halle) in orthogonaler, bez. centraler Projection durchgeführt und schließlich (S. 511—513) die Bestimmung der Glanzpunkte krummer Flächen gezeigt wird. Einen größeren Umfang erhielt die Schatten- und Beleuchtungslehre in dem zweiten Bande des Lehrbuches der darstellenden Geometrie von Josef Stampfl, Hauptmann im k. k. Ingenieur-Corps und Professor an der k. k. Ingenieur-Adademie in Wien, welches im Jahre 1847 erschien und im ersten Abschnitte (S. 1—112) die Lehre von den geometrischen Schattenbestimmungen enthält. Eine fünfzehn Jahre umfassende Zeitlücke liegt nun zwischen dem letztgenannten umfangreichen Werke und den nächsten Arbeiten, wenn wir die inzwischen von Nigris (Pressburg 1853), Schnedar (Brünn 1856) und Heissig (Wien 1859) erschienenen Lehrbücher für Realschulen unberücksichtigt lassen. Aber mit dem Jahre 1862 kommt in das literarische Schaffen auf dem Gebiete der darstellenden Geometrie ein frisches Leben und es wurden Werke geschaffen, in welchen die wissenschaftliche Grundlage und systematische

[1]) Vergl.: „Die stereographische Projection" in Dr. Chr. Wieners „Lehrbuch der darst. Geometrie." II. Bd. S. 273. Leipzig 1887.

Behandlung ihre Rechte geltend machten. Dies gilt auch für die Lehre von den geometrischen Schattenbestimmungen und insbesondere von den Selbst- und Schlagschattencurven, sowie von den Intensitätslinien, deren Art, Charakter und Construction wissenschaftlich festgestellt wird, und die nicht mehr empirisch oder punktweise bestimmt werden.

Den Anfang machte auf dem Gebiete der Beleuchtungslehre Friedrich Kammerer, Assistent der Lehrkanzel für darstellende Geometrie am Joanneum in Graz, der in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien im XLVI. Bande, S. 405—412, Jahrg. 1862 die Abhandlung „Die Licht-Intensitätscurven auf krummen Flächen" veröffentlichte. Nach der allgemeinen Begründung dieser Theorie bestimmte Kammerer auch die Lichtgleichen von Flächen zweiten Grades in sehr einfacher Weise aus den vorher zu construierenden Lichtgleichen von Umdrehungsflächen zweiten Grades, welche zwei Achsen mit jener Fläche gemein haben. Noch in demselben Jahre veröffentlichte Herr Franz Tilscher, Hauptmann im k. k. Geniestabe und Professor der darstellenden Geometrie an der k. k. Genie-Akademie in Kloster-Bruck bei Znaim, sein geschätztes Werk „Die Lehre der geometrischen Beleuchtungs-Constructionen und deren Anwendung auf das technische Zeichnen, Wien (bei Gerolds Sohn) 1862", welches durch Jahre hindurch ein trefflicher Leitfaden für technische Lehranstalten war. Dieses Werk (255 S. u. 72 Fig.) hatte im Gegensatze zu den Werken von Bordini, Hachette, Haindl und Adhémar sich nicht bloß mit der Bestimmung der Form des Schattens beschäftigt, sondern auch dem Wesen der Beleuchtung seine besondere Aufmerksamkeit zugewendet, die Intensitätslinien aber nicht wie in den Werken von Th. Olivier (Développements de Géométrie descriptive, Paris 1843) u. Leroy (Traité de Stéréotomie, Paris 1844) mit Hilfe der sogenannten Normalkugel, sondern mittelst Berührungsebenen bestimmt, welche mit einer gegebenen Geraden bestimmte Winkel einschließen. Auf Grund dieses Verfahrens bestimmte Prof. Tilscher die Intensitätslinien für die verschiedenen Arten der Flächen, insbesondere für die abwickelbaren und windschiefen Flächen mit Einschluss der beiden Schraubenflächen, ferner für die Drehungsflächen, Rückungs- und Umhüllungsflächen. Bei den letzteren wurden die Umhüllungsflächen von Kugeln mit constantem Halbmesser (gewundene Säulen und Röhrenflächen) besonders berücksichtigt und ihre Schlagschatten-Umrisse und Intensitätslinien bestimmt. Auf die von Em. Koutny und Rud. Niemtschik in den Jahren 1867—68 ausgeführten Beleuchtungsconstructionen für Flächen zweiter Ordnung, bez. für Flächen mit elliptischen Schnitten werden wir noch später zurückkommen.

Ein schönes, geometrisch und technisch interessantes Capitel bilden die in centraler Projection ausgeführten Schattenconstructionen in F. Tilschers „System der technisch-malerischen Perspective, Prag 1867" und in Peschka-Koutnys „Freie Perspective in ihrer Begründung und Anwendung, Hannover 1868 (S. 354—398). Prof. W. Fiedler hat in seinen Vorlesungen am Prager Polytechnicum (s. s. „Darstellende Geometrie, Leipzig 1871) die Bestimmung der Schattengrenzen und die Construction der Schlagschatten für centrale Beleuchtung von einem Kegel (S. 225), einer developpabeln Fläche (S. 262), einer Fläche zweiten Grades (S. 349), einer Regelfläche (S. 425) und einer Rotationsfläche (S. 460, II. Aufl.) in die betreffenden Capitel aufgenommen. Das Gleiche gilt von den Schlagschatten auf Regelflächen (S. 433, ferner von dem Selbstschatten und dem Schlagschatten einer Fläche auf sich selbst S. 481). Eine wissenschaftlich sehr wertvolle Erweiterung erhielt die Lehre von den Beleuchtungsconstructionen durch das Problem von der gemeinsam umschriebenen Developpabeln von zwei Flächen oder durch zwei Curven zweiten Grades, welches Herr Prof. Wilhelm Fiedler in seinen Vorlesungen am Prager Polytechnicum zuerst rein geometrisch und allgemein löste, indem er dieses von J. de la Gournerie[1]) zuerst analytisch behandelte Problem mittelst des Principes der Reciprocität auf das bereits gewonnene Problem der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiten Grades zurückführte. Bei dieser allgemeinen Lösung des Problems der gemeinsam umschriebenen Developpabeln, welches den Gegenstand des §. 101, S. 384—388 seiner „Darstellende Geometrie, Leipzig 1871" bildet, entsprechen den beiden gegebenen Flächen zweiten Grades zwei andere Flächen zweiten Grades in der Art, dass den Punkten der einen Fläche die Tangentialebenen der anderen Fläche entsprechen. Betrachtet man die eine gegebene Fläche als leuchtendes, die andere als das beleuchtete Object, so sind die Berührungscurven der Developpabeln mit der letzten Fläche die Grenzlinien des Halbschattens und des Vollschattens auf derselben, während die Mäntel der developpabeln Fläche selbst auf der, der beleuchteten Fläche abgewendeten Seite der beleuchteten die Räume begrenzen, welche man als Halbschatten- und Kernschattenräume bezeichnet. Dieses wissenschaftlich höchst interessante Problem der developpabeln Flächen, welche zwei gegebenen Curven und Flächen, insbesondere solchen zweiten Grades umschrieben sind, bildet den Gegenstand des XXI. u. XXII. Capitels (S. 529—574) im II. Bd. (Wien 1884) von Herrn Prof. Peschkas Werk

[1]) Vergl.: J. de la Gournerie, Traité de géométrie descriptive. Tome II*, pag. 64—103. Paris 1862.

„Darstellende und projective Geometrie.“ Die eigentliche „Schattenlehre“ finden wir mit der Construction der Schatten, der Schlagschattenbestimmung, den Beleuchtungs-Intensitäten und der Construction der Isophoten für krumme Flächen im Anhange (IV. Bd., S. 388—605, Wien 1885) seines grossen Werkes. In diesen vier Capitel umfassenden und gründlichen Ausführungen wurden auch die bekannten Werke von F. Tilscher (Beleuchtungsconstructionen, Prag 1862), C. Riess (Schattierungskunde, Stuttgart 1871), L. Burmester (Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen, Leipzig 1871), sowie Helmholtz „Physiologische Optik“ berücksichtigt. Einen schönen Abschnitt bildet die Beleuchtungslehre mit den in centraler Projection durchgeführten Constructionen der Schatten von Polyedern und Flächen zweiter Ordnung im XXVIII. Capitel des II. Bandes von Herrn Prof. Peschkas ausgezeichneten Werke „Freie Perspective“, Leipzig 1888—89. In axonometrischer und schiefer Projection finden wir die Schattenconstructionen für ebenflächige Körper, Kegel- und Cylinderflächen in Dr. R. Staudigls „Parallel-Perspective, Wien 1875“ (S. 89 u. 107), sowie in den beiden gediegenen Abhandlungen von Herrn Prof. Karl Pelz „Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie“ (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. XL. S. 1060—1075, Jahrg. 1884) und „Beiträge zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie“ (Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, Jahrg. 1885), wo in den Aufgaben über die axonometrische Projection des Kreises, des Umdrehungscylinders, des Umdrehungskegels und der Kugel in sinnreicher Weise auf alleiniger Grundlage der gegebenen Richtung der Linien des Axenkreuzes die Achsen der hier vorkommenden Schatten-Ellipsen unmittelbar bestimmt werden.

Eine hohen Anforderungen entsprechende, auf physikalischer Grundlage ruhende Beleuchtungslehre mit ihrer Anwendung auf ebenflächige Körper finden wir in dem ersten Bande (S. 390—426) des Musterwerkes „Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Leipzig 1884“ von Herrn Geh. Hofrath Dr. Chr. Wiener. In dieser Beleuchtungslehre und ihrer Anwendung auf ebenflächige Körper benützte Herr Hofrath Wiener zur Bestimmung der Helligkeit zumeist das Lambertsche oder Cosinusgesetz, welches auch wirklich die beste erste Annäherung an die Wahrheit gewährt. Zur Herstellung einer sicheren physikalischen Grundlage hat der gelehrte Verfasser zunächst die Ergebnisse der Untersuchungen von Lambert, Bouger und Zöllner verarbeitet, und es wurde ihm dadurch möglich, die Helligkeit, welche durch Reflexe verschiedener Körperoberflächen hervorgebracht wird, mit derselben

Sicherheit zu bestimmen, wie die durch directe Beleuchtung erzeugte. Herr Hofrath Wiener, der zur sicheren Bestimmung der Helligkeit selbst ausgedehnte Untersuchungen ausgeführt hatte, führte bei der constructiven Bestimmung der Helligkeit einer ebenen Fläche die Benützung des Schlagschattens der Falllinie der Ebene ein — ein einfaches Verfahren — das rasch und sicher zum Ziele führt. Die Beleuchtung krummer Flächen im allgemeinen, und die der Kugel, des Cylinders und des Kegels, sowie die Beleuchtung der Umdrehungsflächen mit ihren Lichtgleichen bilden den V. Abschnitt (S. 200—242) des zweiten Bandes (Leipzig 1887) dieses Werkes, in welchem der geschätzte Gelehrte neben seinen ausgedehnten synthetischen und psychophysikalischen Forschungen auch die von Dr. L. Burmester in seinem Werke „Theorie und Darstellung der gesetzmäßig gestalteter Flächen, Leipzig 1871" analytisch begründete Lehre der Isophoten und die damit zusammenhängenden, oft auf projective Geometrie gestützten Constructionen verwertete. Einen besonderen Abschnitt (VII, S. 332—342) bildet im zweiten Bande die Beleuchtung der Flächen zweiten Grades, während die Licht- und Schattengrenzen und die Lichtgleichen der abwickelbaren Schraubenfläche (S. 379), sowie jene der Umhüllungs- oder Röhrenflächen (S. 408), der Conoide (S. 423) und die Schattengrenzen (S. 497) und Lichtgleichen (S. 508—525) der windschiefen Schraubenflächen in den betreffenden Flächen-Capiteln den Gegenstand sehr wertvoller Untersuchungen und geistreicher Constructionen bilden.

Da die von Herrn Prof. Wiener ausgeführten Untersuchungen über die Helligkeit der Körper sehr umfangreich wurden, so gab er die Absicht, sie im zweiten Bande seines Werkes zu veröffentlichen, auf und behielt sich ihre Veröffentlichung für einen späteren Zeitpunkt vor. Auf das treffliche „Lehrbuch der Schattenconstruction und Beleuchtungskunde, Stuttgart 1895" von Herrn Adolf Göller, Professor an der k. tech. Hochschule zu Stuttgart, haben wir bereits im dritten Abschnitte (S. 93) hingewiesen. Es geht bei der Bestimmung der Linien der Lichtgleichen von der Normalkugel aus und führt die Anwendung dieses Kugelverfahrens consequent bei allen Flächen durch.

Ein selbstständiges und sehr interessantes Capitel bildet hingegen die Beleuchtung der Flächen im zweiten Bande (S. 480—528, Leipzig 1896) des neuen Lehrbuches der darstellenden Geometrie von Dr. K. Rohn und Dr. E. Papperitz, wo neben den Flächen zweiten Grades, die Rotations-, Schrauben- und Regelflächen untersucht, und insbesondere die Lichtgleichen des Plückerschen Conoides (S. 523) bestimmt werden, nachdem dessen Eigen- und Schlagschatten schon früher (S. 273) construiert wurden. Zur Verwendung gelangen bei der Bestimmung der Lichtgleichen je nach der Art der Flächen das Kugel-, Cylinder- und das Kegelverfahren.

Nicht unbeachtet konnte in den descriptiven Forschungen der technisch so wichtige Wissenszweig der Kinematik oder der Geometrie der Bewegung bleiben. Ihre Untersuchungen erhielten besonders in Frankreich durch Chasles neugeometrische Forschungen eine moderne Gestalt. Schon im Jahre 1867 wurde die „Géométrie cinématique" von Herrn Prof. A. Mannheim, der ihr in seinen zahlreichen Abhandlungen (Comptes rendus, etc.) und in seinem Werke „Cours de Géométrie descriptive, Paris 1880" die sorgfältigste Pflege zugewendet hatte, in den Lehrplan der École polytechnique eingeführt. Als die hervorragendsten Forscher auf dem Gebiete der Kinematik in Frankreich müssen wir neben Mannheim[1]) noch H. Resal (Traité de cinématique pure, Paris 1862), E. Bour (Cinématique, Paris 1865), I. de la Gournérie, Bobillier, Laboulaye, Brisse und M. d'Ocagne nennen. Auch in Deutschland erhielt die mit der Curven- und Flächentheorie so innig zusammenhängende Kinematik durch die Arbeiten von Cullmann, Ritterhaus, Schell, Mehmke, Müller, Rodenberg, Schönflies (Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung, Leipzig 1886) und besonders durch das große Werk „Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888" von Dr. L. Burmester, damals Professor am königl. Polytechnicum in Dresden (jetzt in München) eine wesentliche Erweiterung in neugeometrischer Richtung. Bekannt ist auch das geschätzte Werk „Kinematik„ (deutsch von A. Ziwet, Leipzig 1878) von J. Sommoff, Professor an der Universität zu St. Petersburg. Von englischen Forschern nennen wir Thomson, Tait, Cayley und R. St. Ball, von italienischen Forschern Padeletti und Cremona.

Eine stattliche Reihe von interessanten Untersuchungen auf dem Gebiete der Kinematik veröffentlichten österreichische Schriftsteller in den XLVIII Jahrgängen (1848—96) der trefflich redigierten Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines in Wien. Unser besonderes Interesse nehmen selbstverständlich hier nur die von darstellenden Geometern ausgeführten kinematischen Untersuchungen in Anspruch. Wir erwähnen die im Jahre 1865 im LI. Bde. S. 49—76 der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien von Karl Moshammer, Professor an der Staats-Oberrealschule in Görz (jetzt an der Staats-Gewerbeschule in Reichenberg) veröffentlichte

---

[1]) S. das große Werk von Herrn Prof. A. Mannheim, Principes et développements de géométrie cinématique. Paris 1894.

Abhandlung „Zur Theorie eines Systemes von Varianten der conoidischen Propellerschraube“ und die von demselben Verfasser in den Wiener Sitzungsberichten vom Jahre 1876 (LXXIII. Bd. S. 143—168) veröffentlichte Abhandlung „Zur Geometrie der Schraubenbewegung und einer Regelfläche dritter Ordnung,“ in welcher neugeometrische Forschungen kinematisch verwertet wurden. Eine ganz besondere Erwähnung verdient die schöne Abhandlung „Kinematische Bestimmung der Contour einer windschiefen Schraubenfläche“ (Wiener Sitzungsberichte, Bd. LXXXVI, S. 377—388, Jahrg. 1882), in welcher Herr Josef Tesař, Professor an der Staats-Gewerbeschule in Brünn, zuerst versuchte, die Elemente der kinematischen Geometrie der darstellenden Geometrie behufs Ermittelung der Contourcurve einer transcendenten Regelfläche dienstbar zu machen. Dieser wissenschaftlich-wertvollen Arbeit, welche das in Österreich so vielfach untersuchte Gebiet der Contourbestimmungen von krummen Oberflächen um eine neue und interessante, auf transcendente Flächen leicht anwendbare Methode, für welche die Geometrie der Lage einen Ersatz zu bieten nicht im Stande ist, bereicherte, folgte im folgenden Jahre in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien (Bd. LXXXVII, S. 473—483) die Abhandlung „Zur Contourbestimmung windschiefer Schraubenflächen“ von Herrn Prof. Karl Pelz in Graz, in welcher auf die diesbezüglichen descriptiven, bez. kinematischen Untersuchungen von J. de la Gournerie[1]) und Dr. L. Burmester[2]) hingewiesen und die Contourbestimmung mittelst hyperbolischen Paraboloiden, welche sich längs der einzelnen Erzeugenden der Schraubenfläche anschmiegen in eben so einfacher und eleganter Weise, wie bei Prof. Burmester, aber gleichzeitig für orthogonale, orthogonal- und klinoaxometrische Darstellungen durchgeführt wird. Die Bewegung von Punkten auf gegebenen Curven und Flächen untersuchte A. Seydler in Prag in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften (Jahrg. 1880, S. 111—114). Die Theorie der Bewegung auf developpablen Flächen bildet den Gegenstand einer von F. Wittenbauer in Graz im LXXXI. Bande (Jahrg. 1880, S. 697) der Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien veröffentlichten Abhandlung. Mit der Schraubenbewegung, dem Nullsystem und linearen Complex, sowie mit den benachbarten Strahlen im linearen Complexe

[1]) S.: J. de la Gournerie, Traité de Géométrie descr. Tom. III, art. 1002, pag. 109—179. Paris 1864.

[2]) S. Dr. L. Burmester, Kinematisch-geometrische Constructionen der Parallelprojection der Schraubenfläche und insbesondere des Schattens derselben. Schlömilchs Zeitschrift für Math. u. Phys. XVIII. Jahrg. S. 185—202, Leipzig 1873.

beschäftigte sich Herr Prof. Karl Küpper im I. Jahrg. der Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik (S. 95—104 und S. 451—456) im Jahre 1890. Die geometrischen Gesetze der Ortsveränderung starrer Systeme untersuchte der letztgenannte Forscher schon im Jahre 1861 im VI. Jahrg. der Zeitschrift für Mathematik und Physik; sie bilden auch den Gegenstand einer interessanten, mit der Osculationsebene der Curven zusammenhängenden Untersuchung von Prof. Eduard Weyr im CIV. Bande (S. 292—299), Jahrg. 1895, der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien.

Wir erwähnen ferner noch die Abhandlungen „Die Linearbewegung (Kinematik) des Strahles, Graz 1883", „Die Ebene als bewegtes Element" (Zeitschrift für Math. u. Phys. XXX. Jahrg. S. 216—233, Leipzig 1885) von F. Wittenbauer, dipl. Ingenieur und Docent an der k. k. tech. Hochschule in Graz, welcher später als Professor noch mehrere Abhandlungen in derselben Zeitschrift veröffentlichte. Bemerkenswert sind auch die Abhandlungen „Über den Ort der Axen bei Schraubenbewegungen" von M. Pelišek in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag (Jahrg. 1885, S. 291—297), ferner die in denselben Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen „Zur graphischen Zusammensetzung der Kräfte und Drehungen im Raume" (Jahrg. 1886, S. 259 — 273) und „Die conische Loxodrome als Osculatrix (Ibid. S. 347—360) von Prof. J. Tesař, die „Kinematische Studien" (Archiv der Math. und Phys. LXIX. Th. S. 218) von Prof. Anton Sucharda in Tabor, und „Über gewisse mechanisch erzeugbare Curven und Flächen höherer Ordnung" (Wiener Sitzungsberichte 1885, Band LXXXVIII, S. 571) von Dr. Anton Puchta, Professor an der Universität in Czernowitz. Von neueren Arbeiten erwähnen wir „Einige Constructionen bezüglich der Schraubungsflächen" (Wiener Sitzungsberichte 1893, Bd. CII, S. 1204—1240) von J. Sobotka in Prag, ferner die „Beiträge zur Untersuchung der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche vierter Ordnung" (Monatshefte für Math. und Phys. V. Jahrg. S. 109—122, Wien 1894) von Friedrich Schmitt und „Ein Beitrag zur Kinematik der Ebene" (Wiener Sitzungsberichte CIV. Bd. S. 605—622, Wien 1895) von Friedrich Procházka, Prof. an der Realschule in Karolinenthal.

Aber auch der jüngste, mit der descriptiven Geometrie verwandte Wissenszweig die Photogrammetrie besitzt in Österreich eine für die Gegenwart hinreichende Literatur, welche bei dem großen Interesse, welches dieser noch jungen Wissenschaft entgegengebracht wird, sich mit jedem Jahre in erfreulicher Weise erweitert. Die erste Abhandlung „Anwendung der Photographie zu militärischen Zwecken" erschien im

Jahre 1876 in den Mittheilungen des k. k. Artillerie- und Genie-Comités in Wien. Im Jahre 1892 veröffentlichte Herr Prof. Fr. Schiffner in Pola sein geschätztes Werk „Die photographische Messkunst oder Photogrammetrie, Halle 1892" dem „Die Photogrammetrie oder Bildmesskunst im Dienste des Forsttechnikers, Wien 1893" von F. Wang folgte. Ein treffliches Werk „Die Photographie im Dienste des Ingenieurs," zugleich ein Lehrbuch der Photogrammetrie, veröffentlichte Herr dipl. Ingenieur F. Steiner o. ö. Professor der Ingenieur-Wissenschaften an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag, bei R. Lechner in Wien im Jahre 1893. Mehrere diesbezügliche Aufsätze finden wir über die photographische Messkunst in den Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien (Jahrg. 1891—96), ferner in den Monatsblättern des wissenschaftlichen Clubs in Wien und eine übersichtliche Darstellung der „Photographische Arbeiten in Österreich" brachte Dr. Eders Jahrbuch für Photographie im Jahre 1894.

In der im zweiten Bande dieses Werkes folgenden, chronologisch und systematisch geordneten Literatur-Übersicht über die zahllosen Abhandlungen, Lehrbücher und Werke über darstellende und projective Geometrie sind alle Gebiete unserer Wissenschaft in überaus anregender Weise vertreten: Die Methoden der darstellenden Geometrie in ihren Begründungen, theoretischen Entwickelungen und praktischen Anwendungen; die Errungenschaften der projectivischen Geometrie, die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen, die construierende und analytische Geometrie der Lage, wie nicht minder die Kinematik, Relief-Perspective und die Photogrammetrie. Den Gegenstand dieser Abhandlungen bilden insbesondere: Die orthogonale, orthographische oder axonometrische und die schiefe oder klinographische Projectionsmethode (Parallel-Perspective, trimetrische, dimetrische und isometrische Projection); die kotierten Ebenen und Transformationen in der Parallel-Perspective, die Centralprojection und Perspective mit ihren Transformationen; ferner die Relief-Perspective, Kinematik und die Photogrammetrie. Specielle Behandlungen fanden die Strahlenflächen, das Drei-, Vier- und Vielkant, die Polyeder im drei und mehrdimensionalen Raume.

Eine besondere Anziehungskraft übten selbstverständlich die Curven- und die Flächentheorie aus. Die Untersuchungen über die Curven und Flächen zweiter, dritter und höherer Ordnung, über abwickelbare und windschiefe Flächen, über Rotations- und Rückungsflächen sind reich in unserer Literatur vertreten. Das gleiche gilt von der Theorie der Krümmung der Curven und Flächen. Ein wissenschaftlich interessantes und praktisch wichtiges Gebiet der darstellenden Geometrie bildet noch immer die Schatten- und Beleuchtungslehre. Aber auch die Methoden der Kartenprojection fanden geschätzte Vertreter auf diesem interessanten Gebiete. Nicht unberücksichtigt konnte selbstverständlich die Geschichte der darstellenden Geometrie bleiben, wenn auch dieses fesselnde Gebiet unserer Wissenschaft verhältnismäßig noch wenig Beachtung gefunden hatte, und erst durch Herr Geh. Hofrath Dr. Chr. Wiener in Karlsruhe im Jahre 1884 ins Leben gerufen wurde.

Von historischen Arbeiten auf dem Gebiete der Geometrie erwähnen wir den geistvollen Vortrag „Über die Geometrie der alten Ägypter" gehalten in der feierlichen Sitzung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien am 29. Mai 1884 von Dr. Emil Weyr, wirklichem Mitgliede der kais. Akademie der Wissenschaften und ord. Professor der höheren Geometrie an der Universität in Wien. Zwei geschätzte Beiträge zur Geometrie der Alten („Über das Axiom des Archimedes") veröffentlichte Herr Professor Dr. O. Stolz in Innsbruck im XXII. Bande (S. 504) und XXXIX. S. 107) der Mathematischen Annalen (Leipzig 1883 und 1891). Nicht unbeachtet konnte Johann Kepler, der geniale Begründer seiner unsterblichen Planetengesetze bleiben, der den größten Theil seines Lebens in Österreich — seiner zweiten Heimat — zugebracht und hier seine großen Entdeckungen gemacht hatte. Wir erwähnen die beiden im Jahre 1871 aus Anlass der 300-jährigen Wiederkehr seines Geburtstages gehaltenen Festreden „Über Johann Keplers Leben und Wirken, Graz 1871" von Dr. K. Friesach und Prof. Joh. Rogner und lenken die Aufmerksamkeit der Geometer auf die treffliche, an philosophisch-schönen Gedanken reiche Studie „Johann Kepler," welche im Jahre 1888 erschien und Herrn Dr. Leopold Schuster, o. ö. Professor der Universität zu Graz, zum Verfasser hat. Dieses interessante Werk, welches im ersten Capitel (S. 18—76) „Keplers Stellung zum Gregorianischen Kalender," im zweiten Capitel (S. 77—136) „Kepler und das Copernicanische Weltsystem" und im dritten Capitel (S. 137—232) „Keplers Glaubenskampf" behandelt und im Nachhange (S. 233—243) eine bisher ungedruckte Handschrift der k. k. Universität Graz, betitelt „Epistola P. Pauli Guldini ad Joannem Keplerum, qua medianti discessum ex Austria etc. fidem orthodoxam suadet" bringt, bildet gewiss zu dem Werke von Mich. Theoph. Hansch „Joannis Kepleri epistolae mutuae, Lipsiae 1718" und besonders zu der vollständigen, acht Bände umfassenden Gesammtausgabe von Prof. Dr. Christian Frisch „Joannis Kepleri Opera omnia, Francofurti 1858—1871" eine erwünschte Erweiterung der Literatur über den großen Astronomen, Mathematiker und Gymnasiallehrer.

Bekanntlich hat der Bibliothekar in Graz, Johann Krausler acht Originalbriefe und ein Gedenkblatt Keplers im CXXI. Bande der Wiener „Jahrbücher der Literatur“ (Jahrg. 1848) veröffentlicht, während Herr C. Anschütz in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften vom Jahre 1886 (S. 417 — 421) drei noch unbekannte Briefe Keplers aus dem J. 1599 an den bayrischen Kanzler Herwart von Hohenburg veröffentlichte.

Die „Eingabe Johann Keplers an Kaiser Rudolf II. um Ertheilung eines Generalprivilegs für den Druck seiner Werke, März 1606“ bildet den Gegenstand einer historisch-interessanten Mittheilung des Herrn Dr. R. Döbner, Archivar in Hannover, im XXIX. Bd., math.-hist. Abtheilung, S. 174—175, Jahrg. 1884, der Zeitschrift für Mathem. und Physik in Leipzig.

Welche geistige Höhe Kepler in seinen Forschungen als Geometer schon am Anfang des XVII. Jahrhundertes erreicht hatte, haben wir im VI. Abschnitte dieses Werkes (S. 202 — 211) in gedrängter Kürze auseinandergesetzt.

Die Verdienste Monges um die wissenschaftliche Begründung der darstellenden Geometrie und seine Bedeutung für die Reform des europäischen Unterrichtswesens in technischer Beziehung bilden den Gegenstand unserer in drei Abschnitten veröffentlichten Monographie „Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft, Brünn 1893—95.“

Bevor wir nun eine gedrängte Übersicht über die in den letzten dreißig Jahren in Österreich ausgeführten wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der darstellenden und projectiven Geometrie geben, können wir die von geschätzten Fachmännern schon seit 1870 angestrebte Reform des geometrischen Unterrichtes in Österreich selbst nicht unerwähnt lassen. Wie erwähnt, ist es den beiden Hochschul-Professoren Dr. Wilhelm Fiedler und Dr. Karl Küpper bereits in den sechziger Jahren gelungen, den Unterricht am deutschen Polytechnicum in Prag im Sinne der neueren Geometrie zu gestalten. Das gleiche Ziel strebte Prof. Josef Schlesinger, Docent am polytechnischen Institute in Wien an. Die wissenschaftliche Grundlage für seine Bestrebungen bildeten die Abhandlung „Der unendliche Raum und die Begrenzung geometrischer Gebilde,“ vorgelegt der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien im Jahre 1866, ferner die Abhandlungen „Gestaltung der darstellenden Geometrie im Sinne der neueren Geometrie“ (Wiener Sitzungsberichte 1868, Bd. LVIII, S. 35), „Die projectivischen Flächen“ (Ibid. S. 435—442), „Darstellung der Collinear-Projectionen und projectivischen Grundgesetze in einer für die descriptive

Geometrie geeigneten Form“ (Ibid. S. 658—676) und die „Darstellung der räumlichen Collinear-Projection in orthogonalen Abbildungen“ (Ibid. Bd. LIX, S. 636—644, Jahrg. 1869).

Im Jahre 1870 erschien bei C. Gerold & Sohn in Wien sein bereits erwähntes, 449 Seiten und 194 Figuren umfassendes Werk „Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie,“ welches seinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Johann Hönig gewidmet war und in den Schulen technischer Richtung die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie reformieren sollte. Bekannt ist der bescheidene Erfolg, den Prof. Schlesinger mit diesem, eine übergroße Fülle an Lehrstoff enthaltenden und weitgehende Ziele verfolgenden Lehrbuche erreichte. Es besass nicht jene wissenschaftliche Höhe, um sich an den technischen Hochschulen Eingang zu verschaffen, und andererseits fehlte ihm jene didaktische Breite im Lehrgange, welche für einen ersprießlichen Unterricht an der Mittelschule Grundbedingung ist. Schon im J. 1879 sprach ein geschätzter Fachmann und Pädagoge in der darstellenden Geometrie, Herr Prof. Cl. Barchanek, sein Bedauern aus, dass Schlesingers Lehrbuch in den österreichischen Schulkreisen kühl bis ans Herz aufgenommen wurde.[1])

Die projective Methode, welche den Lehrstoff mustergiltig nach dem gegenseitigen Zusammenhange der Schnittfiguren im Raume und nach den schönen Gesetzen der geometrischen Verwandtschaft ordnet, die perspectivisch collinearen und affinen, ähnlichen und congruenten Systeme stereometrisch strenge begründet, die interessanten Beziehungen der Linien zweiter Ordnung zu einander und zu anderen Gebilden uns klarlegt und insbesondere bei der projectiven Behandlung der Strahlenflächen zu überraschend schönen, der Mittelschule auch leicht zugänglichen Resultaten führt, blieb noch lange ein berechtigter Wunsch der mit den Wissenschaften wohl vertrauten Schulmänner.[2]) Die Reform des

[1]) S. d. Vorwort zu „Projective Behandlung der Strahlenflächen,“ ein Beitrag zu dem Unterrichte der darstellenden Geometrie im neueren Sinne, von Prof. Cl. Barchanek. Programmaufsatz der Staats-Oberrealschule in Görz für das Schuljahr 1878—79.

[2]) S. die auf die „Reform des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie bezüglichen Abhandlungen von C. Ambrózy (Programm der Staats-Realschule in Bielitz 1875 und Zeitschrift für das Realschulwesen II. Jahrg. Wien 1877), Cl. Barchanek (Programme der Staats-Oberrealschule in Görz 1876, 1879, 1887 und 1888, sowie Zeitschrift für das Realschulwesen VIII. Jahrg. 1883, etc.), K. Klekler (Die Methoden der darstellenden Geometrie, Leipzig 1877), R. Kirchberger (Zeitschrift für das Realschulwesen III. und IV. Jahrg. 1878—79), W. Németz (Ibid. III. Jahrg. 1878), H. Drasch (Ibid. V. Jahrg. 1880), F. Bergmann (Ibid. VI. und VIII. Jahrg. 1881—83), W. Binder (Die Stellung der darstellenden Geometrie im Lehrplane der allgemeinen Mittelschule, Wiener-Neustadt 1882), etc.

Lehrplanes für die darstellende Geometrie, welche erfahrene, in die Zukunft blickende Realschullehrer schon vor zwanzig Jahren energisch angestrebt hatten, war ein Wunsch und blieb mit anderen frommen Wünschen, vielleicht auch unter der Last der Directions- und Berufsgeschäfte so lange begraben, bis sich die projective Geometrie — begünstigt von fortschrittlich gesinnten Lehrern — in den Unterricht an der Realschule selbst Bahn gebrochen hatte.[1]) Bekannt ist ja auch der Erfolg, den Herr Karl Klekler, Professor an der k. k. Marine-Akademie zu Fiume, mit seinem Lehrbuche „Die Methoden der darstellenden Geometrie zur Darstellung der geometrischen Elemente und Grundgebilde, Leipzig 1877" (151 S.) erzielte, um den ersten Unterricht in der darstellenden Geometrie systematisch zu gestalten, und den Grundbegriffen der Geometrie der Lage Eingang in den Elementarunterricht zu verschaffen.

Die ersten Erfolge mit der Einführung der Geometrie der Lage in den Unterricht der darstellenden Geometrie an der Wiener Hochschule erzielte Herr Dr. Rudolf Staudigl, Professor der darstellenden Geometrie am k. k. polytechnischen Institute, dessen „Lehrbuch der neueren Geometrie" im J. 1871 bei L. W. Seidel in Wien erschienen ist. Dieses treffliche, 365 S. umfassende Werk, führte mit Gewandtheit die Studierenden in die neugeometrischen Forschungen von Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles, von Staudt ein, und berücksichtigte selbstverständlich auch die seit dem Jahre 1852 erschienenen neueren Werke von Chasles (Traité de géométrie supérieure, Paris 1852,[2]) Traité des sections coniques, Paris 1865), von Staudt (Beiträge), Chr. Paulus (Grundlinien der neueren ebenen Geometrie, Stuttgart 1853), B. Witzschel (Grundlinien der neueren Geometrie, Leipzig 1858), H. Pfaff (Neuere Geometrie, Erlangen 1867), H. Schröter (Die Theorie der Kegelschnitte, Leipzig 1867), R. Sturm (Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867), Th. Reye (Die Geometrie der Lage, Hannover 1868), H. Gretschel (Lehrbuch zur Einführung in die organische Geometrie, Leipzig 1868) und C. F. Geiser (Einleitung in die synthetische Geometrie Leipzig 1869), nebst zahlreichen wichtigen Abhandlungen aus den Zeitschriften von Clebsch, Crelle, Grunert und Schlömilch.

---

[1]) Vergl.: z. B. die schönen Programm-Aufsätze von Prof. Cl. Barchanek in den Jahresberichten der Staats-Oberrealschule in Görz für die Schuljahre 1876, 1879, 1887, 1888, etc. über Strahlenflächen und Kegelschnitte.

[2]) S. a.: E. H. Schnuse, Grundlehren der neueren Geometrie. Braunschweig 1856. (Nach Chasles Traité de Géométrie supérieure).

Prof. Staudigls Lehrbuch der neueren Geometrie, welches im ersten Abschnitte (S. 4—88) die Grundgebilde der ersten Stufe, im zweiten Abschnitte (S. 89—217) die Erzeugnisse zweier projectivischen Punktreihen und Strahlenbüschel in einer Ebene behandelt, im dritten Abschnitte (S. 118—275) die Grundgebilde der zweiten Stufe, und im vierten Abschnitte die Flächen zweiter Ordnung bezüglich ihrer projectivischen Erzeugung, sowie bezüglich ihrer Polareigenschaften untersucht, und im fünften Abschnitte (S. 319—365) mit dem involutorischen räumlichen Systeme und den Raumcurven dritter Ordnung (S. 352—365) den zu behandelnden Lehrstoff der neueren Geometrie abschließt, fand neben Dr. Theodor Reyes ausgezeichnetem Werke „Die Geometrie der Lage, Hannover 1866—68“ die beste Aufnahme in dem Kreise der österreichischen Mittelschullehrer.

Schon als Assistent der Mathematik am deutschen polytechnischen Institute in Prag hatte Emil Weyr seine treffliche, 156 Seiten umfassende „Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse, Leipzig 1869“ bei B. G. Teubner veröffentlicht, welchem Werke nach seiner Habilitation als Privatdocent für neuere Geometrie an der Universität in Prag die „Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein- zweideutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung, Leipzig 1870“ (175 S.) folgte. In den Jahren 1871, 1874 und 1878 gab Herr Dr. Emil Weyr mit seinem Bruder Eduard Weyr die in drei Theilen in Prag in böhmischer Sprache erschienenen „Grundzüge der höheren Geometrie“ (Základové vyšší geometrie) heraus, und im Jahre 1883 erschien bei Wilhelm Braumüller in Wien von Dr. Emil Weyr, o. ö. Professor an der Universität in Wien, das erste Heft seines Werkes „Die Elemente der projectivischen Geometrie“, welches die Theorie der projectivischen Grundgebilde erster Stufe und der quadratischen Involutionen enthielt. Diesem folgte im Jahre 1887 das zweite Heft, in welchem die Theorie der Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe eine ausgezeichnete neugeometrische Behandlung erhielt. Leider blieb dieses durch seine Klarheit und durchweg wissenschaftliche Strenge auch im Auslande geschätzte Werk des im Jahre 1894 verstorbenen Verfassers unvollendet.

Jm Jahre 1889 veröffentlichte Herr Wilhelm Rulf, Professor an der Staats-Oberrealschule in Pilsen, bei Louis Nebert in Halle an der Saale unter dem Titel „Elemente der projectivischen Geometrie“ einen, 96 Seiten umfassenden Theil der Vorträge, welche Herr Professor Karl Küpper über „Geometrie der Lage“ an der deutschen technischen Hochschule in Prag seit dem Jahre 1867 hält. Der Verfasser hat sich in diesem Werkchen, welches er Herrn Prof. Küpper gewidmet hat, die Aufgabe gestellt, die neuere Geometrie im Sinne dieser Hochschulvorträge und auf Grund neuer von Prof. Küpper herrührenden Definitionen und höchst einfacher Beweise in leicht fasslicher Weise zu behandeln.

Eine durch die Einfachheit der Behandlung und die Originalität der Auffassung fesselnde Auseinandersetzung fanden hier insbesondere die Beziehungen zwischen den gemeinschaftlichen Elementen zweier Kegelschnitte und die auf der „Steinerschen Verwandtschaft“ basierenden Betrachtungen über Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen. In demselben Jahre (1889) erschienen bei B. G. Teubner in Leipzig die „Einleitung in die projectivische Geometrie der Ebene“, welcher Herr Privatdocent K. Bobek, jetzt Prof. der Mathematik an der deutschen Universität in Prag, gleichfalls die von Prof. K. Küpper seit 1867 am Prager Polytechnicum gehaltenen Vorträge über „Geometrie der Lage“ zu Grunde legte. Den Ausgangspunkt dieses Werkes bilden die Sätze über projectivische Gebilde und die Involution. Das II. Cap. behandelt die von Staudtsche Definition der Collineation, während im III. Cap. die Centralprojection des Kreises, die Construction des Kegelschnittes durch seine Punkte und Tangenten, die projectivischen Gebilde und die Involution auf dem Kegelschnitte, sein Pol und seine Polare sammt den Polardreiecken zur Besprechung gelangen. Wie in dem früher erwähnten Lehrbuche, so wurden auch hier im IV. Cap. die Kegelschnitte und ihre Constructionen aus reellen und imaginären Bestimmungsstücken behandelt, nachdem die imaginären Elemente mit Hilfe des reellen Kegelschnittes definiert wurden. Nach der adjungierten Involution werden die imaginären Elemente, das Polarsystem und die Polarfiguren, die Classification der Kegelschnitte und die Reciprocität einer eingehenden Besprechung unterzogen. Im V. Capitel werden die Hauptpunkte einer Collineation, die Steinersche Verwandtschaft, die Schnittpunkte, gemeinsamen Tangenten und die gegenseitige Lage zweier Kegelschnitte betrachtet. Das VI. Capitel dieses 210 Seiten umfassenden Lehrbuches der neueren Geometrie beschäftigt sich mit den Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittscharen und schließt nach der Auseinandersetzung der metrischen Eigenschaften der Kegelschnitte mit den Faureschen Polarkreisen. Der Projectivität im Kegelschnittbüschel folgt im VII. Cap. das Kegelschnittnetz, mit Betrachtungen an zwei Kegelschnittbüscheln, die nicht in einem Netze liegen, worauf die biquadratische und cubische Involution zur Besprechung gelangen. Mit der Erzeugung der Curven dritter Ordnung, den Curvenbüscheln dritter Ordnung und entsprechenden Sätzen finden mit dem Netz conischer Polaren einer Curve dritter Ordnung im VII. Capitel diese Vorlesungen über „Neuere Geometrie" am deutschen Polytechnicum in Prag ihren Abschluss.

Es ist einleuchtend, dass eine so sorgfältige Pflege der darstellenden Geometrie in den letzten fünfzig Jahren und der projectivischen Geometrie in den letzten dreißig Jahren in Österreich eine achtenswerte Bereicherung der Literatur zur Folge haben musste. Die mit der Lagenveränderung räumlicher Gebilde zusammenhängenden Untersuchungen und Constructionen erweiterten das Gebiet der Transformationen in allen Projectionsmethoden. Die Transformationen in centraler, schiefer und orthogonaler Projection bilden den besonders sorgfältig durchgeführten vierten Abschnitt (S. 404—455) des I. Bandes in Herrn Regierungsrath Dr. Peschkas Werk „Darstellende und projective Geometrie" (Wien 1883). Auf die von Herrn Prof. Dr. Wilhelm Fiedler in seinen Vorlesungen am Prager Polytechnicum verwendeten Transformationen, sowie auf seine diesbezüglichen literarischen Arbeiten haben wir bereits hingewiesen.[1]) Nicht unerwähnt wollen wir die eingehenden Untersuchungen lassen über combinierte Transformationen in der Centralprojection, ferner über Transformationen in der schiefen Projection, in der orthogonalen Axonometrie und in der kotierten Projection, welche Herr Professor Gustav Knobloch in den Jahresberichten der Staats-Oberrealschule in Marburg in den Jahren 1875, 1876 und 1884, 1885 veröffentlichte. Von lesenswerten Abhandlungen über Perspective erwähnen wir noch den hübschen Beitrag zur Linearperspective „Die Grenzebene" in dem LIV. Bande (Jahrg. 1866, S. 230—254) der Sitzungsberichte der Wiener Akademie und jene „Über wechselseitige Perspectivität dreier ebenen Systeme" von Prof. H. Anton im Jahresberichte 1874 der Realschule im VII. Bez. Wiens; ferner „Die Methoden der Centralprojection auf eine Ebene" von Prof. A. Breuer (Progr. Trautenau 1880), die geistreiche Abhandlung „Die Centralprojection als Hilfsconstruction in der Orthogonalprojection" von Wilhelm Binder, Professor an der n.-ö. Landes-Oberrealschule und Maschinenschule in Wiener-Neustadt (Progr. 1881—82) und die in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften von M. Pelíšek, Assistent am Polytechnicum in Prag, veröffentlichten Abhandlungen „Über perspectivische Restitution, Bewegung und Verzerrung" und „Untersuchung der Wirkungen perspectivischer Darstellungen. (Prag 1886). Als Professor der Staats-Realschule in Pilsen veröffentlichte M. Pelíšek in den Prager Sitzungsberichten vom Jahre 1890 seine „Perspectivische Studien."

[1]) S. a.: Dr. Wilhelm Fiedler, Über Transformationen in der darstellenden Geometrie. Zeitschrift für Mathem. und Phys. IX. Jahrg. S. 331—355. Leipzig 1864.

Einer besonderen Sympathie seitens der darstellenden und neueren Geometer erfreute sich das für die Central- und Parallelprojection wichtige Gebiet der Theorie der Kegelschnitte. Die diesbezüglichen, heute über früher ungeahnte Grenzen ausgedehnten Untersuchungen erhielten besonders durch die neueren analytischen Forschungen von Salmon und durch Steiners berühmte synthetische Forschungen einen neuen Reiz, und haben fast ausnahmslos in den Werken dieser großen Geometer ihre wissenschaftliche Grundlage. Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass die für die constructive Theorie der krummen Linien und Flächen so wichtige projective Theorie der Kegelschnitte die schönen Abschnitte der Methodenlehre in Dr. Wilhelm Fiedlers Werk „Die darstellende Geometrie, Leipzig 1872" S. 71—121) und in Dr. G. A. V. Peschkas Werk „Darstellende und projective Geometrie" (Bd. I, S. 162—211, Wien 1883) bildet. Eine treffliche Behandlung der Kegelschnitte als Erzeugnisse projectivischer Punktreihen und Strahlenbüschel, die Theorie ihrer Pole und Polaren, ihre Collineation, Büschel und Scharen, etc., enthalten die bereits erwähnten Lehrbücher der neueren Geometrie von Staudigl, Weyr, Bobek und Rulf. Die erste Abhandlung über Kegelschnitte „Construction des Kreises und der Ellipse" veröffentlichte in den Wiener Sitzungsberichten vom Jahre 1855 (Bd. XVI, S. 9—113) Nikolaus Fialkowski, Professor an der Comm.-Realschule im VI. Bezirke Wiens, welcher im folgenden Jahre der Akademie der Wissenschaften seine „Bestimmung der Axen bei den Ellipsen" (Bd. XX, S, 167—188, Jahrg. 1856) vorlegte. In demselben Jahre (1856) erschien im I. Jahrg. S. 363 der Schlömilchschen Zeitschrift die Abhandlung „Über einige Arten der mechanischen Beschreibung der Ellipse" von Herrn Karl Küpper, Lehrer an der Provinzial-Gewerbeschule in Trier. In den VI. Jahrg. (S. 415, Leipzig 1861) derselben Zeitschrift theilte Herr Dr. Wilhelm Fiedler, Lehrer an der königl. Gewerbeschule in Chemnitz, die „Graphische Bestimmung der Kegelschnitte nach den Sätzen von Pascal und Brianchon" mit und im XII. Jahrg. (S. 195—222) erschien im Jahre 1867 die „Perspectivische Darstellung der ebenen Schnitte von Kegel- und Cylinderflächen" von Emil Koutny, Assistenten der Lehrkanzel für darstellende Geometrie am k. k. technischen Institute in Brünn.

Eine Reihe von wissenschaftlich sehr wertvollen Abhandlungen über Curven und Flächen zweiter Ordnung, deren Untersuchungen ganz im Geiste Monges durchgeführt sind, verdanken wir Prof. Rudolf Niemtschik. Im Jahre 1869 veröffentlichte er als Professor am Joanneum in Graz im LIX. Bande (S. 39 — 47, bez. 481 — 491) der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien die beiden Abhandlungen „Über die Construction der Durchschnittspunkte von Kreisen und Kegelschnittslinien" und „Über die Construction der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnittslinien", welchen im Jahre 1871 im LXIII. Bande, S. 571—603, „Allgemeine Methoden zur Darstellung der Durchschnitte von Ebenen mit Kegel- und Cylinderflächen, von Geraden mit Kegelschnittslinien und von confocalen Kegelschnittslinien unter sich" folgten. Herr Rudolf Niemtschik, der die letztgenannte Abhandlung als Professor der darstellenden Geometrie am Polytechnicum in Wien der kais. Akademie der Wissenschaften vorgelegt hatte, setzte seine geistreichen Untersuchungen über Curven und Flächen zweiter Ordnung nach seiner eigenen Methode fort und legte der Akademie der Wissenschaften in dem Zeitraum 1873—74 vier gediegene, mit der Construction der Flächen zweiten Grades aus neun gegebenen Punkten zusammenhängende Abhandlungen vor, in welchen er die Construction doppelt berührender Kegelschnitte mit Zuhilfenahme von Flächen zweiten Grades mit einer an Monges Eleganz erinnernden Gewandtheit löste. Es sind dies die von den darstellenden Geometern besonders geschätzten Abhandlungen „Über die Construction der einander eingeschriebenen Linien zweiter Ordnung" (Wiener Sitzungsberichte, LXVII. Bd., S. 295—310, Jahrg. 1873), „Über die Construction der einem Kreise eingeschriebenen Ellipse, von welcher der Mittelpunkt und eine Tangente gegeben sind" (LXVIII. Bd., S. 377—380, Jahrg. 1873), „Über die Construction der einander eingeschriebenen Linien zweiter Ordnung" (LXVIII. Bd., S. 505—515, Jahrg. 1873) und „Über die Constructionen der Linien zweiter Ordnung, welche zwei, drei oder vier Linien derselben Ordnung berühren" (LXIX. Bd., S. 845—859, Jahrg. 1874). Eine besondere Erwähnung verdienen auch die schönen *Anwendungen der Methoden der darstellenden Geometrie zur Construction* doppelt berührender Kegelschnitte mit Hilfe windschiefer Hyperboloide im IX. Cap. (S. 130—148) des III. Bandes von Herrn Regierungsrath Dr. Peschkas Werk „Darstellende und projective Geometrie" (Wien 1884). Die Theorie der einander doppelt berührenden Kegelschnitte, welche Jakob Steiner in seiner Abhandlung „Allgemeine Betrachtungen über einander doppelt berührende Kegelschnitte" (Crelles Journal, Bd. XLV, S. 212—224; Gesammelte Werke II. Bd. S. 469—483) schon im Jahre 1853 im Sinne der neueren Geometrie mit Zugrundelegung der Lehre über das Kegelschnittbüschel, die Kegelschnittschar und das gemeinsame Polardreieck zweier Kegelschnitte durchgeführt hatte, war auch — aber entsprechend den von Chasles in seinem „Traité des sections coniques" (Paris 1865) zuerst angeregten und von den Prof. R. Niemtschik und Dr. Peschka constructiv so elegant durchgeführten Methoden — Gegenstand descriptiver und mit Benützung von Flächen zweiter Ordnung durchgeführter Constructionen von Prof. Ed. Wiskoczil in Iglau und zwar in der im VI. Jahrg. S. 292—294, (Wien 1881) der Zeitschrift für das Realschulwesen und der in den Jahresberichten der L.-Oberrealschule in Iglau in den Jahren 1893 und 1894 veröffentlichten Abhandlungen „Theorie der einander doppelt berührenden Kegelschnitte vom Standpunkte der darstellenden Geometrie, etc.“

Jm Jahre 1870 erschien im LXII. Bande (S. 261—270) der Wiener Sitzungsberichte die Abhandlung „Über ähnliche Kegelschnitte“ von Herrn Eduard Weyr in Prag, welcher bereits die neugeometrischen Forschungen von Steiner, Chasles, Cremona, Reye, etc. über die Projectivität der Kegelschnitte und die geometrischen Verwandtschaften zweiten Grades zu Grunde lagen, und im folgenden Jahre veröffentlichte der Bruder des Verfassers der letztgenannten Abhandlung, Herr Dr. Emil Weyr, Docent an der Prager Universität, in den Mittheilungen der Vereinigung böhmischer Mathematiker (Bd. III, S. 5—18, Prag 1871) eine Abhandlung aus der neueren Geometrie unter dem Titel „Von den projectiven Eigenschaften der Kreise.“ Herr Docent Emil Koutny veröffentlichte im Jahre 1871 im LXIII. Bande, S. 760—772) der Sitzungsberichte der Wiener Akademie seine „Beschreibung der Parabel aus gegebenen Punkten und Tangenten“, welcher im LXXI. Bande (S. 491—504, Jahrg. 1875) die Abhandlung „Über die Sätze von Pascal und Brianchon und die Construction der Kegelschnittslinien“ folgte. Auch von Herrn Karl Pelz, Lehrer an der Staats-Oberrealschule in Teschen, erschienen in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften im Jahrg. 1875 (S. 117—135) achtenswerte „Beiträge zur Construction der Kegelschnitte aus Punkten und Tangenten durch Collineation.“ Die „Construction der Durchschnittspunkte von Geraden mit Kegelschnittslinien“ bildet auch den Gegenstand einer 23 Seiten umfassenden Abhandlung des Herrn Dr. Gustav A. V. Peschka, o. ö. Professor der darst. Geometrie an der k. k. tech. Hochchule in Brünn, im LIX. Theil von Grunerts Archiv der Mathematik und Physik (Greifswald 1876). Wir erwähnen ferner die Abhandlungen „Construction des Durchschnittes einer Geraden mit den Kegelschnittslinien“ (Wiener Ber. 1867) und „Construction der Kegelschnittslinien“ (Wiener Ber. 1868) vom Docenten Emil Koutny; die „Ellipsenconstructionen“ und „Curven zweiten Grades betreffenden Constructionen“ (Wiener Ber. 1868 und 69) vom Adjuncten R. Staudigl und die „Erweiterung des Satzes von Desargues nebst Anwendungen“ (Wiener Ber. 1868) von Ed. Weyr in Prag; die „Beziehungen der Geraden zu Linien zweiter Ordnung, welche durch einen Diameter und eine conjugierte Sehne gegeben sind" (Wiener Ber. 1879) von Prof. Cl. Barchanek in Görz und „Die Projectiv-Constructionen der Curven zweiter Ordnung" (Wiener Ber. 1880) von Prof. W. Binder in Wiener-Neustadt. „Die von Möbius gegebenen Kriterien für die Art eines durch fünf Punkte oder fünf Tangenten bestimmten Kegelschnittes" (Wiener Ber. 1880 und 81), zog Herr Prof. H. Durège in den Bereich seiner curventheoretischen Untersuchungen. Herr Prof. Eduard Wiskoczil in Iglau, wies im VIII. Jahrg. der Zeitschrift für das Realschulwesen (Wien 1883) auf die „Identität der Parabelconstructionen aus Punkten und Tangenten in der neueren und descriptiven Geometrie" hin. Wir erwähnen noch „Neue Constructionen von Kegelschnitten aus zwei conjugierten Durchmessern" (Archiv der Math. und Phys. 1886) von Prof. F. Schiffner in Fiume, die „Constructive Geometrie der Kegelschnitte auf Grund der Focaleigenschaften" (Prag 1887) von Prof. A. Breuer in Trautenau und die musterhaft durchgeführte Abhandlung „Zur Kegelschnittlehre" in der Festschrift „Xenia Austriaca" (Wien 1893) von Prof. F. Haluschka in Wien. Mit dem Feuerbachschen Kreise[1]) (Nürnberg 1822) beschäftigten sich Dr. W. Fiedler (Zeitschrift für Math. u. Phys., VIII, Leipzig 1863), Emil Weyr (Prag 1873), K. Ebmer (Salzburg 1883), J. Österreicher (Wien 1884), W. v. Miorini (Bielitz 1886), etc. Das Apollonische Berührungsproblem und seine Erweiterung auf Ellipsen und Kugeln untersuchten F. Maurer (Graz 1875), W. Němetz (Elbogen 1877), F. Machovec (Karolinenthal 1879), W. Rulf (Pilsen 1880), Bergmann (Olmütz 1886), M. Rembacz (Stanislau 1887), E. Wiskoczil (Iglau 1887), W. von Moirini (Mähr.-Ostrau 1888), u. A. Eine elegante Lösung im Sinne der neueren Geometrie erhielt auch „Das Problem der vier Punkte oder die Pothenotsche Aufgabe durch Prof. W. Binder im LXXXIII. Bd. der Wiener Sitzungsberichte vom Jahre 1881. Die gemeinsamen Berührenden der Kegelschnitte waren Gegenstand der Untersuchungen von Prof. E. Lindenthal (Triest 1884, 87), die „Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen" (Linz 1886) von Prof. J. Heller. Die Singularitäten eines Kegelschnittnetzes und Gewebes" erforschte Prof. B. Igel in den Wiener Sitzungsberichten vom Jahre 1877. Die „Malfatti-Steinersche Aufgabe[2])

[1]) S.: K. W. Feuerbach, Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreieckes. Nürnberg 1822. — Jak. Steiner, Die geometrischen Constructionen. S. 49—55. Berlin 1883 und Ges. Werke, Bd. I, S. 460. Berlin 1881. — H. Schröter, Der Feuerbachsche Satz von den Berührungskreisen des ebenen Dreieckes. Math. Annalen, Bd. VII, S. 517, Leipzig 1874.

[2]) Anmerkung: Jakob Steiner hat im I. Bande (S. 180, Jahrg. 1826) des Crelleschen Journals die interessante Malfattische Aufgabe dadurch erweitert, dass er die Seiten des gegebenen Dreieckes durch Kreise ersetzte. (S. a. Gesammelte Werke Bd. I, S. 85, Berlin 1881).

und deren Construction" bildet den Gegenstand von zwei Abhandlungen, welche Herr Regierungsrath F. Mertens in Graz im XXXIV. Bande (Jahrg. 1876) der Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien und in den Prager Sitzungsberichten vom Jahre 1894 veröffentlichte. Mit den Poncelet schen Polyonen beschäftigten sich die Prof. E. Weyr, G. Kohn, K. Küpper, P. H. Schoute u. A. Eine besondere Erwähnung verdient das schöne Werk „Analytische Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte, nach neueren Methoden dargestellt", welches im Jahre 1891 in Prag erschien und Herrn Adolf Hanner, o. Prof. an der k. k. tech. Militär-Akademie in Wien, zum Verfasser hat.

Eine für die descriptive Darstellung der Curven und Flächen zweiten Grades wichtige Construction ist die Axenbestimmung einer Ellipse. In Joh. Hönigs „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie, Wien 1845" finden wir auf S. 253 nur die alte, auf der orthogonalen Symmetrie der Ellipse beruhende und die Contour der Ellipse benützende Axenbestimmung. Ein ganz besonders wissenschaftliches und constructives Interesse hat aber die Axenbestimmung eines Kegelschnittes, wenn derselbe durch ein Paar conjugierter Durchmesser bestimmt ist. Die erste directe Axenbestimmung für die Ellipse verdanken wir Herrn Rytz in Aarau, der sie seinem Collegen Leop. Mossbrugger, Lehrer an der dortigen Cantonschule, mittheilte, worauf sie letzterer sammt analytischem Beweise in seinem Werke „Größtentheils neue Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive nebst deren Anwendung auf die constructive Auflösung von Aufgaben über räumliche Verwandtschaften der Affinität, Collineation etc., Zürich 1845" (S. 123) veröffentlichte. Diese sinnreiche Construction finden wir auch im XX. Theil, S. 118—120, des Grunertschen Archivs der Mathematik und Physik, Greifswald 1853.

Auch Jakob Steiner hat in seinen Vorlesungen über „Synthetische Geometrie" an der Berliner Universität diese interessante Aufgabe der Axenbestimmung vielfachen Lösungen unterzogen, von welchen die auf die Ellipse bezüglichen Constructionen auf den Gesetzen der Projectivität beruhen, hingegen die für die Hyperbel geltende Construction des analytischen Beweisapparates nicht ganz entbehrt und somit als keine rein synthetische Constructionsmethode bezeichnet werden kann.[1])

Auch österreichische Geometer haben sich mit dem Problem der directen Axenbestimmung vielfach beschäftigt. Es geschah dies in den Abhandlungen „Bestimmung der Axen bei den Ellipsen" (Wiener Sitzungsberichte 1856, XX. Bd.) von Nikolaus Fialkowski, „Central-

[1]) S.: J. Steiners Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearbeitet von C. F. Geiser. S. 77. Leipzig 1867 und Steiner-Schröter. Die Theorie der Kegelschnitte. II. Aufl. S. 168. Leipzig 1876.

projection der Linien zweiter Ordnung" (Ibid. Bd. XLIX, Jahrg. 1864) von Karl Moshammer, „Über die directe Bestimmung der Axen von Centralprojectionen des Kreises" (Wiener Ber. 1867 u. Prager Ber. 1872) vom Assistenten Karl Pelz. Wir finden ferner directe Axenconstructionen in den Abhandlungen von Prof. R. Niemtschik (Wiener Sitzungsberichte 1871, etc.), Prof. Peschka (Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines in Wien, Jahrg. 1874 und Archiv der Math. und Phys. LVII. Theil, Leipzig 1875), etc. Vor seinem Abgange an die Landes-Oberrealschule in Graz veröffentlichte Herr Karl Pelz, Lehrer an der Staats-Oberrealschule in Teschen, im Jahresberichte dieser Anstalt für das Schuljahr 1875—76 die Abhandlung „Construction der Axen einer Ellipse aus zwei conjugierten Diametern" und im Jahre 1876 erschien von ihm im LXXIII. Bande der Wiener Sitzungsberichte (S. 378—432) die bereits erweiterte Abhandlung „Über die Axenbestimmung der Kegelschnitte", in welcher er Chasles diesbezügliche Forschungen berücksichtigte. Dieses Problem bildet weiters den Gegenstand der Abhandlungen von Prof. Lazarski im X. Bande der Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Krakau (Jahrg. 1882), ferner von Fr. Ruth in Leoben (Wiener Sitzungsber. 1887 und 1890), von F. Hopfner, Prof. in Prag (Zeitschrift für das Realschulwesen, XV. Jahrg., Wien 1890), Prof. K. Pelz in Graz (Ibid. XVI. Jahrg., Wien 1891), Th. Schmid, Realschullehrer in Steyr (Ibid. XVII. Jahrg. 1892), E. Janisch, Assistent am Polytechnicum in Wien (Ibid. XVII. Jahrg. 1892). Von den in den Jahresberichten veröffentlichten Abhandlungen erwähnen wir noch jene „Über die Construction der Axen einer durch fünf Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnittslinie", welche W. von Miorini im Jahresberichte der Staats-Realschule in Bielitz im Jahre 1887 veröffentlicht hat, und die elegante, ganz auf projectiver Grundlage ruhende Lösung „Neue Axenconstructionen eines durch fünf beliebige Bedingungen gegebenen Kegelschnittes nach projectivischer Methode", mit welcher Herr Wilhelm Binder, Professor an der n.-ö. Landes-Oberrealschule und höheren Fachschule für Maschinenwesen in Wiener-Neustadt, im Jahresberichte 1891—92 dieser Anstalt seine Fachcollegen auf das angenehmste überrascht hat.

Ein für die constructive Theorie der Curven und Flächen ebenso wichtiges Problem ist das zuerst von F. Joachimsthal, Professor der Universität zu Halle, dann zu Breslau, im Jahre 1843 angeregte Normalenproblem [1]) Die erste diesbezügliche Abhandlung veröffentlichte in

[1]) S. J. Joachimthal, Über die Normalen der Ellipse und des Ellipsoides. Crelles Journal, Bd. XXVI, S. 172, Berlin 1843, und „Sur la construction des normales qu'on peut abaisser d'un point donné sur une section conique complètement décrite. Ibid. Bd. XLVIII, S. 377. Berlin 1854.

Österreich Docent Emil Weyr, damals in Mailand, unter dem Titel „Über Normalen an Curven zweiter Ordnung" in XVI. Jahrgang, S. 440—445 der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig 1871. Ihre Begründung ist analytisch durchgeführt und stützt sich auf höhere Involutionen. Im Jahre 1873 dehnte Dr. Emil Weyr in den Prager Sitzungsberichten (S. 344) das „Problem der Normalen auf Raumcurven" aus und veröffentlichte in den Wiener Sitzungsberichten (Bd. LXXIV, S. 277—280, Jahrg. 1876) die beiden Abhandlungen „Über Normalen rationaler Raumcurven" und „Über die Anzahl der Doppelnormalen einer rationalen Raumcurve." Die Abhandlung „Über das Normalenproblem für die Parabel" vom Universitäts-Professor Karl Zahradnik in Agram erschien in den Sitzungsberichten vom Jahre 1879 (S. 98—109) und jene „Über Reflexe von Punkten auf Kreisen, oder die Umkehrung des Normalproblems" vom Realschullehrer F. Röllner in Znaim im LXXXII. Bande, (S. 1129—1139) der Wiener Sitzungsberichte vom Jahre 1880. In denselben Sitzungsberichten finden wir auch die Abhandlungen „Über die Normalen der Ellipse" (Bd. LXXXIII, S. 92—95, Jahrg. 1881) von Karl Lauermann, ferner „Zum Normalenproblem der Kegelschnitte" (Bd. LXXXV, S. 169—174, Jahrg. 1882) und „Zum Normalenproblem der Ellipse" (Bd. XCV, S. 481, Jahrg. 1887) „Zum Normalenproblem der Kegelschnitte" (Bd. XCVIII, S. 1519—1526, Jahrg. 1889) von Prof. Karl Pelz in Graz. Mit dem Normalenproblem der Kegelschnitte und damit verwandten Problemen beschäftigten sich noch M. Pelišek in den Prager Sitzungsberichten vom Jahre 1883 (S. 126), dann K. Lauermann im XXX. Jahrg. der Zeitschrift für Math. und Phys. (S. 52—57, Leipzig 1885) und im XCVIII. Bd. (S. 318) der Wiener Sitzungsberichte vom Jahre 1889; ferner Herr P. H. Schoute, Professor der Universität in Groningen, in demselben Bde. (XCVIII, S. 1519) der Wiener Sitzungsberichte, welcher auch die Abhandlung „Zum Normalenproblem der Kegelschnitte" von Herrn F. Mertens, Universitäts-Professor in Graz, enthält. Wir erwähnen noch die schöne Abhandlung „Über ein Paar unicursaler Degenerierungscurven dritter Ordnung des Normalenproblems und das Normalenproblem einer confocalen Kegelschnittschar" (Bd. CI, S. 1248—1268, Jahrg. 1892) von Prof. J. Tesař und die bereits erwähnte Abhandlung „Zur Joachimsthalschen Lösung des Normalenproblems" (Prager Sitzungsberichte, S. 1—4, Jahrg. 1895) von Herrn Professor Karl Pelz in Graz.

Mehrfaches Interesse fand auch die mit dem Normalenproblem und den Evoluten der Kegelschnitte eng zusammenhängende Theorie der Krümmung der Kegelschnitte. Schon im Jahre 1846 hatte Steiner im XXX. Bande (S. 271) des Crelleschen Journals eine interessante

Eigenschaft der Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte veröffentlicht und eine hieraus sich ergebende einfache Construction des Krümmungshalbmessers abgeleitet. (Gesam. Werke, Bd. II, S. 341 — 342, Berlin 1882).[1] Eine auf die Krümmungskreise der Kegelschnitte bezügliche Abhandlung veröffentlichte Dr. E. Weyr im II. Jahrg. (1873) der Prager Zeitschrift zur Förderung der Math. u. Phys. „Die Krümmungshalbmesser-Constructionen der Kegelschnitte als Corollarien eines Steinerschen Satzes" bilden den Gegenstand der von Herrn Prof. K. Pelz in Graz in den Prager Sitzungsberichten vom Jahre 1879 (S. 205—246) und jener vom Jahre 1882 (S. 3—11) veröffentlichten Abhandlungen. Mit den Krümmungsmittelpunkten und Krümmungsradien beschäftigten sich ferner Prof. F. Machovec in den Prager Sitzungsberichten vom Jahre 1884 (S. 345), F. Vályi in Grunerts Archiv der Math. und Phys. (Jahrg. 1884), C. Schirek (Ibid. 1886), F. Schiffner (Ibid. 1886), etc. Prof. Schiffner benützte auch Krümmungskreise zur Construction der Ellipse. (Archiv der Math. und Phys., II. R., 4. Th., S. 331, Leipzig 1886). Die Osculationstripel am Kegelschnitt untersuchte Universitäts-Professor K. Zahradnik in Agram im LXIX. Bande (Jahrg. 1884) desselben Archivs.

Aber auch die imaginären Elemente, deren geometrische Existenz von Staudt in seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage (Nürnberg 1856 und 1857) nachgewiesen hatte und deren Darstellung und Erweiterung wir besonders den deutschen Gelehrten J. Lüroth[2]) in Karlsruhe (später in München), R. Sturm[3]) in Münster, E. Schröder[4]) in Darmstadt und F. Klein[5]) in Göttingen verdanken, blieben — ein größeres modernes Werk ausgenommen — nicht unberücksichtigt.

Schon in seine am Prager Polytechnicum seit dem Jahre 1867 abgehaltenen Vorlesungen über „Geometrie der Lage" hatte Herr Professor Karl Küpper die Constructionen von Kegelschnitten aus imaginären Bestimmungsstücken aufgenommen.[6]) Im Jahre 1869 theilte Herr Dr. H. Durège, Professor am Polytechnicum in Prag, in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften

[1]) S. a.: J. Steiners, Vorlesungen über synthetische Geometrie. II. Theil, 2. Aufl. S. 211. — [2]) S. a.: J. Lüroth, Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Darstellung und Erweiterung der von Staudtschen Theorie Math. Annalen Band VIII, S. 145, Leipzig 1875 und Band XI. S. 84 Leipzig 1877, Göttinger Nachrichten, Jahrg. 1873, S. 767. — [3]) R. Sturm, Über die von Staudtschen Würfe. Math. Annalen. Bd. IX, S. 333. Leipzig 1876. — [4]) E. Schröder. Über die von Staudts Rechnung mit Würfen. Ibid Bd. X. S. 289. Leipzig 1876. — [5]) S. a.: F. Klein, Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie. Ibid. Bd. XXII, S. 242. Leipzig 1884. — [6]) S.: K. Bobek, Einleitung in die projectivische Geometrie, S. 67, Leipzig 1889 und W. Wolf, Elemente der projectivischen Geometrie Halle a. d. Saale 1889. — F. August (Programm, Berlin 1872).

(S. 55—58) und im XIV. Bande (S. 368) der Zeitschrift für Mathematik und Physik in Leipzig eine „Leichte Construction der Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Punkte gehen“ mit, und schon im folgenden Jahre veröffentlichte Herr Rudolf Staudigl, Adjunct der Lehrkanzel für darstellende Geometrie und Docent für neuere Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien, im LXI. Bande S. 607--620, Jahrg. 1870 der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften die „Construction eines Kegelschnittes, wenn derselbe durch imaginäre Punkte und Tangenten bestimmt wird.“ Im Jahre 1871 erschien im IV. Bande der Math. Annalen (S. 416) die bereits erwähnte Abhandlung „Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie“ von Dr. O. Stolz, Professor an der Universität in Innsbruck, welche Abhandlung Herr Prof. W. Fiedler in der zweiten Auflage seines Werkes (Leipzig 1875) mit den bereits erwähnten Forschungen von August u. Lüroth bei den Untersuchungen in der Geometrie der Lage nicht unberücksichtigt ließ. Die wissenschaftliche Bedeutung der imaginären Bestimmungsstücke frühzeitig erkennend, dehnte auch mein geschätzter Freund, Herr Professor Josef Tesař, in seiner wertvollen Abhandlung „Synthetische Untersuchung der gemischten Kegelschnittschar S(3 l, 1 p) mit einem imaginären Tangentenpaar“ (Wiener Sitzungsber. Bd. LXXXIV, S. 194—227, Jahrg. 1881) seine auch im Auslande bestens gewürdigten Forschungen auf die von Staudtsche Geometrie der imaginären Elemente aus. Mehrere treffliche Abhandlungen brachte auch die durch die Wiener Universitäts-Professoren Dr. Emil Weyr und Dr. Gustav von Escherich im Jahre 1890 gegründete Zeitschrift „Monatshefte für Mathematik und Physik.“ Es sind dies die Abhandlungen „Lineale Construction von Kegelschnitten aus theilweise imaginären Elementen“ (I. Jahrg., S. 237—246, Wien 1890) von F. Spath in Triest, „Beitrag zur Construction der Kegelschnitte aus imaginären Elementen“ (III. Jahrg., S. 81—86, Wien 1892) von F. Ruth, Professor an der k. k. techn. Hochschule in Wien, „Zur linealen Construction von Kegelschnitten aus theilweise imaginären Elementen“ (IV. Jahrg., S. 95—97, 1893) von Prof. F. Machovec (gest. 1892) in Karolinenthal; ferner „Über die Entfernung einer Unstetigkeit in der Geometrie“ (IV. Jahrg., S. 173—176, 1893) von Prof. Wilhelm Rulf in Wien, der die Durchdringungscurve der Kugel mit dem Kreiscylinder untersuchte, sowie eine diesbezügliche interessante „Bemerkung“ (IV. Jahrg., S. 376—378) von Prof. Heinrich Drasch in Linz, und die Abhandlung „Über das Kreisbüschel mit imaginären Scheiteln“ (V. Jahrg., S. 104—108, Wien 1894) von Prof. Karl Schober in Innsbruck. Die Construction von Kegelschnittslinien aus imaginären Elementen auf Grund neuer Sätze der Polarentheorie" bildet auch den Inhalt eines von Prof. K. Schober im Jahresberichte der Staats-Oberrealschule in Innsbruck im Jahre 1892 veröffentlichten Programmaufsatzes. In der in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1882 veröffentlichten Abhandlung „Über Constructionen von Flächen zweiter Ordnung aus imaginären Bestimmungsstücken" (S. 65—75) hatte Herr Karl Bobek, Assistent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag, das diesbezügliche Steinersche Problem über die Construction der Flächen zweiten Grades (Ges. Werke, II. Bd., S. 717—720, Berlin 1882) auf die Geometrie imaginärer Raumgebilde ausgedehnt. Diese Abhandlung enthält auch die lineare Construction des 8. Schnittpunktes von zwei Flächen zweiter Ordnung, welche 7 Punkte — darunter 6 imaginäre — gemeinschaftlich haben, sowie die Construction einer Curve dritter Ordnung aus sechs imaginären Punkten derselben.[1]) Welche hervorragende Stellung der Geh. Hofrath, Herr Dr. Chr. Wiener der Geometrie des Imaginären und der von ihm begründeten Imaginärprojection in seinem Meisterwerke eingeräumt hat, haben wir bereits an anderer Stelle betont. Ebenso fanden die constructiv verwertbaren imaginären Elemente (S. 229), die Construction von Kegelschnitten aus theilweise imaginären Elementen (S. 230—234) in dem I. Bande, sowie die Construction der Fläche zweiten Grades aus neun beliebigen Punkten im II. Bande (S. 186) des auf modernen Grundlagen ruhenden Werkes „Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Leipzig 1893 u. 1896" der beiden Hochschulprofessoren Dr. Karl Rohn und Dr. Erwin Papperitz in Dresden eine erwünschte Berücksichtigung.

Die symmetrischen Beziehungen, harmonischen und involutorischen Eigenschaften der vollständigen Vierecke und Vielecke, bez. Vielseite bildeten den Gegenstand der Untersuchungen von Emil Weyr (Lombardo Rendiconti, Milano 1873), S. Kantor (Wiener Berichte 1878, 1879. etc.), G. Kohn (Wiener Ber. 1879, 1883 etc. u. Monatshefte 1891), M. N. Vaneček (Prager Ber. 1881), F. Krieg von Hochfelden (Wiener Ber. 1888), O. Stolz (Wiener Monatshefte 1894), etc..

Mit dem Dreikant beschäftigten sich Dr. W. Fiedler (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1863), die Professoren K. Moshammer (Progr. Graz

---

[1]) Anmerkung: Eine gleiche Construction des 8. Schnittpunktes zweier Flächen zweiter Ordnung aus den 7 gegebenen reellen Punkten theilte Herr H. Müller im I. Bande der Math. Annalen mit, und eine Construction der Fläche zweiten Grades aus einem reellen und acht imaginären Punkten veröffentlichte Dr. C. Hossfeld im XXXIII. Bande S. 187, Jahrg. 1888 der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

1874), J. Weber, (Progr. Tauss 1876), Cl. Barchanek (Zeitschr. f. d. Realschulwesen VIII. Jahrg., Wien 1883), F. Haluschka (Progr. Währing 1889), etc. Schon im Jahre 1847 hatte Herr Simon Spitzer, Assistent und Privatdocent am k. k. polytechnischen Institute in Wien, in der Abhandlung „Über die Identität der Pyramidal- und prismatischen Schnitte mit den Verwandtschaften der Collineation und Affinität" (Grunerts Archiv IX. Theil, S. 345—352) die Forschungen der Geometrie der Lage berücksichtigt. Mit den Polyedern und Krystallgestalten beschäftigten sich eingehend Mohs (Lehrbuch der Mineralogie, Wien 1822—36), sein genialer Schüler W. Haidinger (Wiener Ber. 1854—55), der Assistent Rudolf Niemtschik am Wiener Polytechnicum (Wiener Ber. 1859—60), Prof. W. Fiedler (Schlömilchs Zeitschrift 1861), Prof. R. Niemtschik (Realschulzeitschrift 1877), ferner F. Lippich (Wiener Ber. 1881), A. Puchta (Ibid. 1832), M. Feil („Über Eulersche Polyeder, Wiener Ber. 1886). Die Polyeder bilden auch den Gegenstand der Programmaufsätze der Professoren E. Bartl (Prag 1879), E. Lindenthal („Untersuchungen am Pentagon-Dodekaeder und Ikosaeder, Triest 1882), M. Urysz (Stanislau 1886), F. Hopfner (Prag 1889), etc. Eine gründliche descriptive Behandlung des Dreikantes, der Polyeder, ihrer ebenen und gegenseitigen Schnitte (Durchdringungen) enthält der I. Band (S. 496—568) von Herrn Regierungsrath Dr. Gustav Ad. V. Peschkas Werk „Darstellende und projective Geometrie" (Wien 1883). Die halbregulären Sternpolyeder und die Beziehungen zwischen den halbregulären (Archimedischen) und den ihnen polarzugeordneten Polyedern untersuchte Johann Pitsch in Wien im VI. Jahrg. (1881) der Zeitschrift für das Realschulwesen.

Wir erwähnen schon hier die interessanten Untersuchungen „Über Körper von vier Dimensionen" (Wiener Ber. 1881) von Professor H. Durège, und „Über die regelmäßigen Körper höherer Dimensionen" (Wiener Ber. 1884) von Prof. Otto Biermann, sowie jene „Über die regelmäßigen convexen Körper im Raume von vier oder beliebigen Dimensionen" (Ibid. 1884) vom Universitäts-Professor A. Puchta.

Mit dem wissenschaftlichen Ausbau der analytischen und synthetischen Kegelschnitt-Lehre vollzog sich auch die mit ihr auf das engste zusammenhängende Theorie Flächen zweiter Ordnung. Eine übersichtliche Darstellung der für diese Theorie wichtigen homogenen Coordinatensysteme gab Prof. J. K. Maška in den Jahresberichten 1877 und 1878 der L.-Oberrealschule in Znaim. Die Theorie, Geschichte der elliptischen Coordinaten und ihre Anwendung zu Transformationen in der höheren Geometrie bilden den Gegenstand einer vom Verfasser dieses historischen Werkes im Jahre 1892 veröffentlichten Abhandlung.

Die dreiseitige Pyramide und ihre Berührungskugeln untersuchte Herr Fr. Unferdinger, zuletzt Prof. an der k. k. tech. Hochschule in Brünn, im XXVIII. Theil von Grunerts Archiv (Jahrg. 1857).

Die Kugeln, welche die Kanten eines beliebigen Tetraeders berühren, bestimmte und untersuchte J. H. G. Müller im XX. Bd. der Wiener Sitzungsberichte vom Jahre 1856.

Die analytische Behandlung der Oberflächen zweiten Grades, insbesondere über homofocale und conjugierte Oberflächen zweiten Grades, bildet den Gegenstand einer größeren von Herrn Prof. W. Fiedler im Jahre 1862 im VIII. Jahrg. (S. 25, 217 und 285) der Schlömilchschen Zeitschrift veröffentlichten Abhandlung. Mit der synthetischen Behandlung der Berührungsaufgabe für die Kugel beschäftigte sich Herr Universitäts-Professor J. Frischauf in Graz im LII. Bd. der Wiener Sitzungsberichte vom Jahre 1865, während Emil Koutny, Assistent an der tech. Lehranstalt in Brünn im Jahrg. 1866 der Zeitschrift des östereichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines in Wien, seine „Kugel-Perspective" veröffentlichte. Ein Jahr später erschien im XII. Jahrg. (1867) der Schlömilchschen Zeitschrift die Reliefperspective der Kugel von R. Morstadt, Assistenten am technischen Institut in Prag. Das dreiachsige Ellipsoid als Deformation der Kugel fasste Herr Prof. G. Blažek in den Prager Sitzungsberichten vom Jahre 1869 auf Eine sehr eingehende Behandlung erhielten die Kugelfläche, das Kugelgebüsch und das Kugelbündel mit dem Kugelbüschel, sowie die Theorie der Kugelberührung mit Einschluss der Dupinschen Cyklide im III. Bde. (S. 192—310) des großen Werkes „Darstellende und projective Geometrie" (Wien 1884) von Herrn Regierungsrath Peschka. „Die Berührung und den Winkelschnitt von Kreisen und Kugeln" wählte Herr J. Morawetz zum Gegenstande seiner neugeometrischen Untersuchungen, die er im Programm der Staats-Oberrealschule im II. Bezirke Wiens für das Schuljahr 1892 veröffentlichte. Ausgezeichnet ist der Beitrag „Zur synthetischen Theorie der Kreis- und Kugel-Systeme," den Herr Otto Rupp, Professor an der k. k. tech. Hochschule in Brünn, im CIV. Bde. (S. 623—651) der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien für das Jahr 1895 veröffentlichte. Eine ausführliche Behandlung erfuhren die Cylinder- und Kegelflächen (S. 312—369) in Prof. J. Hönigs „Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie, Wien 1845." Das Hyperboloid von einem Netze und das hyperbolische Paraboloid, sowie ihre Darstellung und Constructionsaufgaben finden wir unter den windschiefen Flächen (S. 381). Die Flächen zweiter Ordnung selbst, ihre Entstehung und Darstellung bilden hier noch einen kurzen Abschnitt (S. 446—452) der Lehre von den krummen Flächen.

Die „Perspectivische Darstellung der ebenen Schnitte von Kegel- und Cylinderflächen“ veröffentlichte Assistent Emil Koutny im XII. Jahrg. (1867) der Schlömilchschen Zeitschrift, während Adjunct Rudolf Staudigl die „Durchführung verschiedener, die Curven zweiten Grades betreffender Constructionen mit Hilfe von Kegel- und Cylinderflächen“ im LVIII. Bande der Wiener Sitzungsberichte vom Jahre 1868 mittheilte. „Allgemeine Methoden zur Darstellung der Durchschnitte von Ebenen mit Kegel- und Cylinderflächen“ bilden den Gegenstand der von Prof. R. Niemtschik im LXIII. Bande der Wiener Sitzungsberichte (1871) veröffentlichten Abhandlung. Mit der Axenbestimmung von Kegelflächen beschäftigte sich Herr Realschulprofessor K. Pelz in Graz in den Wiener Sitzungsberichten vom Jahre 1885 (Bd. XCII). Die Schattenconstruction der Kegel- und Cylinderflächen in centraler Projection finden wir in dem Werke „Freie Perspective“ von Peschka-Koutny, hingegen jene in schiefer Parallelprojection in Staudigls „Parallelperspective,“ sowie in der schon früher erwähnten Abhandlung von Prof. Pelz in den Wiener Sitzungsberichten vom Jahre 1884. Die constructive Behandlung der Kegel- und Cylinderflächen nach neueren Methoden gab Herr Professor W. Fiedler im II. Theil seines Werkes „Darstellende Geometrie“ (S. 204—236, etc.) und Herr Regierungsrath, Prof. Peschka im II. Bande (S. 475—528) seines großen Werkes „Darstellende und projective Geometrie“ (Wien 1884).

Von den zahlreichen Programmaufsätzen über Flächen zweiter Ordnung verdient die für den Lehrgang in der Mittelschule wichtige „Projective Behandlung der Strahlenflächen, Görz 1879“ von Prof. Cl. Barchanek eine besondere Erwähnung. Wir erwähnen noch die Abhandlung „Über die Construction der Achsen einer Kegelfläche zweiten Grades“ (Prager Sitzungsberichte 1885) von Prof. J. Šolin und die „Bemerkung zur Axenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades“ (Wiener Sitzungsberichte 1885) von Prof. K. Pelz in Graz.

Ein interessantes Capitel geometrischer Forschung war die Bestimmung der perspectivischen Contouren von Rotationsflächen, welche sich fast bis zum Jahre 1870 auf die Benützung der Centralprojectionen einer Reihe von Parallelkreisen oder auch von anderen Linien der bezüglichen Fläche und die Construction ihrer gemeinschaftlichen Berührenden, der fraglichen Bildcontour der Rotationsfläche, beschränkte. Directe Constructionen einzelner Punkte dieser perspectivischen Contouren von Rotationsflächen hatte Prof. G. Schreiber in seinem „Geometrischen Port-Folio, Karlsruhe 1843 nur für den besonderen Fall durchgeführt, wenn die Rotationsachse in der Bildebene liegt. In den allgemeinen Fällen bediente sich dieser hervorragende Geometer Deutschlands der perspectivischen Projectionen der Parallelkreise oder der alten Durchschnittsmethode. Andere directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächen waren noch vor sechsunddreißig Jahren unbekannt.

Die ersten directen Constructionen der perspectivischen Contouren von allgemeinen Rotationsflächen gab der damalige Assistent der Lehrkanzel der darstellenden Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien, Herr Rudolf Niemtschik, in seiner im Jahre 1860 aus Anlass der Concursprüfung am Grazer Joanneum verfassten Abhandlung: „Directe Construction der perspectivischen Contouren von allgemeinen Rotationsflächen." Diese wissenschaftlich wertvolle Abhandlung, in welcher von der bis zu diesem Zeitpunkte (1860) üblichen Verwendung der perspectivischen Projectionen von Parallelkreisen kein Gebrauch gemacht wurde, brachte auch dem Verfasser die Berufung als Professor der darstellenden Geometrie und Stereotomie, des constructiven und technischen Zeichnens an das landsch. technische Institut „Joanneum" in Graz.

Einen weiteren theoretischen Ausbau erhielt das in Rede stehende Problem in den folgenden, in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Abhandlungen: „Directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächen in orthogonalen und perspectivischen Darstellungen" (LII. Bd. 1865) und „Studien über Flächen, deren zu einer Achse senkrechte Schnitte ähnliche Ellipsen sind" (LVII. Bd. 1868) von Prof. Rud. Niemtschik in Graz; „Anwendung der räumlichen Central- und Parallelprojection zur Lösung verschiedener die Flächen zweiter Ordnung betreffenden Probleme" (LVIII. Bd. 1868) von Rudolf Staudigl, Adjunct am k. k. polyt. Institute in Wien; „Neue Construction der Perspectiv-Contouren für Oberflächen zweiter Ordnung" (LXXI. Bd. 1875) von Karl Zipernovsky, „Über die Construction der Umhüllungsflächen variabler Kugeln" (LXXXIII. Bd. 1876) von Prof. R. Niemtschik in Wien; ferner „Über eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades" (LXXV. Bd. 1877) und diesbezügliche „Ergänzungen" (LXXVII. Bd. 1878) vom Privatdocenten Karl Pelz in Graz; „Achsenbestimmung der Contouren von Flächen zweiter Ordnung" (LXXXVII. Bd. 1883) von Prof. H. Drasch in Linz.

Hieher gehören auch die Abhandlungen „Directe Construction der Contouren derjenigen Systeme von windschiefen Hyperboloiden, welche durch ein Bild eines ebenen Schnittes und durch je ein Bild dreier Erzeugenden festgestellt sind" (Zeitschrift f. d. Realschulwesen VI. Jahrg. Wien 1881) von Prof. Ed. Wiskoczil in Iglau, „Constructionen über

Flächen zweiten Grades in allgemeiner Parallelprojection" (Progr. Wien, Josefst. 1882) und „Perspectivische Darstellung der Flächen zweiter Ordnung" (Zeitschrift d. Vereines österr. Zeichenlehrer in Wien, Jahrg. 1883) von Prof. J. Bazala, und endlich „Zur klinogalen Darstellung der Rotationsflächen" in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, Jahrg. 1895, von Herrn Prof. Karl Pelz in Graz. Die directe Achsenbestimmung der klinogalen Projection der Kugel hatte Herr Prof. Pelz schon in den Wiener Situngsberichten (Jahrg. 1884), sowie in den Prager Sitzungsberichten (Jahrg. 1885) gezeigt. Von besonderem wissenschaftlichen Werte sind die bereits erwähnten Abhandlungen „Kinematische Bestimmung der Contour einer windschiefen Schraubenfläche" (Wiener Ber. 1882) von Prof. J. Tesař, „Zur Contourbestimmung windschiefer Schraubenflächen" (Wiener Ber. 1883) von Prof. K. Pelz und „Die Contourevolute axialer Schraubenflächen" (Wiener Ber. 1886) von dem erstgenannten Forscher.

Besonders interessant sind in der constructiven Theorie der Flächen zweiter Ordnung die Untersuchungen über Hyperboloide und Paraboloide.

Mit der gleichseitigen Hyperbel und ihrer analogen Fläche zweiten Grades beschäftigte sich Herr Prof. K. Küpper schon im Jahre 1858 im III. Jahrg. der Zeitschrift für Mathematik und Physik. „Einfache Constructionen windschiefer Hyperboloide und Paraboloide mit ihren ebenen Schnitten und Selbstschatten" theilte Herr R. Niemtschik, Professor am Joanneum in Graz, im LXI. Bande (Jahrg. 1870) die Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien mit. „Über eine besondere Erzeugungsweise des orthogonalen Hyperboloides und über Büschel orthogonaler Kegel und Hyperboloide" machte Herr Franz Ruth (Leoben) in den Wiener Sitzungsberichten vom Jahre 1879 Mittheilung. Die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Flächen zweiten Grades, mit welchen sich Herr Prof. Dr. O. Schlömilch im VI. Jahrg. seiner Zeitschrift für Mathematik und Physik beschäftigt hatte, waren Gegenstand der Untersuchungen von Herrn Privatdocenten Otto Rupp in den Wiener Sitzungsberichten vom Jahre 1882 (Bd. LXXXVI), und von Karl Schober, Professor in Innsbruck, im VII. Jahrg. der Monatshefte für Mathematik und Physik (Wien 1896).

Die Strictionslinie des Hyperboloides als rationelle Curve vierter Ordnung betrachtete A. Migotti in den Wiener Sitzungsberichten vom Jahre 1879. Die Strictionslinie des Hyperboloides als Erzeugnis mehrdeutiger Gebilde untersuchte Theodor Schmid, jetzt Professor in Linz, in denselben Berichten vom Jahre 1881, und hübsche Untersuchungen „Über Strictionslinien der Regelflächen zweiten und dritten Grades" bilden auch den Gegenstand der von Aug. Adler in den

Wiener Sitzungsberichten vom Jahre 1882 veröffentlichten Abhandlung. Diese Berichte enthalten im Jahrg. 1887 auch eine interessante Mittheilung „Über eine Strahlencongruenz beim Hyperboloid" von Herrn Emil Waelsch, Assistenten an der techn. Hochschule in Prag, jetzt Professor an der tech. Hochschule in Brünn. „Den Ort der Achsen jener gleichseitigen hyperbolischen Paraboloide, welche zwei gegebene windschiefe Gerade enthalten" bestimmte Franz Wilhelm in Pilsen im II. Jahrg. der Monatshefte für Mathematik u. Physik, Wien 1891 und die „Symmetrieverhältnisse des hyperbolischen Paraboloides" bilden den Gegenstand einer von Ed. Janisch in Wien in dem XX. Jahrg. der Zeitschrift für das Realschulwesen in Wien im Jahre 1895 veröffentlichten Abhandlung. Mit den Durchdringungscurven zweier Rotationsflächen zweiter Ordnung beschäftigten sich u. A. V. Jarolimek, Prof. in Prag, im IX. Jahrg. (1884) der Zeitschrift für das Realschulwesen u. R. Schüssler in Graz im V. Jahrg. der Monatshefte für Math. und Physik, Wien 1894. Wertvolle Beiträge zur „Construction der Schmiegungs- oder Osculationalebenen der Durchdringungscurven zweier Flächen zweiter Ordnung" lieferten die Herren Prof. H. Drasch in den Wiener Sitzungsberichten vom Jahre 1880 u. Prof. Franz Machovec in den Prager Sitzungsberichten vom Jahre 1889. Die letztgenannten Berichte enthalten im Jahrg. 1893 auch einen schönen „Beitrag zur Construction von umgeschriebenen Developpablen an Flächen zweiten Grades und an Rotationsflächen" von J. Sobotka. Auch das mit der Krümmungstheorie der Flächen eng zusammenhängende Normalenproblem fand ausgezeichnete Schriftsteller. Schon in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften vom J. 1868 veröffentlichte R. Niemtschik, Professor am Joanneum in Graz ein „Einfaches Verfahren, Normalen zu Flächen zweiter Ordnung durch außerhalb liegende Punkte zu ziehen" (Bd. LVIII, S. 831—836) und wertvolle Beiträge zur Theorie der Normalflächen verdanken wir den Herren Hochschulprofessoren Josef Šolin in Prag „Normalfläche zum dreiaxigen Ellipsoide", Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, VI. Folge, II. Bd., Jahrg. 1868; Emil Koutny in Graz, „Die Normalflächen der Flächen zweiter Ordnung längs ebener Schnitte derselben", Wiener Sitzungsberichte LXXV. Bd., Jahrg. 1877; Regierungsrath Dr. G. A. Peschka in Brünn, „Normalflächen längs ebener Flächenschnitte" und „Beitrag zur Theorie der Normalflächen", Wiener Sitzungsber. LXXXI. Bd., Jahrg. 1880, „Normalfläche einer Developpablen längs ihres Durchschnittes mit einer krummen Fläche", ebenda LXXXIII. Bd. 1881 und „Neue Eigenschaften der Normalflächen für Flächen zweiten Grades längs ebener Schnitte", LXXXV. Bd., Jahrg. 1882. Wir erwähnen noch die Abhandlung „Über die Normalflächen zu den Rückungsflächen vierter Ordnung längs ihrer Schnitte mit Bitangentialebenen" (Prager Ber. 1889) von Prof. A. Sucharda in Prag.

Mit der „Projection der Krümmungslinien des Ellipsoides" beschäftigte sich Herr Professor Karl Küpper schon im Jahre 1857 im II. Jahrg. der Schlömilchschen Zeitschrift. „Die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades und confocale Systeme solcher Flächen" bilden den Gegenstand der schönen von Emil Weyr, ord. Hörer am Polytechnicum zu Prag, im LVIII. Bande (Jahrg. 1868), S. 60—83), der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien veröffentlichten Abhandlung, welcher im Jahre 1870 jene „Über die Krümmungslinien windschiefer Flächen" in den Prager Sitzungsberichten und „Die Construction der Hauptkrümmungshalbmesser und der Hauptkrümmungsrichtungen bei beliebigen Flächen" im III. Bande (S. 228—235) der Mathematischen Annalen (Leipzig 1871) folgten. Wir erwähnen noch die gediegenen Abhandlungen „Über das Normalensystem und die Centralfläche der Flächen zweiter Ordnung" (Wiener Sitzungsberichte 1887) und die „Beiträge zur Flächentheorie", betreffend den Polnormalencomplex und Fußflächen, die Centrafläche und die Normalencongruenz, etc. (Ibid. 1888) von Herrn Emil Waelsch, Assistent am deutschen Polytechnicum in Prag. Eine überaus sorgfältige Behandlung fand die Theorie der Flächen zweiter Ordnung, für welche im Jahre 1845 im Prof. Joh. Hönigs Leitfaden der darst. Geometrie noch sechzehn Seiten (S. 446—452) genügten, in dem dritten, 791 Seiten umfassenden Bande von Prof. Peschkas großem Werke „Darstellende und projective Geometrie, Wien 1884." Nur ungern vermissen wir aber in diesem, besonders von den Mittelschullehrern so geschätzten modernen Werke die „Construction der Fläche zweiten Grades aus neun beliebigen Punkten".[1]) Die umfangreiche Theorie der Flächen zweiter Ordnung schließt in Prof. Peschkas Werk mit dem „Gegenseitigen Schnitt der Flächen zweiten Grades" (S. 746) und mit der gemeinsam umschriebenen Developpablen, welcher Scharen von Flächen und confocale Flächen zweiten Grades (S. 769) folgen. Wir erwähnen noch die „Construction der Osculationshyperboloide windschiefer Flächen" (Wiener Ber. 1881) von Prof. Ed. Weyr, ferner jene von Prof. Josef Šolín (Prager Ber. 1883) und J. Sobotka (Ibid. 1893). Die Rotationsflächen waren Gegenstand der Untersuchungen von Prof. F. Matzek (Berührungs-

---

[1]) Vergl.: Dr. Wilhelm Fiedler, Die darstellende Geometrie, II. Bd. S. 170. Leipzig 1885; Dr. Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geometrie, II. Bd. S. 321, Leipzig 1887 und Dr. K. Rohn und Dr. E. Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, II. Bd, S. 136. Leipzig 1896.

ebenen, Wiener Ber. 1868), Niemtschik (Construction des Durchschnittes zweier krummen Flächen unter Anwendung von Kugeln und Rotationsflächen, Wiener Ber. 1871), H. Drasch (Tangenten und Developpable der Rotationsflächen, Wiener Ber. 1878), Jos. Tesař, (Ibid. 1888), K. Pelz, (klinographische Darstellung, Prager Ber. 1895) etc. Mit den Schraubenflächen (Helikoiden) beschäftigten sich K. Mosbammer (Wiener Ber. 1865), F. Schiffner (Archiv der Math. u. Phys. 1884), M. Pelišek (Prager Ber. 1885), K. Küpper (Wiener Monatshefte 1890), Th. Schmid, (Wiener Ber. 1890), J. Sobotka (Wiener Ber., Monatshefte u. Prager Ber. 1893), etc. Die Singularitäten, Normalflächen und die Reciprocität der Rückungsflächen bilden den Gegenstand der von Prof. A. Sucharda in Tabor in den Wiener Sitzungsberichten (1888 u. 92), sowie in den Prager Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen. Über Centraflächen geben uns die schönen Abhandlungen von Herrn E. Waelsch in den Wiener Sitzungsberichten aus den Jahren 1887—89 Aufschluss.

Eine schöne Darstellung erhielt die Theorie der algebraischen Flächen in dem VI.—XVI. Cap., S. 170—389 des II. Bandes von Prof. Peschkas Werk „Darstellende und projective Geometrie“ (Wien 1884). Die wissenschaftliche Grundlage für diese Untersuchungen bilden die berühmten Forschungen in Cremonas „Theorie der Oberflächen,“ Reyes „Die algebraischen Flächen, ihre Durchdringungscurven, Schnittpunkte und projective Erzeugung“ (Math. Annalen, Bd. II) und Salmon-Fiedlers „Analytische Geometrie des Raumes.[1])

Eine sehr ausführliche, 387 Seiten umfassende und rein synthetische Behandlung erhielt auch die constructive Theorie der windschiefen Flächen höherer Ordnung, der Normalflächen, Rotationsflächen, Umhüllungsflächen und Schraubenflächen mit constructiv erläuternden Problemen in dem IV. Bande des Werkes „Darstellende und projective Geometrie“ (Wien 1885) von Herrn Regierungsrath Dr. Peschka, welches auch im Auslande von Gelehrten als vortreffliches Nachschlagebuch anerkannt wurde.

Geschätzte Beiträge zur Beleuchtungslehre und zur Schattenconstruction lieferten: Friedrich Kammerer über „Die Lichtintensitäts-Curven auf krummen Flächen“ (Wiener Ber. 1862), Assistent Emil Koutny, „Die Theorie der Beleuchtung krummer Flächen vom

---

[1]) Anmerkung: Statt des II. Bandes (S. 475—503, Jahrg. 1870) der Math. Annalen hat Herr Prof. Dr. Peschka in seinem Quellen- und Literatur-Verzeichnis, aber auch Herr Prof. Dr. C. Rodenberg in seiner Recension (Zeitschrift für Math. und Phys. XXX. Jahrg. S. 73.) den III. Bd. dieser Annalen angegeben.

zweiten Grade bei parallelen Lichtstrahlen" (Verhandl. des Naturf. Vereines, Brünn 1866) und „Construction der Intensitätslinien eines dreiachsigen Ellipsoides" (Grunerts Archiv 1866), Prof. R. Niemtschik, „Neue Constructionen der auf ebenen und krummen Flächen erscheinenden Reflexe und hierauf bezügliche Theoreme" (Wiener Ber. 1866), Assistent Emil Koutny, „Construction der Selbstschattengrenze von Rotationsflächen in der Perspective, unter Voraussetzung paralleler Lichtstrahlen" (Wiener Ber. 1867, Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines, Wien 1866 und Schlömilchs Zeitschrift, Jahrg. 1867); Prof. F. Matzek, „Construction der Curven bestimmter Beleuchtungs-Intensität an Rotationsflächen mit Benützung berührender Kugelflächen" (Wiener Ber. 1868), Professor Niemtschik, „Directe Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse senkrechte Schnitte ähnliche Ellipsen sind" (Wiener Ber. 1868); Prof. K. Pelz, „Zur Tangentenbestimmung der Selbstschattengrenzen von Rotationsflächen" (Wiener Ber. 1879), „Zur Construction der Selbstschattengrenzen von Flächen zweiten Grades unter Voraussetzung centraler Beleuchtung" (Prager Ber. 1879); Prof. J. Streissler, „Einfache Constructionen des Selbst- und Schlagschattens von Rotationsflächen zweiten Grades (Zeitschrift für das Realschulwesen VII. Jahrg. Wien 1882), Professor K. Schober, „Über die Construction der Halbschattengrenzen der Flächen zweiten Grades unter Voraussetzung von Kugelbeleuchtung" (Progr. Sechshaus bei Wien 1885); ferner von Prof. J. Bazala, „Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei orthogonaler und bei perspectivischer Darstellung" (Hoppes Archiv, Leipzig 1884), „Allgemeine Theorie der Isophoten-Tangenten und Construction derselben für Flächen zweiten Grades" (Ibid. 1887), „Beleuchtungs-Constructionen für windschiefe Schraubenflächen" (Progr. Bielitz 1892), „Neue Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, im allgemeinen und für Flächen zweiten Grades im besonderen" (Hoppes Archiv, 1892), „Beleuchtungs-Constructionen für windschiefe Flächen mit einer Richtebene" (Progr. Bielitz 1894) und Prof. F. Prochazka, „Ein Beitrag zur Schattenlehre, betreffend Schraubenflächen" (Hoppes Archiv 1885) und Prof. Th. Schmid, „Über die Beleuchtungscurven der windschiefen Helikoide" (Wiener Monatshefte 1891). Besonderes Interesse verdienen auch die schönen Untersuchungen „Über die Tangenten und Singularitäten des Isophoten-Systems auf Rotationsflächen" (Prager Ber. 1888) von Prof. J. Tesař und „Über die Isophoten einer Fläche bei centraler Beleuchtung" (Wiener Ber. 1892) vom Herrn Doc. Emil Waelsch.

Die bereits erwähnten Durchdringungscurven zweier Flächen zweiten Grades führen uns in die Theorie der Raumcurven und ebenen Curven vierter und dritter Ordnung. Die ersten Untersuchungen über Curven dritter und vierter Ordnung mit Hilfe der neueren Geometrie verdanken wir den Prager technischen Hochschulprofessoren Dr. Wilh. Fiedler, Karl Küpper und Dr. Heinrich Durège und seinem genialen Assistenten Emil Weyr, der dieses interessante und wissenschaftlich dankbare Gebiet der höheren Curventheorie seit dem Jahre 1868 zu seinem Lieblingsgebiete erwählte und es durch zahlreiche, überaus wertvolle und tiefsinnige Forschungen bereichert hat.[1]) Bekanntlich

[1]) Emil Weyr wurde am 1. October 1848 in Prag geboren. Nach Vollendung der Volksschule trat er im Schuljahre 1859–60 in die erste Classe der deutschen Staats-Oberrealschule in Prag, wo sein Vater Franz Weyr als Professor der Mathematik und Physik wirkte. Schon in den beiden obersten Classen (V. u. VI.) bot dem talentierten Schüler der Lehrstoff keine genügende geistige Befriedigung und er beschäftigte sich schon hier vielfach mit höherer Mathematik. Im Studienjahre 1865—66 trat Weyr als ord. Hörer in das polytechnische Institut in Prag ein und konnte nun sein Lieblingsfach, höhere Mathematik, nach Herzenslust studieren. Am Prager polytechnischen Institute wurde Emil Weyr mit seinem Freunde Karl Pelz von Prof. Dr. Wilhelm Fiedler in die neuere Geometrie eingeführt, derem Studium er bis an sein Lebensende seine Mußestunden widmete. Unter Professor Dr. Heinrich Durège (gest. 19. April 1893) studierte Weyr höhere Mathematik mit solchem Erfolge, dass er am 23. October 1868, zwanzig Jahre alt, zu seinem Assistenten ernannt wurde. Am 5. Mai 1869 wurde Emil Weyr an der Universität in Leipzig zum Doctor der Philosophie promoviert. Die an der Prager Universität angestrebte Docentur wurde ihm aber wegen mangelnder Gymnasial- und Universitäts-Studien wiederholt verweigert und erst über Anregung des Herrn Prof. E. Mach bewarb sich Weyr wieder um eine Privatdocentur an der Karl-Ferdinands-Universität und am 3. Mai 1870 habilitierte sich Weyr als Privatdocent für neuere Geometrie. Um sein hohes wissenschaftliches Streben zu befriedigen, hatte Docent Emil Weyr im Jahre 1870 die Absicht nach Paris zu gehen, um dort an der Faculté des sciences die berühmten Mathematiker Chasles, Bonnet, Bertrand und Serret zu hören. Doch der Ausbruch des deutsch-französischen Krieges verhinderte die Ausführung dieses Planes. Emil Weyr, der vom hohen Unterrichts-Ministerium ein Staats-Stipendium von 1000 fl. erhalten hatte, gieng nach Mailand, wo am Reale Istituto technico Luigi Cremona berühmte Vorlesungen über neuere und höhere Geometrie hielt. Im Frühjahr verliess Weyr, der sich die Sympathien des großen italienischen Geometers in hohem Grade erworben hatte, Mailand, besuchte die Universitäten Padua, Bologna, Pisa, Rom und Neapel und kehrte Ende Mai 1871 in die Heimat zurück. Als Herr F. J. Studnička, Professor der Mathematik am böhmischen Polytechnicum in Prag an die Universität berufen wurde, ernannnte der Landesausschuss Emil Weyr am 2. Jänner 1872 zum a. o. Professor der Mathematik. Im Jahre 1874 wurde Prof. Emil Weyr in Paris auch mit Chasles persönlich bekannt.

Mit Allerhöchster Entschließung vom 23. October 1875 wurde a. o. Prof. E. Weyr als ord. Professor der höheren Geometrie an die Wiener Universität berufen und wurde in demselben Jahre (1875) correspondierendes, 1882 wirkl. Mitglied der schloss dieser geniale Prager Techniker, der hervorragendste Vertreter der neueren Geometrie in Österreich, schon mit dem 46. Lebensjahre als k. k. Hofrath, wirkl. Mitglied der kais. Akademie der Wissenschaften und Professor der höheren Geometrie an der k. k. Universität in Wien seine ehrenvolle wissenschaftliche Laufbahn. Weyrs wertvolle Forschungen auf dem Gebiete der höheren Curven- und Flächentheorie werden uns mit den in den letzten dreißig Jahren von den darstellenden und neueren Geometern ausgeführten Arbeiten im zweiten Bande dieses mathematisch-historischen Werkes noch vielfach beschäftigen.

Die Erzeugung der Curven dritter Ordnung bildet den Gegenstand einer Abhandlung, welche Herr E. Weyr im LVIII. Bande, S. 633—644 der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften im Jahre 1868 veröffentlichte. Diese Abhandlung, welcher schon im folgenden Jahre die „Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse, Leipzig 1869" folgte, bildet eine fast ununterbrochene Kette von wertvollen Untersuchungen, welche Dr. Emil Weyr in den folgenden fünfundzwanzig Jahren auf dem Gebiete der höheren Curventheorie in den Zeitschriften des In- und Auslandes veröffentlicht hat. Sein ausgezeichneter Lehrer der Mathematik, Prof. Dr. H. Durège, veröffentlichte im Jahre 1869 in XIV. Jahrg. (S. 368—371) der Schlömilch schen Zeitschrift eine leichte Construction der Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurchgehen.

Die Curven dritter Ordnung, deren Theorie insbesondere Cayley, Hesse und Schröter so vollkommen begründet haben, waren Gegenstand der Untersuchungen von Emil Weyr (Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde, Leipzig 1869, Wiener Sitzungsberichte 1868—94, etc.), Durège „Die ebenen Curven dritter Ordnung", Leipzig 1871, Math. Ann. 1869, etc.), K. Küpper (Prager Vorlesungen 1867—96 u. Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft d. Wiss. 1871—96, Math. Ann. 1885, etc.), K. Pelz (Wiener Ber. 1871, etc.), B. Igel (Math. Ann. 1873), K. Zahradnik (Prager Ber. 1873, etc.), A. Ameseder (Wiener Ber. 1879, etc.), S. Kantor (Wiener Ber. 1881), H. Drasch (Wiener Ber. 1882, etc.), K. Bobek (Math. Ann. 1885, etc.), E. Czuber (Zeitsch. f. Math. und Phys. 1887), E. Waelsch (Wiener Ber. 1891, etc.), J. Tesař (Wiener Ber. 1892, W. Wirtinger, G. Kohn, W. Binder, u. A. Herr Prof. K. Pelz benützte Curven dritter Ordnung zur Lösung des Problems

kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Kurz vor seinem Tode erhielt er die Ernennung zum k. k. Hofrath. Akademiker Emil Weyr starb am 25. Jänner 1894 in Wien. Einer seiner besten Schüler, Adolf Ameseder, Professor der Mathem. am Polytechnicum in Graz, war ihm schon im Jahre 1891 in den Tod vorangegangen.

der Glanzpunkte (Wiener Ber. 1871) und bei seinen Untersuchungen „Über die Focalcurven des Quetelet" (Wiener Ber. 1880 u. 81).

Die schönen Sätze über die Steinerschen Polygone auf Curven dritter Ordnung, welche ihr genialer Entdecker der Berliner Akademie der Wissenschaften im Jahre 1845 mitgetheilt und im XXX. Bande S. 182—184 des Crelleschen Journales ohne Beweise veröffentlicht hatte (s. a. Ges. Werke, II. Bd., S. 371 373), waren Gegenstand der Untersuchungen von Prof. K. Küpper (Prag. Ber. 1883—84, Math. Annalen, Bd. XXIV, 1885), P. H. Schoute (Wiener Ber. 1887), Emil Weyr (Wiener Ber. 1892 u. 1894) und Prof. E. Czuber (Wiener Ber. 1894 und Journal f. Math., Bd. CXIV, Berlin 1895). Weyrs Methode der Untersuchung (Wiener Ber. Bd. CI) stützte sich allein auf die Rechnung mit Punkten und auf die Begriffe der höheren Involutionen auf Curven dritter Ordnung. Herr Em. Czuber, Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien, wendete in seiner Abhandlung „Die Steinerschen Polygone" (Journal für Math., Bd. CXIV, S. 312—332, Berlin 1895) Weyrs Methode mit schönem Erfolge auf die Steinerschen Schließungsprobleme an.

Ebenso fanden die Curven vierter Ordnung eine vielfache Untersuchung. Wir erwähnen die schönen Arbeiten von E. Weyr (Wiener Ber. 1871—94), H. Durège (Wiener Ber. 1875, etc.), K. Küpper (Prager Ber. u. Vorlesungen), A. Ameseder (Wiener Ber. 1879, etc.), Vaneček (Prager Ber. 1885), Wirtinger (Wiener Ber. 1886), Bobek (Wiener Ber. 1879 und Denkschriften der Wiener Akademie 1889, etc.), G. Pick (Wiener Ber.), E. Czuber, „Die Curven dritter und vierter Ordnung, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen", (Schlömilchs Zeitschrift 1887), G. Kohn (Wiener Ber. 1887, etc.), W. Binder (Unicursale Plancurven vierter Ordnung, Schlömilchs Zeitschrift für Math. u. Phys. 1889, etc., Festschrift „Xenia Austriaca", Wien 1893 und „Theorie der unicursalen Plancurven vierter Ordnung in synthetischer Behandlung", Leipzig 1896), u. A. m. Geschätzt sind E. Weyrs wertvolle Untersuchungen über die Curven fünfter, sechster u. höherer Ordnung (Wiener Ber. 1885, etc.) und geistreiche, neugeometrische Entwickelungen enthalten seine schönen „Beiträge zur Curvenlehre" Wien 1880.

Wir erwähnen noch die schönen Untersuchungen über die berühmte Steinersche Hypocykloide (Crelles Journ. Bd. LIII, S. 231, Berlin 1857, Ges. Werke, II. Bd., S. 641), eine Curve vierten Grades und dritter Classe, mit drei Rückkehrpunkten und drei Rückkehrtangenten, die sich in einem Punkte schneiden. Ihre Eigenschaften entwickelte bekanntlich Cremona im LXIV. Bande des Borchardt-Journales („Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements, S. 101—123) in einfacher und eleganter Weise mit Hilfe der Theorie der Curven dritter Ordnung, und zwar nach Methoden, welche Hesse und Cayley begründet hatten. Von diesbezüglichen Abhandlungen erwähnen wir „Die Tangentengeometrie an der Steinerschen Hypocykloide" (Wiener Ber. 1878) von S. Kantor in Prag, ferner „Über die mit der Parabelschar zusammenhängenden Steinerschen Hypocykloiden" (Wiener Monatshefte 1893) von Prof. O. Rupp in Brünn, „Zur Construction der Steinerschen Hypocykloide" (Ibid. 1895) von G. Stiner und „Über eine specielle Fußpunktcurve der Steinerschen Hypocykloide" (Wien V, Prog. 1896) von Ed. Janisch. Gleiches Interesse bieten die „Steinerschen Mittelpunktscurven" (Wiener Ber. 1889) von K. Bobek in Prag. Einen erwünschten Beitrag zur höheren synthetischen Curventheorie lieferte Herr Prof. Wilh. Binder in Wiener-Neustadt in seinem großen und gediegenen Werke: „Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung" (Leipzig 1896).

Aus der höheren Curventheorie erwähnen wir noch „Das umgekehrte Problem der Brennlinien" (Denkschriften der Wiener Akademie 1859) von G. W. Strauch, „Über kaustische Brennlinien" (Wiener Ber. 1869) von Em. Weyr, ferner seine Untersuchungen „Über Curvenbüschel (Ibid. 1870), „Über involutorische Winkelrelationen der Cardioide" (Ibid. 1871), „Über die Fußpunktcurven der räumlichen Curven" (Ibid. 1871), „Über den Durchschnitt von Focalen mit Kreisen und mit Lemniscaten" (Prager Ber. 1873). Interessant sind auch die Untersuchungen über „Raum-Epicykloiden (Wiener Ber. 1881) von Prof. J. S. Vaneček und von besonders wissenschaftlich hohem Werte Prof. Em. Weyrs „Beiträge zur Curvenlehre" (Wien 1880). Die „Loxodromen und kürzesten Linien auf dem Kreisring" untersuchte Universitäts-Professor A. Puchta in Czernowitz im I. Jahrg. der Monatshefte für Math. u. Phys., Wien 1890.

Mit besonderem Interesse haben wir auch die Abhandlung „Über die Einhüllende der Tangenten einer Plancurve, der Schmiegungsebenen einer Raumcurve und der Tangentialebenen einer krummen Fläche" (Monatshefte für Math. und Physik, III. Jahrg., Wien 1892) von Herrn Emanuel Czuber, Professor an der k. k. techn. Hochschule in Wien, und den hübschen „Beitrag zur Construction von Krümmungskugeln an Raumcurven" (Wiener Sitzungsber. CIV. Bd., Jahrg. 1895), von J. Sobotka zur Kenntnis genommen. Der letztgenannte Verfasser dehnte das schöne Problem der Construction von Osculationskugeln auf Raumcurven dritter und vierter Ordnung aus. Eine erwünschte moderne Darstellung erhielt die Curvenlehre mit den Sätzen von Poncelet, Chasles, Jacobi, Plücker, Steiner, Cayley, Riemann, Hesse, Zeuthen, etc. im II. Bande (S. 3—169) des Werkes „Darstellende und projective Geometrie" (Wien 1884) von Herrn Regierungsrath Prof. Dr. Peschka. Besonderes Interesse verdient auch hier die nach Herrn Prof. A. Beck in Riga (Math. Annalen, Bd. XIV, S. 207) mittelst einer unendlich kleinen Verschiebung oder Translation durchgeführte Bestimmung der Classe einer gegebenen Punktcurve n-ter Ordnung (II. Cap., S. 67) und der Ordnung einer gegebenen Enveloppe, sowie die nach Herrn Prof. Schur (Zeitschrift für Math. und Phys., XXII. Bd., S. 220) auf dem Wege der Induction aus den Polarsätzen der Kegelschnitte rein geometrisch und sehr anschaulich entwickelte Theorie der Polaren algebraischer Curven (III. Cap., S. 71—104). Die Flächen dritter Ordnung und insbesondere die Regelflächen dieser Ordnung waren Gegenstand der Untersuchungen von Emil Weyr (Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde, Leipzig 1870), Karl Moshammer (Wiener Ber. 1876), S. Kantor (Journ. für Math. 1883), K. Bobek (Zur Classification der Flächen dritter Ordnung, Wien Bern. 1887), G. Kohn (Ibid. 1887, 90 etc.), K. Küpper (Prager Ber. 1887, 1888, etc.), K. Bobek (Wiener Ber. 1884), u. A.

Interessante Ergebnisse in der Theorie der Flächen vierter Ordnung erzielten A. Ameseder (Regelfläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, Wiener Ber. 1880), J. S. Vaneček (Prag. Ber. 1883), K. Bobek (Wiener Ber. 1884), K. Küpper (Prager Ber. 1887 u. 1889), A. Sucharda (Rückungsflächen vierter Ordnung, Prager Ber. 1888, 89, etc.), W. Wirtinger (Kummersche Fläche, Wiener Monatshefte 1890), H. Drasch (Wiener Ber. 1892), u. A. Die „Construction algebraischer Curven und Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte mittelst reciproker linearer Systeme höherer Stufe" theilte Herr Prof. G. von Escherich in dem LXXXV. Bande der Wiener Sitzungsberichte vom Jahre 1882 mit. Die Regelflächen dritten Grades (Cayleysche Fläche) bilden das II. Cap. des IV. Bandes von Prof. Peschkas Werk „Darstellende u. projective Geometrie (Wien 1885). Eine geistreiche Untersuchung „Über die Abhängigkeit der Charaktere einer durch Leitcurven bestimmten Regelfläche von den Charakteren dieser Leitcurven" theilte Herr Docent Otto Rupp im XVIII. Bande (S. 366—378 der Mathem. Annalen (Leipzig 1881) mit.

Geschätzt sind auch die wertvollen neueren Arbeiten von Prof. A. Ameseder, „Über ein Nullsystem zweiten Grades" (Wiener Ber. 1881), „Das allgemeine räumliche Nullsystem zweiten Grades" (Journ. f. Math., Berlin 1884), „Über die linearen Transformationen des tetraedralen Complexes in sich" (Wiener Ber. 1888), „Die Theorie der cyklischen Projectivitäten" (Ibid. 1889) und „Die Quintupellage collinearer Räume"

(Ibid. 89); ferner die interessanten Untersuchungen „Über die metrischen Beziehungen, die in einer Congruenz linearer Complexe stattfinden" (Wiener Ber. 1881) von K. Bobek, „Über Strahlencomplexe" (Ibid. 1885) von Prof. F. Mertens. Die „Eigenschaften des Axencomplexes der Flächen zweiten Grades und des allgemeinen tetraedralen Complexes" untersuchte Prof. Machovec in den Prager Sitzungsberichten vom Jahre 1886. Geometrische Betrachtungen über den Strahlencomplex und die Congruenz" theilte Prof. K. Küpper in den Prager Sitzungsberichten vom Jahre 1891 mit und über „Die Schraubenbewegung, das Nullsystem und den linearen Complex" machte er in den Wiener Monatsheften (Wien 1890) Mittheilung.

Wir müssen schon jetzt darauf hinweisen, dass Herr Emil Weyer frühzeitig die große Bedeutung der Theorie der Involutionen für die höhere Curven- und Flächentheorie erkannt und in seinen zahlreichen Abhandlungen insbesondere die Theorie der höheren Involutionen über weite Grenzen ausgebaut hat.[1])

Das Werk seines ausgezeichneten Lehrers der Mathematik, Prof. Dr. Heinrich Durège „Die ebenen Curven dritter Ordnung" (343 S. und 44 Fig.) erschien im Jahre 1871 bei B. G. Teubner in Leipzig und enthielt eine umfassende Zusammenstellung der Eigenschaften der von Maclaurin, Salmon, Hart, Cayley, Poncelet, Chasles, Jonquières, Plücker, Hesse, Schröter, Cremona, u. A. unter suchten cubischen Curven. Seit dreißig Jahren bilden nun die Curven dritter Ordnung mit jenen der vierten Ordnung auch in Österreich den Gegenstand schöner und interessanter Untersuchungen von einer stattlichen Reihe geschätzter Forscher auf dem Gebiete der neueren Geometrie. Zwischen der Abhandlung des Assistenten der Lehrkanzel für Mathematik am Prager Polytechnicum, Emil Weyr, „Zur Erzeugung der Curven dritter Ordnung" (Wiener Sitzungsberichte 1868, Bd. LVIII, S. 633—644) und dem neuen ausgezeichneten, 397 Seiten umfassenden und dem königl. Sächs. Geheimrathe, Herrn Dr. O. Schlömilch gewidmeten Werke „Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung" (Leipzig, B. G. Teubner, 1896), welches der Verfasser, Herr Wilhelm Binder, Professor an der n.-ö. Landes-Oberrealschule in Wiener-Neustadt, so liebenswürdig

---

[1]) S.: Emil Weyrs Abhandlungen über die Involutionen und ihre Anwendung auf die Theorie der Curven dritter bis siebenter Ordnung in den Wiener Sitzungsberichten von 1870—94, Prager Sitzungsberichte 1870—76, Borchardts Journal Bd. LXXIV, Berlin 1872; Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Milano 1871, Giornale di Matematiche, Napoli 1872, Mémoires de la Société royale des sciences de Liège, Bruxelles 1883 und Monatshefte für Mathem. und Phys. Wien 1891.

war uns mit einer collegialen Widmung zuzusenden, liegt nun eine stattliche Reihe wissenschaftlich-wertvoller Forschungen, an welchen auch die Techniker Österreichs einen ehrenvollen Antheil haben. Das Gleiche gilt von der höheren Flächentheorie, insbesondere den Flächen dritter und vierter Ordnung, den höheren algebraischen und den transcendenten Flächen, sowie von den abwickelbaren und windschiefen Flächen, den Rotations- und Rückungsflächen, den Schrauben- und Normalflächen.

Mit berechtigtem Stolze können nun die Professoren der technischen Hochschulen Österreichs auf diese wissenschaftlich-wertvollen Forschungen der Jünger Polytechnias zurückblicken. Die schon in diesem Bande angeführten wissenschaftlichen Forschungen und die seit dreißig Jahren in Österreich von den darstellenden und neueren Geometern ausgeführten wissenschaftlichen Arbeiten, welche im zweiten Bande dieses mathematisch-historischen Werkes in eingehender Weise besprochen werden sollen, bezeugen uns ein reges wissenschaftliches Leben in den Kreisen der österreichischen Techniker und sie berechtigen uns mit den Worten zu schließen:

„Die geistige Saat, welche Monge — der bedeutendste Staatspädagoge Frankreichs — vor hundert Jahren an der École polytechnique in Paris gepflanzt hatte, welche der junge französische Ingenieur-Capitaine Jean Victor Poncelet durch seine tiefsinnigen Forschungen über die projectivischen Eigenschaften der geometrischen Gebilde während der zweijährigen Gefangenschaft in den russischen Kerkern von Saratow veredelt hatte, und welche Deutschlands größter Geometer, Jakob Steiner, durch sein berühmtes Werk „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" in neue Bahnen gelenkt hatte, hat auch in unserem Vaterlande unter der **fünfzigjährigen und glorreichen Regierung unseres Allergnädigsten Kaisers Franz Josef I.** kräftige Wurzeln geschlagen und auf den Gebieten der technischen Künste, der Industrie und Gewerbe zum Segen des österreichischen Bürgerstandes auch schon reiche und goldene Früchte getragen."

Möge aber auch das technische Hochschulwesen Österreichs, welches seit seiner Begründung durch eine stattliche Reihe von geistig hochgeborenen und edel denkenden Männern zum Segen unseres schönen Vaterlandes begünstigt wurde, besonders beim Übergang aus dem philosophischen in das naturwissenschaftliche Jahrhundert jener edlen Gönner und Geistesheroen sicher sein, welche auch im nächsten Jahrhundert die ihm gebührende schaffende und leitende Macht sichern, damit Österreichs technische Hochschulen in ihren wissenschaftlichen und künstlerischen Leistungen sich auch jenen des Auslandes ebenbürtig zur Seite stellen können.

Und so sprechen wir am Schlusse des ersten Bandes unseres Werkes den aus tiefstem Herzen kommenden Wunsch aus:

„Möge Österreichs Minister für Cultus und Unterricht auch in der Zukunft ein edler Protector der technischen Hochschulen sein!"

Bei der Sympathie, welche insbesondere Seine Excellenz der Herr Minister für Cultus und Unterricht Paul Freiherr Gautsch von Frankenthurn schon seit vielen Jahren den technischen Hochschulen entgegenbringt und welche Seine Excellenz auch vor kurzem in der 539-ten Sitzung des österreichischen Abgeordnetenhauses am 1. December 1896 wieder in so geistvoller Weise zum Ausdruck brachte, indem der Herr Minister einen gegen das wissenschaftliche Leben und Streben der technischen Hochschulen Österreichs gerichteten Angriff mit glänzender Beredsamkeit energisch zurückwies, und bei dem Umstande, dass auch die Wünsche der Professoren-Collegien bei Seiner Excellenz dem Herrn Minister für Cultus und Unterricht stets die entgegenkommendste Würdigung und möglichste Berücksichtigung finden, unterliegt es keinem Zweifel, dass die technischen Hochschulen Österreichs auch in der Zukunft ausgezeichnete Pfleger der exacten Wissenschaften und auf der geistigen Höhe der Zeit stehenden Techniker heranbilden werden.[1])

[1]) S.: „Ausbau und Ausgestaltung der k. k. technischen Hochschulen Österreichs." (Eine Parallele der technischen Hochschulen Österreichs, Deutschlands, etc.). Festschrift des Rectors der k. k. technischen Hochschule in Wien, August Prokop, o. ö. Professor. Gehalten anlässlich der feierlichen Inauguration am 17. October 1896.

443

Berichtigungen:

Seite	60	Zeile	4	von	unten	lies:	IIIe Partie.
„	80	„	18	„	oben	„	Wissenszweig
„	92	„	19	„	unten	„	Beleuchtungsconstructionen
„	107	„	12	„	oben	„	begründende
„	111	„	15	„	„	„	Jonquières,
„	119	„	7	„	unten	„	95. Bd.
„	121	„	8	„	oben	„	changent
„	121	„	8	„	„	„	(S. 152).[2])
„	121	„	21	„	„	„	ästhetischen
„	128	„	21	„	„	„	S. 114—118.
„	176	„	3	„	„	„	barbatos
„	208	„	6	„	unten	„	welchen
„	231	„	17	„	oben	„	Schattenumrisse, Wien
„	239	„	1	„	unten	„	Bde. III, V und XXXVIII, etc.
„	243	„	9	„	„	„	II vol.
„	244	„	2	„	„	„	II Bde
„	254	„	7	„	oben	„	„Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“
„	255	„	6	„	unten	„	Von
„	270	„	1	„	„	„	Gesammelte Werke, II. Bd.
„	330	„	4	„	oben	„	Korndörfer
„	355	„	5	„	unten	„	Niemtschik
„	370	„	3	„	„	„	J. Schlotke, Lehrbuch der darst. Geometrie. II. Aufl. I—IV. Theil. Dresden 1893—96. (IV. Theil „Projectivische Geometrie“).

Anmerkung z. d. S. 224 und 261: Dr. Garbinsky war im J. 1830 Professor an der Universität und Director der in Warschau errichteten polytechnischen Schule und veröffentlichte im V. Bande, S. 174—181, des Crelleschen Journales die von Jakob Steiner citierte Abhandlung „Quelques observations sur les quatre droites données dans l'espace et non comprises deux à deux dans un même plan.“